Computational Logic
Algorithmische Logik

Prädikatenlogik

Ralf Moeller
Hamburg Univ. of Technology

Quantifizieren von Aussagen (2)

- Für alle x gilt: Metall(x) $\rightarrow$ Leitet-Strom(x)
- Notation: $\forall$ x (Metall(x) $\rightarrow$ Leitet-Strom(x))
- Man beachte: Es muß nicht notwendigerweise überhaupt Metalle geben! Die Für-alle-Aussage ist ja dann nicht falsch
- Manchmal möchte man die **Existenz** aber fordern
- Es *gibt ein* x: Metall(x), oder genauer aber synonym:
- Es *gibt mindestens ein* x: Metall(x)
- Notation: $\exists$x (Metall(x)) **Existenzquantor**

Syntax der Prädikatenlogik

Danksagung

- Die Folien zur Prädikatenlogik nach dem Buch "Logik für Informatiker" von Uwe Schöning wurden übernommen von Javier Esparza (http://wwwbrauer.in.tum.de/lehre/logik/SS99/)

Variablen, Symbole, Terme

Eine *Variable* hat die Form x_i mit $i = 1, 2, 3 \ldots$.
Ein *Prädikatensymbol* hat die Form P_i^k und ein *Funktionssymbol* hat die Form f_i^k mit $i = 1, 2, 3 \ldots$ und $k = 0, 1, 2 \ldots$. Hierbei heißt i jeweils der *Unterscheidungsindex* und k die *Stellenzahl* (oder Stelligkeit). Wir definieren nun die *Terme* durch einen induktiven Prozeß:

1. Jede Variable ist ein Term.

2. Falls f ein Funktionssymbol mit der Stellenzahl k, und falls $t_1, \ldots, t_k$ Terme sind, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_k)$ ein Term.

Hierbei sollen auch Funktionssymbole der Stellenzahl 0 eingeschlossen sein, und in diesem Fall sollen die Klammern wegfallen. Nullstellige Funktionssymbole heißen auch *Konstanten*.

Formeln

Nun können wir (wiederum induktiv) definieren, was *Formeln* (der Prädikatenlogik) sind.

1. Falls P ein Prädikatsymbol der Stelligkeit k ist, und falls $t_1, \ldots, t_k$ Terme sind, dann ist $P(t_1, \ldots, t_k)$ eine Formel.

2. Für jede Formel F ist auch $\neg F$ eine Formel.

3. Für alle Formeln F und G sind auch $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln.

4. Falls x eine Variable ist und F eine Formel, so sind auch $\exists xF$ und $\forall xF$ Formeln. Das Symbol $\exists$ wird *Existenzquantor* und $\forall$ *Allquantor* genannt.

Atomare Formeln nennen wir genau die, die gemäß 1. aufgebaut sind. Falls F eine Formel ist und F als Teil einer Formel G auftritt, so heißt F *Teilformel* von G.

Freie und gebundene Variablen, Aussagen

Alle Vorkommen von Variablen in einer Formel werden in *freie* und *gebundene* Vorkommen unterteilt. Dabei heißt ein Vorkommen der Variablen x in der Formel F gebunden, falls x in einer Teilformel von F der Form $\exists xG$ oder $\forall xG$ vorkommt. Andernfalls heißt dieses Vorkommen von x frei.

Eine Formel ohne Vorkommen einer freien Variablen heißt *geschlossen* oder eine *Aussage*.
Die *Matrix* einer Formel F ist diejenige Formel, die man aus F erhält, indem jedes Vorkommen von $\exists$ bzw. $\forall$, samt der dahinterstehenden Variablen gestrichen wird. Symbolisch bezeichnen wir die Matrix der Formel F mit F^*.

Aufgabe

NF: Nicht-Formel   F: Formel, aber nicht Aussage   A: Aussage

	NF	F	A
$\forall x P(a)$			
$\forall x \exists y (Q(x,y) \vee R(x,y))$			
$\forall x Q(x,x) \rightarrow \exists x Q(x,y)$			
$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x,x)$			
$\forall P(x)$			
$P(x) \rightarrow \exists x$			
$\forall \exists P(x)$			
$\forall x \neg \forall y Q(x,y) \wedge R(x,y)$			
$\exists z (Q(z,x) \vee R(y,z)) \rightarrow \exists y (R(x,y) \wedge Q(x,z))$			
$\exists x (\neg P(x) \vee P(a))$			
$P(x) \rightarrow \exists x P(x)$			
$\exists x \forall y ((P(y) \rightarrow Q(x,y)) \vee \neg P(x))$			

Semantik der Prädikatenlogik

Struktur, passende Strukturen

Eine *Struktur* ist ein Paar $A = (U_A, I_A)$ wobei U_A eine beliebige aber nicht leere Menge ist, die die *Grundmenge* von A (oder der *Grundbereich*, der *Individuenbereich*, das *Universum*) genannt wird. Ferner ist I_A eine Abbildung, die

- jedem k–stelligen Prädikatensymbol P (das im Definitionsbereich von I_A liegt) ein k–stelliges Prädikat über U_A zuordnet,
- jedem k–stelligen Funktionssymbol f (das im Definitionsbereich von I_A liegt) eine k–stellige Funktion auf U_A zuordnet,
- jeder Variablen x (sofern I_A auf x definiert ist) ein Element der Grundmenge U_A zuordnet.

Sei F eine Formel und $A = (U_A, I_A)$ eine Struktur. A heißt zu F *passend*, falls I_A für alle in F vorkommenden Prädikatsymbole, Funktionssymbole und freien Variablen definiert ist.

Mit anderen Worten, der Definitionsbereich von I_A ist eine Teilmenge von $\{P_i^k, f_i^k, x_i | i = 1, 2, 3, \ldots \textit{ und } k = 0, 1, 2., \ldots\}$, und der Wertebereich von I_A ist eine Teilmenge aller Prädikate und Funktionen auf U_A, sowie der Elemente von U_A. Wir schreiben abkürzend statt $I_A(P)$ einfach P^A, statt $I_A(f)$ einfach f^A und statt $I_A(x)$ einfach x^A.

Werte von Termen und Formeln in einer Struktur

Sei F eine Formel und $\mathcal{A}$ eine zu F passende Struktur. Für jeden Term t, den man aus den Bestandteilen von F bilden kann (also aus den Variablen und Funktionssymbolen), definieren wir nun den *Wert* von t in der Struktur $\mathcal{A}$, den wir mit $\mathcal{A}(t)$ bezeichnen. Die Definition ist wieder induktiv.

1. Falls t eine Variable ist (also $t = x$), so ist $\mathcal{A}(t) = x^{\mathcal{A}}$.

2. Falls t die Form hat $t = f(t_1, \ldots, t_k)$ wobei $t_1, \ldots, t_k$ Terme und f ein k–stelliges Funktionssymbol ist, so ist $\mathcal{A}(t) = f^{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k))$.

Der Fall 2 schließt auch die Möglichkeit ein, daß f nullstellig ist, als t die Form hat $t = a$. In diesem Fall ist also $\mathcal{A}(t) = a^{\mathcal{A}}$.

Auf analoge Weise definieren wir (induktiv) den *(Wahrheits–) Wert* der Formeln F unter der Struktur $\mathcal{A}$, wobei wir ebenfalls die Bezeichnung $\mathcal{A}(F)$ verwenden.

- Falls F die Form hat $F = P(t_1, \ldots, t_k)$ mit den Termen $t_1, \ldots, t_k$ und k–stelligem Prädikatsymbol P, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & falls\ (\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k)) \in P^{\mathcal{A}} \\ 0, & sonst \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = \neg G$ hat, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & falls\ \mathcal{A}(G) = 0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = (G \wedge H)$ hat, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & falls\ \mathcal{A}(G) = 1\ und\ \mathcal{A}(H) = 1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = (G \vee H)$ hat, so ist

$$A(F) = \begin{cases} 1, & falls\, A(G) = 1\, oder\, A(H) = 1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = \forall x G$ hat, so ist

$$A(F) = \begin{cases} 1, & falls\ f\ddot{u}r\ alle\ d \in U_A\ gilt:\ A_{[x/d]}(G) = 1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = \exists x G$ hat, so ist

$$A(F) = \begin{cases} 1, & falls\, es\, ein\ d \in U_A\ gibt\ mit:\ A_{[x/d]}(G) = 1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Hierbei bedeutet $A_{[x/d]}$ diejenige Struktur $A^{'}$, die überall mit A identisch ist, bis auf die Definition von $x^{A^{'}}$. Es sei nämlich $x^{A^{'}} = d$, wobei $d \in U_A = U_{A'}$ — unabhängig davon, ob I_A auf x definiert ist oder nicht.

Beispiel

Es sei P ein zweistelliges Prädikatensymbol, Q ein einstelliges Prädikatensymbol, a eine Konstante, f ein einstelliges Funktionssymbol, und es seien x, y, z Variablen. Eine Struktur, die diesen Symbolen Werte zuordnet, ist *gegeben* durch $A = (U_A, I_A)$ mit $U_A = \{7, 8, 9\}$. Die Interpretationsfunktion I_A ist wie folgt definiert:

$a^A = 7$

$x^A = 8$

$y^A = 9$

$Q^A = \{7, 9\}$

$P^A = \{(7, 8), (7, 9), (8, 9)\}$

$f^A = \{(7, 8), (8, 9), (9, 7)\}$

Beispiel (2)

- Zu bestimmen ist der Wahrheitswert der folgenden Formeln bezüglich *A*:
  1. (Q(a) □ P(a, x)) □ (Q(f(a))   P(a, y))
  2. P(a, y) □ □z P(z, a)
  3. □z (Q(z)   □P(a, z))

Modell, Gültigkeit, Erfüllbarkeit

Falls für eine Formel F und eine zu F passende Struktur $\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A}(F) = 1$, so schreiben wir wieder $\mathcal{A} \models F$.

Sprechweise: F *gilt* in $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{A}$ ist *Modell* für F.

Falls jede zu F passende Struktur ein Modell für F ist, so schreiben wir $\models F$, andernfalls $\not\models F$.

Sprechweise: F ist *(allgemein–)gültig*.

Falls es mindestens ein Modell für die Formel F gibt, so heißt F *erfüllbar*, andernfalls *unerfüllbar*.

Aufgabe

G: Gültig E: Erfüllbar, aber nicht gültig U: Unerfüllbar

	G	E	U
$\forall x P(a)$			
$\exists x(\neg P(x) \vee P(a))$			
$P(a) \rightarrow \exists x P(x)$			
$P(x) \rightarrow \exists x P(x)$			
$\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$			
$\forall x P(x) \wedge \neg \forall y P(y)$			
$\forall x(P(x,x) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y))$			
$\forall x \forall y(x = y \rightarrow f(x) = f(y))$			
$\forall x \forall y(f(x) = f(y) \rightarrow x = y$			
$\exists x \exists y \exists z(f(x) = y \wedge f(x) = z \wedge y \neq z)$			

Noch einmal: Funktionen

- In der Semantik der Prädikatenlogik:
  - Spezifikation von I_A durch: $f^A = \{ (x, y), (y, z), \ldots\}$
  - Schreibweise: $f(x) = y$ (x heißt Argument oder Parameter, y heißt Wert)
- Extensionale Definition problematisch da Tupelmenge potentiell unendlich
- Daher: Angabe der Tupelmenge durch Prädikatenlogische Formel (Beispiel)
  - $f^A = \{ (x, y) \mid y = x + 2 \}$
  - Schreibweise: $f(x) = x + 2$

Prädikate als Boole'sche Funktionen

- Prädikatsnamen bezeichnen Mengen von Tupeln:
  - Struktur $(U_A, .^A)$
  - Beispiel: $U_A = \{u, v, w\}$
  - Beispiel: $P^A = \{ (u, v), (v, w) \}$
- Darstellung von Prädikaten als Funktionen:
  - Beispiel: $P : U_A \times U_A \to B$ $\quad B = \{ 0, 1 \}$
  - $P^A = \{ (u, v, 1), (v, w, 1),$
    $(u, w, 0), (u, u, 0), (v, v, 0), (v, u, 0),$
    $(w, u, 0), (w, v, 0), (w, w, 0) \}$

Prädikatenlogik für „Arithmetik“

- Festlegung des Universums der Struktur
- Definition von Prädikaten mit Hilfe von „eingebauten“, vorausgesetzten Funktionen

Zahlen

N_0	auch: N	unsigned int , cardinal: natürliche Zahlen ab 0
N_1		natürliche Zahlen ab 1
Z		Intg, integer: ganze Zahlen
R		real, float: reelle Zahlen

Operationen auf natürlichen Zahlen

elementare Prädikate

$$= : \mathsf{N}_0 \times \mathsf{N}_0 \longrightarrow \mathsf{B}$$
$$\neq : \mathsf{N}_0 \times \mathsf{N}_0 \longrightarrow \mathsf{B}$$

elementare Operationen

$$+1 : \mathsf{N}_0 \longrightarrow \mathsf{N}_0$$
$$-1 : \mathsf{N}_0 \longrightarrow \mathsf{N}_0$$

Arithmetik

$$+ : \mathsf{N}_0 \times \mathsf{N}_0 \longrightarrow \mathsf{N}_0$$
$$- : \mathsf{N}_0 \times \mathsf{N}_0 \longrightarrow \mathsf{N}_0$$
$$\cdot : \mathsf{N}_0 \times \mathsf{N}_0 \longrightarrow \mathsf{N}_0$$
$$\mathsf{div} : \mathsf{N}_0 \times \mathsf{N}_0 \longrightarrow \mathsf{N}_0$$
$$\mathsf{mod} : \mathsf{N}_0 \times \mathsf{N}_0 \longrightarrow \mathsf{N}_0$$

$+, \cdot$ totale Funktionen

$-, \mathsf{div}, \mathsf{mod}$ partielle Funktionen

Algebraische Axiome für +, *

- Einselemente
- Kommutativität
- Distributivität
- Assoziativität
- ....

- Axiome ermöglichen Umformulierungen von Termen

Weitere „eingebaute" Prädikate

Vergleiche

$$\geq : \mathsf{N}_0 \times \mathsf{N}_0 \longrightarrow \mathsf{B}$$
$$> : \mathsf{N}_0 \times \mathsf{N}_0 \longrightarrow \mathsf{B}$$

$\geq, >$ totale Funktionen

Wie hängen die Funktionen und Prädikate zusammen?

- Festlegung der Eigenschaften durch sog. Axiome
- Aus den durch Axiome festgelegten Eigenschaften sind Folgerungen ($\models$) möglich
- Menge von Axiomen heißt auch "Theorie"
- Üblich: Notation der Axiome als Formeln
- Zusammenhang zwischen "$\rightarrow$" und " $\models$ "

Ungleichungen Rechnen mit Ungleichungen

i, j, k seien ganze Zahlen

Axiome:

transitiv	$i \leq j \wedge j \leq k \quad \rightarrow \quad i \leq k$
reflexiv	$i \leq i$
antisymmetrisch	$i \leq j \wedge j \leq i \quad \rightarrow \quad i = j$
	$i \leq j \wedge 0 \leq k \quad \rightarrow \quad i * k \leq j * k$
transitiv	$i < j \wedge j < k \quad \rightarrow \quad i < k$

Weitere Axiome:

$$\neg(i < i)$$

$$\neg(i < j \land j < i)$$

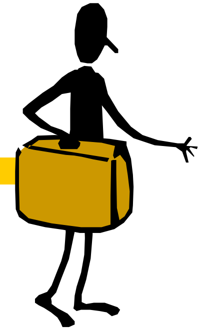
$$i < j \quad \rightarrow \quad i + k < j + k$$

$$i < j \land 0 \leq k \quad \rightarrow \quad i * k \leq j * k$$

$$i < j \land 0 < k \quad \rightarrow \quad i * k < j * k$$

$$i < j \quad \rightarrow \quad i + 1 \leq j$$

Zusammenfassung, Kernpunkte



- Prädikatenlogik
  - Syntax, Formeln
  - Semantik, Belegung, Modell
  - Entscheidungsprobleme
  - Arithmetik in Prädikatenlogik

Folgerung und Äquivalenz

Eine Formel G heißt eine *Folgerung* der Formeln $F_1, \ldots, F_k$ falls für jede Struktur, die sowohl zu $F_1, \ldots, F_k$ als auch zu G passend ist, gilt:

> Wenn $\mathcal{A}$ Modell von $\{F_1, \ldots, F_k\}$ ist, dann ist $\mathcal{A}$ auch Modell von G.

Wir schreiben $F_1, \ldots, F_k \models G$, falls G eine Folgerung von $F_1, \ldots, F_k$ ist.

Zwei Formeln F unf G heißen (*semantisch*) *äquivalent*, falls für alle Strukturen $\mathcal{A}$, die sowohl für F als auch für G passend sind, gilt $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$. Hierfür schreiben wir $F \equiv G$.

Aufgabe

1. $\exists y \forall x P(x,y)$

2. $\forall x \exists y P(x,y)$

	J	N
$1. \models 2.$		
$2. \models 1.$		

Äquivalenzen

Satz:

Seien F und G beliebige Formeln:

1. $\neg\forall xF \equiv \exists x\neg F$

   $\neg\exists xF \equiv \forall x\neg F$

2. Falls x in G nicht frei vorkommt, gilt:

   $(\forall xF \wedge G) \equiv \forall x(F \wedge G)$

   $(\forall xF \vee G) \equiv \forall x(F \vee G)$

   $(\exists xF \wedge G) \equiv \exists x(F \wedge G)$

   $(\exists xF \vee G) \equiv \exists x(F \vee G)$

3. $(\forall xF \wedge \forall xG) \equiv \forall x(F \wedge G)$

   $(\exists xF \vee \exists xG) \equiv \exists x(F \vee G)$

4. $\forall x\forall yF \equiv \forall y\forall xF$

   $\exists x\exists yF \equiv \exists y\exists xF$

Aufgabe

	J	N
$\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$		
$\forall x \exists y F \equiv \exists x \forall y F$		
$\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$		
$\forall x F \vee \forall x G \equiv \forall x (F \vee G)$		
$\forall x F \wedge \forall x G \equiv \forall x (F \wedge G)$		
$\exists x F \vee \exists x G \equiv \exists x (F \vee G)$		
$\exists x F \wedge \exists x G \equiv \exists x (F \wedge G)$		

Beispiel

- Es seien Animal, Vegetarian, Sheep, Cow, und Mad_cow einstellige Prädikatensymbole. Die Symbole EATS und PART_OF seien zweistellige Prädikatensymbole, und es seien x, y, z Variablen. Wir betrachten folgende Menge T von Formeln:
- T := {□x (Sheep(x) □
(Animal(x) □ Vegetarian(x))) ,
□x (Cow(x) □
(Animal(x) □ Vegetarian(x))) ,
□x (Vegetarian(x) □
(□□y (EATS(x,y) □ Animal(y)) □
□y (EATS(x,y) □
(□□z (PART_OF(y,z) □ Animal(z))))) }

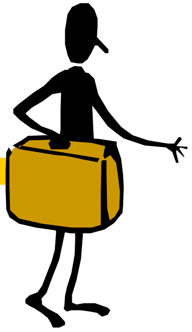
Beispiel (2)

- Annahme: Formeln seien Grundlage für die Spezifikation von Programmen für ein großes Softwareprojekt für das Landwirtschaftsministerium dar.
- Frage: Welche Kühe (eines bestimmten Bestandes, der als Parameter eingeht) sind beim Verzehr gesundheitsgefährdend?
- Hierzu wird folgende Formel verwendet:
  f := □x (Mad_cow(x) □
  (Cow(x) □ □y (EATS (x, y) □
  □z PART_OF(y, z) □ Sheep(z))))

Beispiel (3)

- Zu erstellen: Programm, das die Menge M aller x berechnen soll, für die Mad_cow(x) gilt
- Nach eingehender Beratung mit Ihren Mitarbeitern kommen Sie zu dem Schluß, daß Sie das Projekt, obwohl es lukrativ sein mag, aus Gewissensgründen nicht annehmen werden, da die Menge M immer leer sein wird.
- Sie zeigen, daß die Formel □x Mad_cow(x) unerfüllbar bzgl. $T \cup \{f\}$ ist

Zusammenfassung, Kernpunkte



- Prädikatenlogik
  - Syntax, Formeln
  - Semantik, Belegung, Modell
  - Entscheidungsprobleme
  - Äquivalente Transformation von Formeln
- Anwendungsmotivation:
  - Konzeptuelle Datenmodellierung