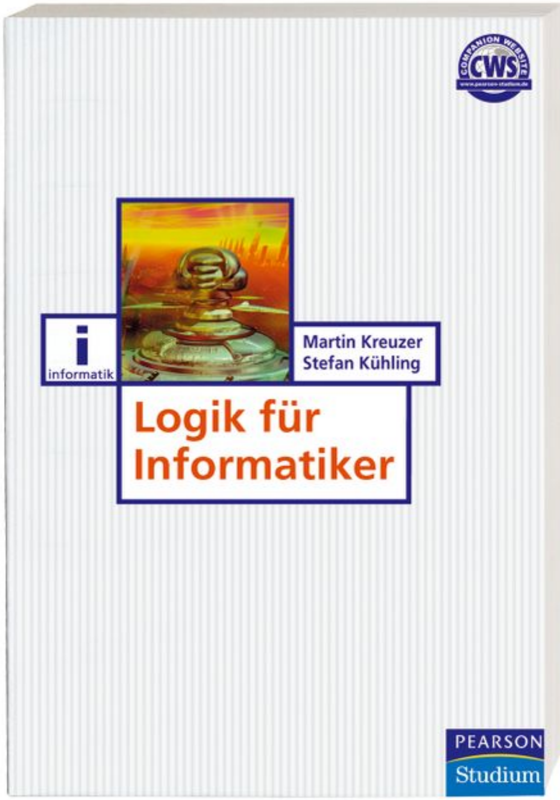
Computational Logic
Algorithmische Logik

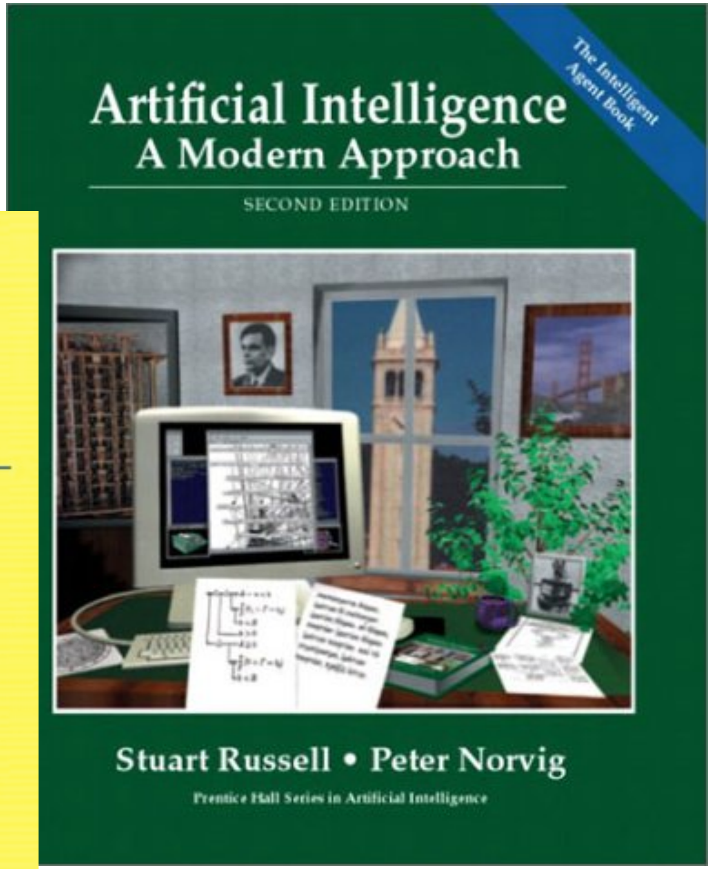
Introduction

Ralf Moeller
Hamburg Univ. of Technology

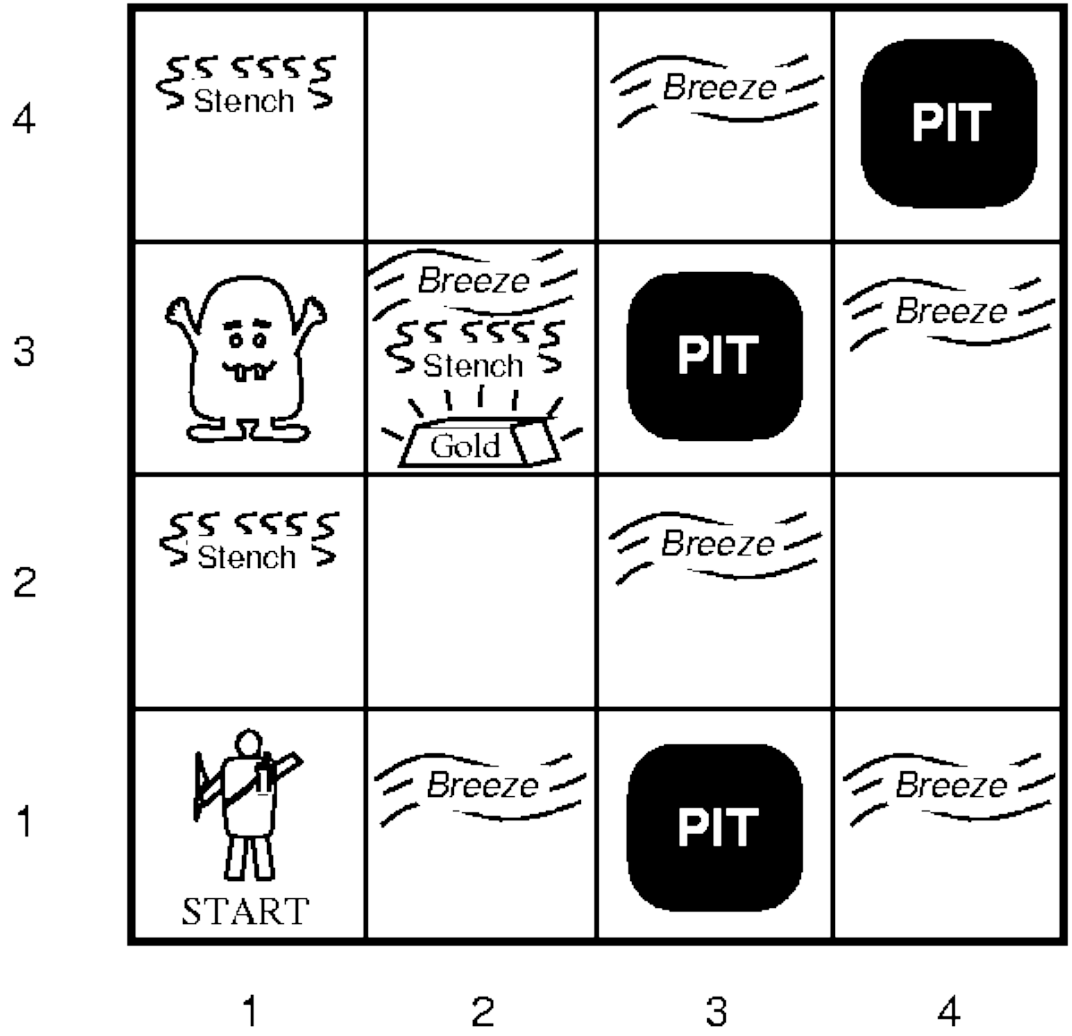
Literature


informatik
Martin Kreuzer
Stefan Kühling
Logik für Informatiker
PEARSON
Studium


Uwe Schöning
Logik für Informatiker
5. Auflage
Spektrum


Artificial Intelligence
A Modern Approach
SECOND EDITION
The Intelligent Agent Book
Stuart Russell • Peter Norvig
Prentice Hall Series in Artificial Intelligence

Die Wumpus-Welt



START: Anfang

Wumpus: Monster (Tod)

PIT: Fallgrube (Tod)

Stench: Gestank (neben Wumpus)

Breeze: Luftzug (neben Fallgrube)

Glitter: Gold

Stoß: Agent läuft gegen Wand

Agent hat 1 Pfeil, der horizontal oder vertikal den Wumpus tötet, Schrei überall zu hören

Die Wumpus-Welt (2)

Agent kann seinen Standort nicht wahrnehmen

Wahrnehmungen:

> *[Stench, Breeze, Glitter, None, None]*

Gestank, Luftzug, Glitzer, kein Stoß, kein Schrei

Anfangszustand:

> *Position [1,1], nach rechts gewandt,*
> *irgendwo der Wumpus, das Gold, drei Fallgruben*

Ziel:

> *Hole Gold und verlasse danach die Höhle*

Die Wumpus-Welt (3)

Aktionen:

vorwärts gehen

nach rechts drehen

nach links drehen

Gold greifen

Pfeil Schießen

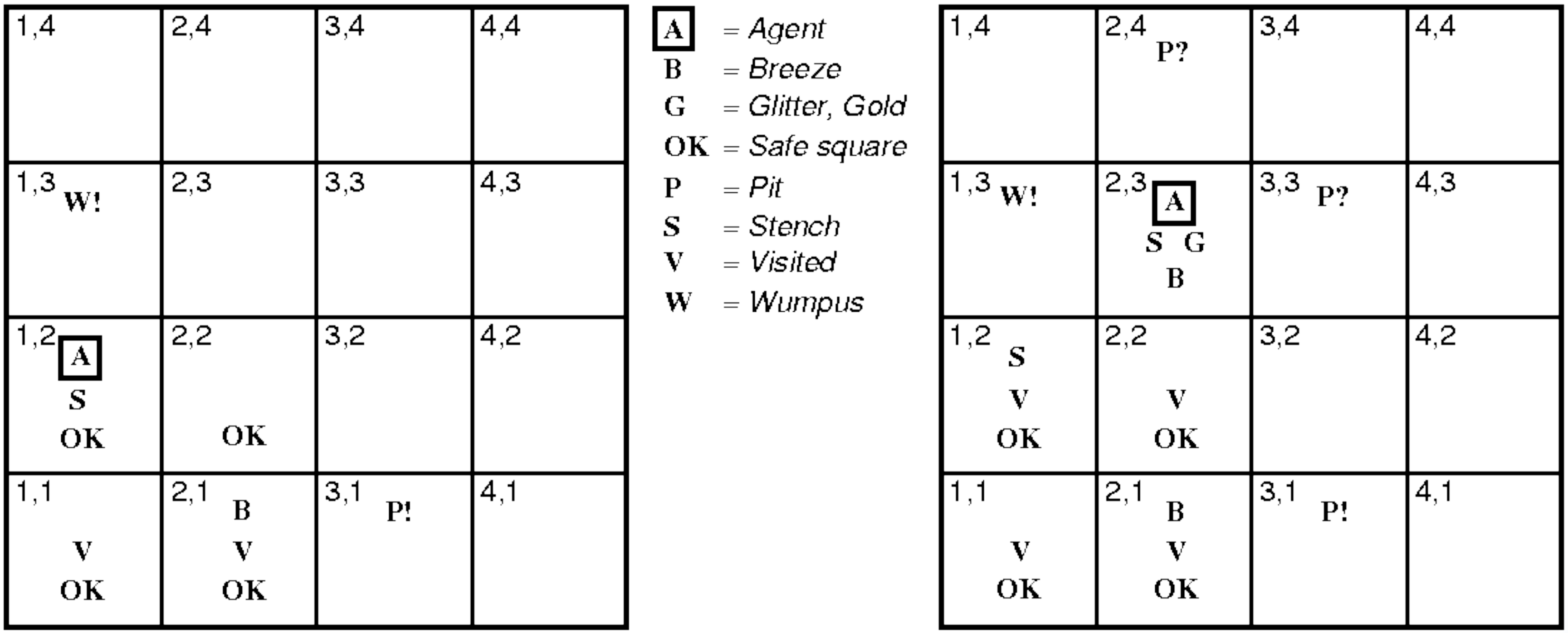
Höhle verlassen (falls Standort [1,1])

Exploration einer Beispielwelt

[1, 2] und [2, 1] sind sicher:

(a) (b)

Exploration einer Beispiel-Welt



(a) (b)

Logik in der Informatik

Language	Ontological Commitment (What exists in the world)	Epistemological Commitment (What an agent believes about facts)
Propositional logic	facts	true/false/unknown
First-order logic	facts, objects, relations	true/false/unknown
Temporal logic	facts, objects, relations, times	true/false/unknown
Probability theory	facts	degree of belief $0 \ldots 1$
Fuzzy logic	degree of truth	degree of belief $0 \ldots 1$

Wumpus: Formalisierung

Grundbausteine:

1) atomare Aussagen

- D : *„Der Wumpus ist tot"*
- $W_{1,3}$: *„Der Wumpus ist auf [$1,3$]"*

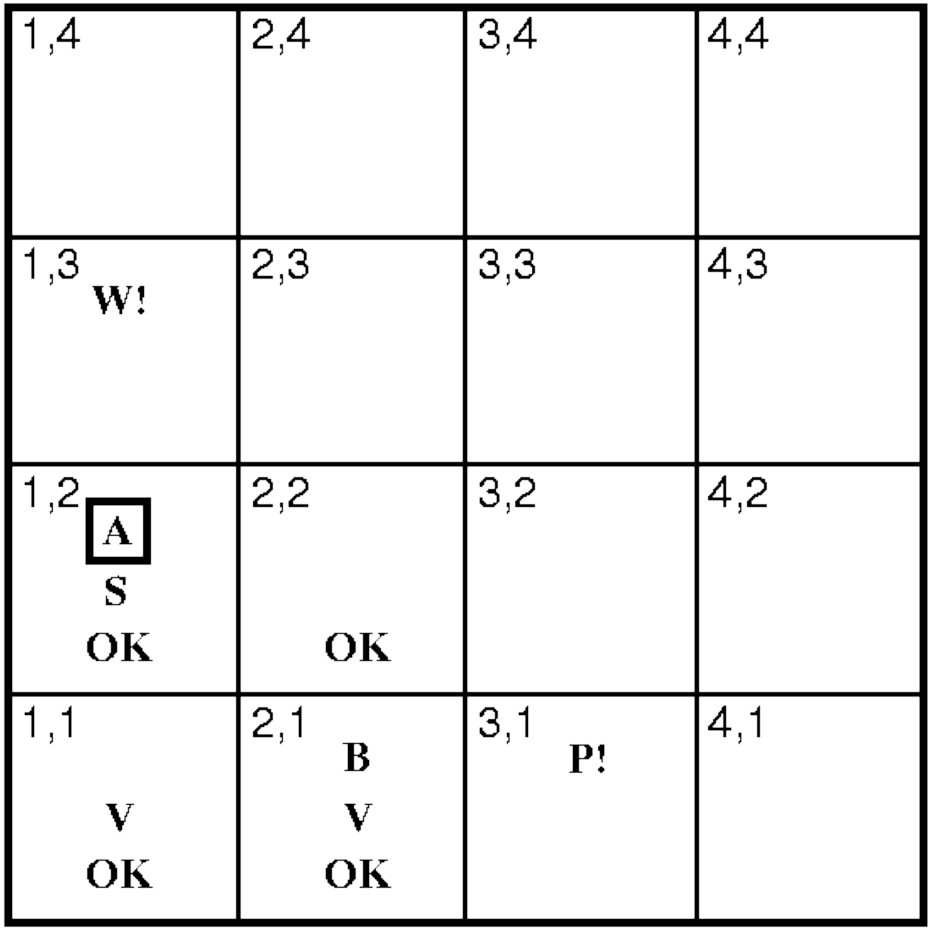
die ***wahr*** *oder* ***falsch*** *sein können*

2) logische Konnektoren

(und, oder, nicht etc.)

zur Konstruktion von ***Formeln***

Formalisierung des Beispiels



A = *Agent*
B = *Breeze*
G = *Glitter, Gold*
OK = *Safe square*
P = *Pit*
S = *Stench*
V = *Visited*
W = *Wumpus*

aktuelle Situation:

$\neg S_{1,1}$	$\neg B_{1,1}$
$\neg S_{2,1}$	$B_{2,1}$
$S_{1,2}$	$\neg B_{1,2}$

Formalisierung des Beispiels (2)

Beschreibung der Domäne (Spielregeln):

R_1: $\neg S_{1,1} \Rightarrow \neg W_{1,1} \land \neg W_{1,2} \land \neg W_{2,1}$

R_2: $\neg S_{2,1} \Rightarrow \neg W_{1,1} \land \neg W_{2,1} \land \neg W_{2,2} \land \neg W_{3,1}$

R_3: $\neg S_{1,2} \Rightarrow \neg W_{1,1} \land \neg W_{1,2} \land \neg W_{2,2} \land \neg W_{1,3}$

R_4: $S_{1,2} \Rightarrow W_{1,3} \lor W_{1,2} \lor W_{2,2} \lor W_{1,1}$

...

Gilt $WB \models W_{1,3}$ *?*

Logisches Schließen

Wie können wir ableiten,
welche Aktionen der Agent ausführen soll?

Negative Selektion:

Schließe alle beweisbar gefährlichen Aktionen aus

$$A_{1,1} \wedge East_A \wedge W_{2,1} \Rightarrow \neg Forward$$

Positive Selektion:

Schlage nur Aktionen vor, die beweisbar sicher sind.

$$A_{1,1} \wedge East_A \wedge \neg W_{2,1} \Rightarrow Forward$$

Zur Beschreibung der Instruktion
„Gehe nicht vorwärts, wenn der Wumpus
auf dem nächsten Feld sitzt.“
benötigt man 64 Klauseln (16 Felder x 4 mögliche Richtungen).

Wumpus: Aussagenlogik

Die Wumpus-Welt kann in Aussagenlogik modelliert werden.

*Für **jedes einzelne** Feld müssen entsprechende Regeln aufgestellt werden:*

R_1: $\neg S_{1,1} \Rightarrow \neg W_{1,1} \wedge \neg W_{1,2} \wedge \neg W_{2,1}$

R_2: $\neg S_{2,1} \Rightarrow \neg W_{1,1} \wedge \neg W_{2,1} \wedge \neg W_{2,2} \wedge \neg W_{3,1}$

R_3: $\neg S_{1,2} \Rightarrow \neg W_{1,1} \wedge \neg W_{1,2} \wedge \neg W_{2,2} \wedge \neg W_{1,3}$

$\vdots$

*Alle atomaren Aussagen müssen mit einem **Zeitindex** versehen werden.*
Bei einem Horizont von 100 Zeitschritten werden 6400 Regeln zur Aktionsbeschreibung benötigt.

Wumpus: Prädikatenlogik

Prädikatenlogik 1. Stufe (FOL) ermöglicht die ***Strukturierung*** *atomarer Aussagen.*

Es gibt ***Objekte****,* ***Funktionen*** *und* ***Relationen****.*

Beispiel*:*

„Auf allen Feldern, die dem Aufenthaltsort des Wumpus unmittelbar benachbart sind, nimmt man einen unangenehmen Geruch wahr."

$$\forall f_1, f_2 [[Auf(f_1, wumpus) \wedge Benachbart(f_1, f_2)] \Rightarrow Geruch(f_2)]$$

(Aussagenlogik: 16 Formeln der Form

$$W_{i,j} \Rightarrow [S_{i-1,j} \vee S_{i+1,j} \vee S_{i,j-1} \vee S_{i,j+1}])$$

Prädikatenlogik erlaubt kompaktere Darstellung.

Überblick

- Aussagenlogik
- Prädikatenlogik
- Beschreibungslogik / Modallogik
- Zeitlogiken

Syntax der Aussagenlogik

Eine *atomare Formel* hat die Form A_i (wobei $i = 1, 2, 3, \ldots$).

Formeln werden durch folgende induktive Definition festgelegt:

1. Alle atomaren Formeln sind Formeln
2. Für alle Formeln F und G sind $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln.
3. Für jede Formel F ist $\neg F$ eine Formel.

Abkürzungen:

$$
\begin{array}{rcl}
A, B, C \text{ oder } P, Q, R \text{ oder } \ldots & \text{statt} & A_1, A_2, A_3 \ldots \\
(F_1 \rightarrow F_2) & \text{statt} & (\neg F_1 \vee F_2) \\
(F_1 \leftrightarrow F_2) & \text{statt} & ((F_1 \wedge F_2) \vee (\neg F_1 \wedge \neg F_2)) \\
(\bigvee_{i=1}^{n} F_i) & \text{statt} & (\ldots((F_1 \vee F_2) \vee F_3) \vee \ldots \vee F_n) \\
(\bigwedge_{i=1}^{n} F_i) & \text{statt} & (\ldots((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \wedge \ldots \wedge F_n)
\end{array}
$$

Begriff der induktiven Definition

- Zunächst einfachste Einheiten (Atome) festlegen
  - Beispiel: atomare Formeln der Aussagenlogik
- Dann erklären wie aus einfachen Einheiten komplexere Einheiten konstruiert werden können
  - Beispiel: Bildung allgemeiner Formeln
    wie $F \wedge G$, $F \vee G$, $\neg F$

Noch ein paar Abkürzungen ...

- Sei A eine beliebige atomare Formel (Variable)
- $\top$ stehe für $A \vee \neg A$
- $\perp$ stehe für $A \wedge \neg A$

Semantik der Aussagenlogik

Die Elemente der Menge $\{0,1\}$ heißen *Wahrheitswerte*.

Eine *Belegung* ist eine Funktion $\mathcal{A}\colon D \to \{0,1\}$, wobei D eine Teilmenge der atomaren Formeln ist. Wir erweitern $\mathcal{A}$ zu einer Funktion $\overline{\mathcal{A}}\colon E \to \{0,1\}$, wobei $E \supseteq D$ die Menge aller Formeln ist, die nur aus den atomaren Formeln in D aufgebaut sind.

$$\overline{\mathcal{A}}((F \wedge G)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \overline{\mathcal{A}}(F) = 1 \text{ und } \overline{\mathcal{A}}(G) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{\mathcal{A}}((F \vee G)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \overline{\mathcal{A}}(F) = 1 \text{ oder } \overline{\mathcal{A}}(G) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{\mathcal{A}}((\neg F)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \overline{\mathcal{A}}(F) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir schreiben $\mathcal{A}$ statt $\overline{\mathcal{A}}$.

Modelle

Sei F eine Formel und $\mathcal{A}$ eine Belegung.

Falls $\mathcal{A}$ für alle in F vorkommenden atomaren Formeln definiert ist, so heißt $\mathcal{A}$ zu F *passend*.

Sei $\mathcal{A}$ passend zu F:

Falls $\mathcal{A}(F) = 1$	so schreiben wir	$\mathcal{A} \models F$
	und sagen	F *gilt unter* $\mathcal{A}$
	oder	$\mathcal{A}$ *ist ein Modell für* F
Falls $\mathcal{A}(F) = 0$	so schreiben wir	$\mathcal{A} \not\models F$
	etc.	

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Eine Formel F heißt *erfüllbar*, falls F mindestens ein Modell besitzt, andernfalls heißt F *unerfüllbar*.

Eine (endliche oder unendliche!) Menge von Formeln M heißt *erfüllbar*, falls es eine Belegung gibt, die für jede Formel in M ein Modell ist.

Eine Formel F heißt *gültig* (oder *allgemeingültig* oder *Tautologie*) falls jede zu F passende Belegung ein Modell für F ist. Wir schreiben $\models F$, falls F eine Tautologie ist, und $\not\models F$ sonst.

Aufgabe

	Gültig	Erfüllbar	Unerfüllbar
A			
$A \vee B$			
$A \vee \neg A$			
$A \wedge \neg A$			
$A \rightarrow \neg A$			
$\neg A \rightarrow A$			
$A \rightarrow B$			
$A \rightarrow (B \rightarrow A)$			
$A \rightarrow (A \rightarrow B)$			
$A \leftrightarrow \neg A$			
$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$			

Aufgabe

Gelten die folgenden Aussagen?

				J/N	Gegenb.
Wenn	F gültig	dann	F erfüllbar		
Wenn	F erfüllbar	dann	$\neg F$ unerfüllbar		
Wenn	F gültig	dann	$\neg F$ unerfüllbar		
Wenn	F unerfüllbar	dann	$\neg F$ gültig		

Aufgabe

Gelten die folgenden Aussagen?

						J/N	Gegenb.
Wenn	$(F \rightarrow G)$ gültig	und	F gültig	dann	G gültig		
Wenn	$(F \rightarrow G)$ erfüllbar	und	F erfüllbar	dann	G erfüllbar		
Wenn	$(F \rightarrow G)$ gültig	und	F erfüllbar	dann	G erfüllbar		

Folgerung und Äquivalenz

Eine Formel G heißt eine *Folgerung* der Formeln $F_1, \ldots, F_k$ falls für jede Belegung, die sowohl zu $F_1, \ldots, F_k$ als auch zu G passend ist, gilt:

> Wenn $\mathcal{A}$ Modell von $\{F_1, \ldots, F_k\}$ ist, dann ist $\mathcal{A}$ auch Modell von G.

Wir schreiben $F_1, \ldots, F_k \models G$, falls G eine Folgerung von $F_1, \ldots, F_k$ ist.

Zwei Formeln F und G heißen (*semantisch*) *äquivalent*, falls für alle Belegungen $\mathcal{A}$, die sowohl für F als auch für G passend sind, gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$. Hierfür schreiben wir $F \equiv G$.

Motivation für Wahrheitstabelle von $\rightarrow$

- Wir betrachten folgende Formeln
  - Wenn es regnet,
    scheint die Sonne nicht: $R \rightarrow \neg S$
  - Es regnet: R
- Daraus folgt: Die Sonne scheint nicht!
  - Also: $\{R \rightarrow \neg S, R\} \models \neg S$
  - Wie sehen die Modelle von $\{R \rightarrow \neg S, R\}$ aus?
  - R hat den Wert 1,
  - Wie wird $R \rightarrow \neg S$ auf 1 abgebildet?
  - $\neg S$ muß auf 1 abgebildet werden (qed)

$1 \rightarrow 1 = 1$

$1 \rightarrow 0 = 0$

$0 \rightarrow 1 = 1$

$0 \rightarrow 0 = 1$

Zweites Beispiel:

- Wenn es regnet,
  scheint die Sonne nicht: $R \rightarrow \neg S$
- Es regnet nicht: $\neg R$

$1 \rightarrow 1 = 1$

$1 \rightarrow 0 = 0$

$0 \rightarrow 1 = 1$

$0 \rightarrow 0 = 1$

- Folgt daraus: Die Sonne scheint nicht?
  - $\{R \rightarrow \neg S, \neg R\} \models \neg S$?
  - Wie sehen die Modelle von $\{R \rightarrow \neg S, \neg R\}$ aus?
  - R hat den Wert 0, da $\neg R$ auf 1 abgebildet werden soll
  - Wenn $R \rightarrow \neg S$ auf 1 abgebildet werden soll, dann bleiben die dritte und vierte Zeile, somit kann in den Modellen von $\{R \rightarrow \neg S, \neg R\}$ auch $\neg S$ auf 0 abgebildet werden (wir wählen die Variante aus Zeile 4)

Schlußmuster

- Wir haben gesehen:
  - $\{P, P \rightarrow Q\} \models Q$ (Name für Schlußmuster: Modus Ponens)
- Folgendes können wir auch zeigen:
  - $\{Q, \neg P \rightarrow \neg Q\} \models P$ (Name für Schlußmuster: Modus Tollens)
- Oder auch:
  - $\{\neg Q, P \rightarrow Q\} \models \neg P$ (Name für Schlußmuster: Kontraposition)

Aufgaben

Gelten die folgenden Äquivalenzen?

$$
\begin{aligned}
(A \to B) \to C &\equiv A \to (B \to C)\\
(A \to B) \to C &\equiv (A \wedge B) \to C\\
(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C &\equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)
\end{aligned}
$$

Gelten die folgenden Aussagen?

				J/N	Gegenb.
Wenn	$(F \to G)$ gültig	dann	$F \models G$		
Wenn	$F \models G$	dann	$(F \to G)$ gültig		
Wenn	$(F \leftrightarrow G)$ gültig	dann	$F \equiv G$		
Wenn	$F \equiv G$	dann	$(F \leftrightarrow G)$ gültig		

Die Hauptprobleme

- Modellprüfung

  Sei F eine Formel und sei $\mathcal{A}$ eine passende Belegung. Gilt $\mathcal{A}(F) = 1$?

- Erfüllbarkeit

  Sei F eine Formel. I st F erfüllbar ?

- Gültigkeit

  Sei F eine Formel. Ist F gültig ?

- Folgerung

  Seien F und G Formeln. Gilt $F \models G$?

- Äquivalenz

  Seien F und G Formeln. Gilt $F \equiv G$?

Aufgabe

Welche Probleme lassen sich auf welche reduzieren?

- Gültigkeit $\Longleftrightarrow$ (Nicht)Erfüllbarkeit:

$$F \text{ gültig gdw. } \neg F \text{ nicht erfüllbar}$$
$$F \text{ erfüllbar gdw. } \neg F \text{ nicht gültig}$$

- Gültigkeit $\Longrightarrow$ Folgerung:

$$F \text{ gültig gdw. } \mathrm{T} \models F$$

- Folgerung $\Longrightarrow$ Gültigkeit:

$$F \models G \text{ gdw. } F \to G \text{ gültig}$$

- Gültigkeit $\Longrightarrow$ Äquivalenz:

$$F \text{ gültig gdw. } F \equiv T$$

- Äquivalenz $\Longrightarrow$ Gültigkeit:

$$F \equiv G \text{ gdw. } F \leftrightarrow G \text{ gültig}$$

Lösung des Erfüllbarkeitsproblems

- Gegeben sei eine aussagenlogische Formel F, deren Erfüllbarkeit zu prüfen ist
- In der Formel kommen atomare Formeln (Variablen) vor
- Teste für alle Belegungsmöglichkeiten der atomaren Formeln den Wahrheitswert
- Wenn sich eine Belegung finden läßt, so daß der Wahrheitswert von F sich zu 1 berechnet, ist F erfüllbar (semantische Beweismethoden)
- Man muß bei n Variablen 2^n Möglichkeiten prüfen

Gesucht wird ein mechanisches Verfahren

- Wir definieren einen Operator $\vdash$
- $\{F1, F2, ..., Fk\} \vdash G$
- Ansprüche an $\vdash$
- Korrektheit
  - Wenn $\{F1, F2, ..., Fk\} \vdash G$ dann $\{F1, F2, ..., Fk\} \models G$
- Vollständigkeit
  - Wenn $\{F1, F2, ..., Fk\} \models G$ dann $\{F1, F2, ..., Fk\} \vdash G$

Lösung des Äquivalenzproblems

- Es soll gezeigt werden, daß eine Formel F äquivalent zu einer Formel G ist.
- $F \equiv G$ gdw. $(F \leftrightarrow G)$ gültig gdw. $\neg(F \leftrightarrow G)$ nicht erfüllbar
- Man muß im schlimmsten Fall 2^n verschiedene Belegungsmöglichkeiten testen
- Frage: Geht das nicht direkt durch Umformung der syntaktischen Einheiten für F und G, so daß F syntaktisch in G überführt wird?

Ersetzbarkeitstheorem

Satz (Ersetzbarkeitstheorem)

Seien F und G äquivalente Formeln. Sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel F. Dann ist H äquivalent zu H', wobei H' aus H hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H durch G ersetzt wird.

Beweisprinzipien: Induktion

- Behauptung: $\mathcal{B}$(F) gilt für jede Formel F
- Beweis:
  - 1. Man zeige, es gilt $\mathcal{B}(A_i)$ für jede atomare Formel A_i.
  - 2. Man zeige unter der (Induktions-)Annahme, daß $\mathcal{B}$(F) und $\mathcal{B}$(G) gelten, folgt, daß $\mathcal{B}(F \wedge G)$, $\mathcal{B}(F \vee G)$, $\mathcal{B}(\neg F)$ gelten

Beweis: (Ersetzbarkeitstheorem)

Beweis (durch Induktion über den Formelaufbau von H):

Induktionsanfang: Falls H eine atomare Formel ist, dann kann nur $H = F$ sein. Und damit ist klar, daß H äquivalent zu H' ist, denn $H' = G$.

Induktionsschritt: Falls F gerade H selbst ist, so trifft dieselbe Argumentation wie im Induktionsanfang zu. Sei also angenommen, F ist eine Teilformel von H mit $F \neq H$. Dann müssen wir drei Fälle unterscheiden.

Fall 1: H hat die Bauart $H = \neg H_1$.
Nach Induktionsvoraussetzung ist H_1 äquivalent zu $H_1^{'}$, wobei $H_1^{'}$ aus H_1 durch Ersetzung von F durch G hervorgeht. Nun ist aber $H^{'} = \neg H_1^{'}$. Aus der (semantischen) Definition von „$\neg$“ folgt dann, daß H und $H^{'}$ äquivalent sind.

Fall 2: H hat die Bauart $H = (H_1 \vee H_2)$.
Dann kommt F entweder in H_1 oder H_2 vor. Nehmen wir den ersteren Fall an (der zweite ist völlig analog). Dann ist nach Induktionssannahme H_1 wieder äquivalent zu $H_1^{'}$, wobei $H_1^{'}$ aus H_1 durch Ersetzung von F durch G hervorgeht. Mit der Definition von „$\vee$“ ist dann klar, daß $H \equiv (H_1^{'} \vee H_2) = H^{'}$.

Fall 3: H hat die Bauart $H = (H_1 \wedge H_2)$.
Diesen Fall beweist man völlig analog zu *Fall 2*.

Äquivalenzen

Satz

Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{array}{rcll}
(F \wedge F) & \equiv & F & \\
(F \vee F) & \equiv & F & \text{(Idempotenz)} \\
(F \wedge G) & \equiv & (G \wedge F) & \\
(F \vee G) & \equiv & (G \vee F) & \text{(Kommutativität)} \\
((F \wedge G) \wedge H) & \equiv & (F \wedge (G \wedge H)) & \\
((F \vee G) \vee H) & \equiv & (F \vee (G \vee H)) & \text{(Assoziativität)} \\
F \wedge (F \vee G)) & \equiv & F & \\
F \vee (F \wedge G)) & \equiv & F & \text{(Absorption)} \\
F \wedge (G \vee H)) & \equiv & ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)) & \\
F \vee (G \wedge H)) & \equiv & ((F \vee G) \wedge (F \vee H)) & \text{(Distributivität)} \\
\neg\neg F & \equiv & F & \text{(Doppelnegation)}
\end{array}
$$

Weitere Äquivalenzen

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G) \qquad \text{(deMorgansche Regeln)}$$

$$(F \vee G) \equiv F, \text{ falls } F \text{ Tautologie}$$

$$(F \wedge G) \equiv G, \text{ falls } F \text{ Tautologie} \qquad \text{(Tautologieregeln)}$$

$$(F \vee G) \equiv G, \text{ falls } F \text{ unerfüllbar}$$

$$(F \wedge G) \equiv F, \text{ falls } F \text{ unerfüllbar} \qquad \text{(Unerfüllbarkeitsregeln)}$$