Algorithmische Logik / Computational Logic

Ralf Möller, TUHH

- Beim vorigen Mal:
  - Prädikatenlogik: Syntax, Semantik, Entscheidungsprobleme
- Heute:
  - Prädikatenlogik: Algorithmus für Erfüllbarkeitsproblem
- Lernziele:
  - Beweisverfahren für Prädikatenlogik

Danksagung

- Bildmaterial: S. Russell, P. Norvig, Artificial Intelligence: A Modern Approach, Prentice Hall, 1995 (AIMA)
- Präsentationen nach AIMA Kap. 3 sind orientiert an Präsentationen von Jörg Desel, Lehrstuhl für Angewandte Informatik, Katholische Universität Eichstätt

Normalform

Konjunktive und *disjunktive* Normalform (KNF und DNF) sind wie in der Aussagenlogik definiert.

Die Herstellung der Normalformen erfordert zusätzlich die Elimination der Quantoren.

Pränexnormalform

Erster Schritt: Bilden der **Pränexnormalform** einer Formel

Quantorenpräfix + Matrix

$\forall x_1 \, \forall x_2 \, \exists x_3 \, \ldots \, \forall x_n \, (\varphi)$

Erzeugen der Pränexnormalform durch Äquivalenzumformungen:

1. Elimination von $\Leftrightarrow$ und $\Rightarrow$
2. $\neg$ vor die Atome
3. Quantoren nach außen

Beispiel

$$\neg \forall x \, [(\forall x \, P(x)) \Rightarrow Q(x)]$$

$$\neg \forall x \, [\neg (\forall x \, P(x)) \vee Q(x)]$$

$$\exists x \, [(\forall x \, P(x)) \wedge \neg Q(x)]$$

Variablennormalisierung

Variablenumbenennung

Lemma: Sei y eine Variable, die nicht in φ vorkommt.
Dann gilt $\forall x\ \varphi \equiv \forall y\ \varphi[x/y]$ und $\exists x\ \varphi \equiv \exists y\ \varphi[x/y]$.

Variablennormalisierung:

Je zwei Variablen hinter Quantoren
werden durch Variablenumbenennung verschieden gemacht.

Skolemisierung (1)

Elimination von Existenzquantoren

Eine Formel der Form

$$\forall x_1 \ldots x_n \, \exists y \; \varphi$$

Wird ersetzt durch die Formel

$$\forall x_1 \ldots x_n \; \varphi',$$

Wobei φ' aus φ dadurch entsteht, dass in φ jedes freie Vorkommen von y durch $f(x_1 \ldots x_n)$ ersetzt wird.

f ist ein „neues“ n-stelliges Funktionssymbol **(Skolemfunktion)**

Der **Skolemterm** $f(x_1 \ldots x_n)$ repräsentiert ein y,
das zu den gegebenen $x_1 \ldots x_n$ existieren soll,
d.h. ein **Beispiel**.

Skolemisierung (2)

Beispiel: $\forall x\, \exists y\, [P(x) \Rightarrow Q(y)]$

Skolemisierung: $\forall x\, [P(x) \Rightarrow Q(f(x))]$

Skolemnormalform: Skolemisierte Pränexnormalform

Beispiel:

$$\exists x\, ((\forall x\, P(x)) \wedge \neg Q(x))$$

$$\exists y\, ((\forall x\, P(x)) \wedge \neg Q(y))$$

$$\exists y\, (\forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(y)))$$

$$\forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(f))$$

Satz: Zu jeder geschlossenen Formel φ kann ihre Skolemnormalform effektiv berechnet werden.

Skolemisierung (3)

Die Skolemisierung ist keine äquivalente Umformung,
d.h. sie ist nicht modellerhaltend.

Satz: Eine Formel ist genau dann erfüllbar bzw. unerfüllbar, wenn ihre Skolemnormalform erfüllbar bzw. unerfüllbar ist.

Wenn wir mit einem negativen (Test-) Kalkül arbeiten,
also den Nachweis der Unerfüllbarkeit von Formeln anstreben,
können statt allgemeiner prädikatenlogischer Formeln deren Skolemnormalformen verwendet werden.

Erzeugen der Klauselformel

Eine prädikatenlogische Formel wird durch folgende Transformationsschritte in **Klauselform** gebracht:

- $\Leftrightarrow$ und $\Rightarrow$ eliminieren
- $\neg$ vor die Atome bringen
- gebundene Variablen umbenennen
- Herstellen der Pränexnormalform
- Skolemisierung
- Matrix in konjunktive Normalform bringen
- Allquantoren entfernen
- Überführen in Mengenschreibweise

Beispiel

$$[\exists x \; \neg P(x) \vee \forall x \; Q(x)] \Rightarrow \forall x \; R(x)$$

$\Rightarrow$ eliminieren

$$\neg[\exists x \; \neg P(x) \vee \forall x \; Q(x)] \vee \forall x \; R(x)$$

$\neg$ vor die Atome

$$[\neg\exists x \; \neg P(x) \wedge \neg\forall x \; Q(x)] \vee \forall x \; R(x)$$

$$[\forall x \; P(x) \wedge \exists x \; \neg Q(x)] \vee \forall x \; R(x)$$

Variablen umbenennen

$$[\forall x \; P(x) \wedge \exists y \; \neg Q(y)] \vee \forall z \; R(z)$$

Pränexnormalform

Beispiel (2)

Pränexnormalform

$$\forall x \;\exists y \;\forall z[(P(x) \land \neg Q(y)) \lor R(z)]$$

Skolemisierung

$$\forall x, z \;[(P(x) \land \neg Q(f(x))) \lor R(z)]$$

Matrix in KNF

$$\forall x, z \;[(P(x) \lor R(z)) \land (\neg Q(f(x)) \lor R(z))]$$

Quantoren eliminieren, Klauselform

$$\{\{P(x), R(z)\}, \{\neg Q(f(x)), R(z)\}\}$$

Resolution (1)

Voraussetzung: Klauselform

Beispiel:

$\{\neg P\,(x, f\,(y))\} \quad \{P\,(z, f\,(g\,(z)))\}$

Wann ergibt sich ein Widerspruch?

Aus dieser Klauselmenge kann nur dann die leere Klausel abgeleitet werden, wenn die beiden Atome $P\,(x, f\,(y))$ und $P\,(z, f\,(g(z)))$ identifiziert werden.

Substitution: Ersetzung der Variablen durch Terme,
so dass beide Atome gleich werden.

Beispiel: ersetze y durch $g\,(z)$
ersetze x durch z

Substitution

$\sigma = [x_1/t_1, x_2/t_2, ..., x_n/t_n]$ ist eine Substitution

(ersetze x_1 durch t_1, x_2 durch t_2, ..., x_n durch t_n).

Für eine atomare Formel α ist
$\sigma\alpha$ die Anwendung der Substitution σ auf α,
die alle Vorkommen der Variablen x_i in α durch die
entsprechenden t_i ersetzt.

Beispiel:

$$\varphi = P(f(x), y)$$

$$\sigma = [x/z, y/f(z)]$$

$$\sigma\varphi = P(f(z), f(z))$$

Unifikation (1)

Unifikator zweier atomarer Formeln α_1 und α_2:

Substitution σ, die α_1 und α_2 **unifiziert** (gleich macht),
d.h. es soll gelten: $\sigma\alpha_1 = \sigma\alpha_2$.

Allgemeinster Unifikator σ (engl. *most general unifier, mgu*):

alle anderen Unifikatoren ergeben sich durch
Instantiierung der Variablen in σ, d.h.:

Zu jedem Unifikator σ' gibt es eine Substitution τ mit

$$\sigma'\alpha_1 = \tau(\sigma\alpha_1) = \tau(\sigma\alpha_2) = \sigma'\alpha_2.$$

Satz:
Für je zwei Ausdrücke gibt es, bis auf Variablenumbenennung,
höchstens einen allgemeinsten Unifikator.

Unifikation (2)

Beispiel:

Unifikation der Atome $Q\,(f\,(x), v, b)$ und $Q\,(f\,(a), g\,(u), y)$ durch die beiden Substitutionen

$$\sigma = [x/a, v/g(u), y/b]$$

$$\sigma' = [x/a, v/g(c), u/c, y/b]$$

σ ist allgemeinster Unifaktor.

Beachte:

Die Terme x und $f\,(x)$ sind **nicht** unifizierbar (**occur-check**)

Die Terme $f\,(x)$ und $g(x)$ sind nicht unifizierbar.

Unifikation (3)

Algorithmus zur Berechnung des mgu für eine Menge von Atomen $\{\alpha_i\}$.

$\sigma = [\ ]$.

LOOP **IF** alle $\sigma\alpha_i$ identisch **THEN**

RETURN σ (ein mgu)

Bilde Unterscheidungsmenge (engl. Disagreement Set, DS),

Bsp.: $DS\,(\{P\,(c, f\,(c, g(z), \ldots))\ \ldots\ P\,(c, f\,(c, u, \ldots))\} = \{g(z), u\}$

Wähle Variable $x \in DS$ und Term $t \in DS$, der x nicht enthält

IF dies nicht möglich ist **THEN**

RETURN *failure* ($\{\alpha_i\}$ nicht unifizierbar)

Ergänze σ um $[x/t]$

ENDLOOP

Beispiele

Sind folgende Atome unifizierbar?

$P(x)$ und $Q(y)$

$P(x, y)$ und $P(z)$

$P(x, y)$ und $P(a, f(a))$

$P(x, y)$ und $P(f(\mathrm{z}), g(z))$

$P(x, f(y))$ und $P(\mathrm{z}, f(g(z))$

$P(x, x)$ und $P(f(y), f(g(z))$

$P(x, f(x))$ und $P(y, y)$

$P(x, a)$ und $P(b, x)$

$P(x, f(x, x), z, f(z, z))$ und $P(f(a, a), y, f(y, y), u)$

Resolution (2)

$$\frac{C_1 \cup \{l\}, C_2 \cup \{\bar{l}\}}{\sigma(C_1 \cup C_2)}$$

$C_1 \cup \{l\}$ und $C_2 \cup \{\bar{l}\}$ sind variablendisjunkt und σ ist ein allgemeinster Unifikator für l und $\bar{l}$, d.h. $\sigma l = \sigma \bar{l}$

Beispiel: $\{\{P(x), P(f(y)), Q(g(x))\}, \{R(f(z)), \neg P(f(z))\}\}$,

$$\sigma = [x/f(v), y/v, z/v]$$

$$\{Q(g(f(v))), R(f(v))\}$$

Satz:
Eine prädikatenlogische Klauselmenge Δ ist unerfüllbar gdw. im prädikatenlogischen Resolutionskalkül die leere Klausel aus Δ abgeleitet werden kann

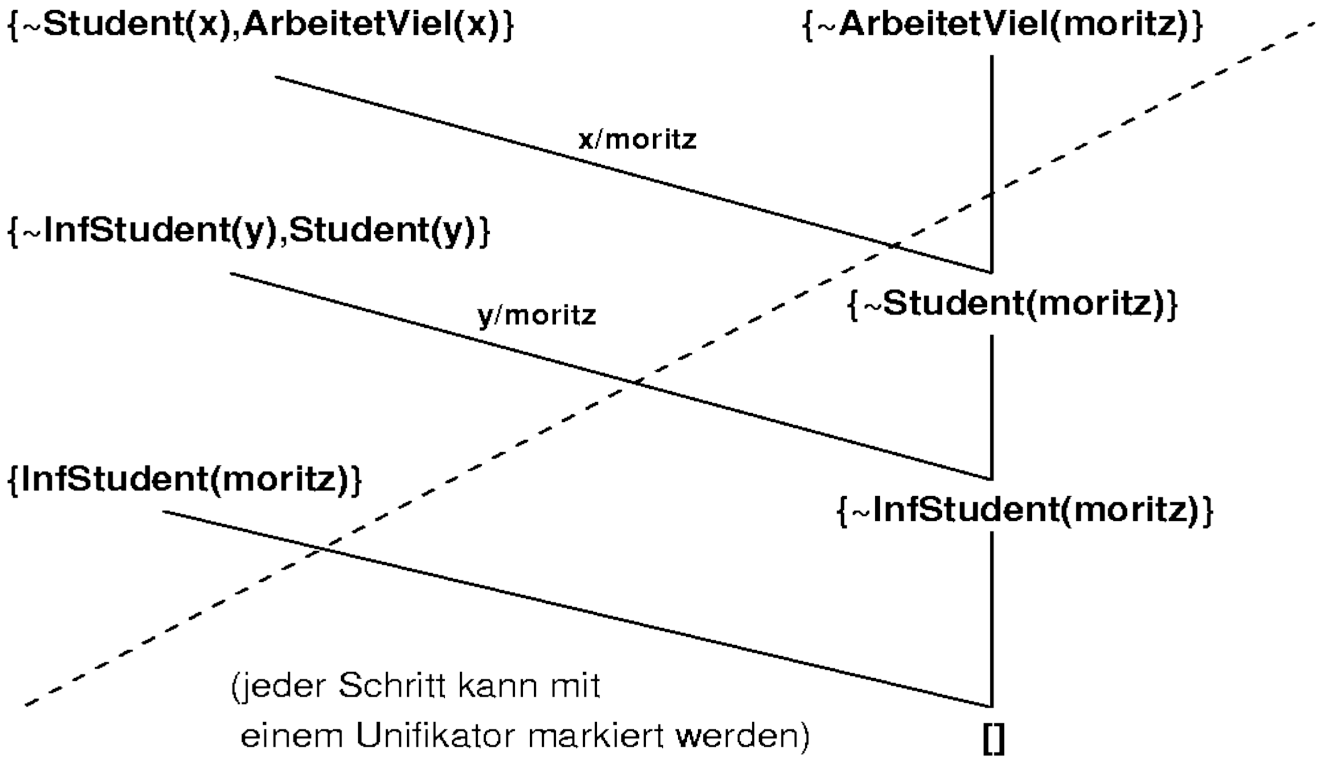
Beispiel 1

WB:

$$\forall x\ (InfStudent(x) \Rightarrow Student(x))$$
$$\forall x\ (Student(x) \Rightarrow ArbeitetViel(x))$$
$$InfStudent(moritz)$$

Frage:

$$ArbeitetViel(moritz)$$



Beispiel 2

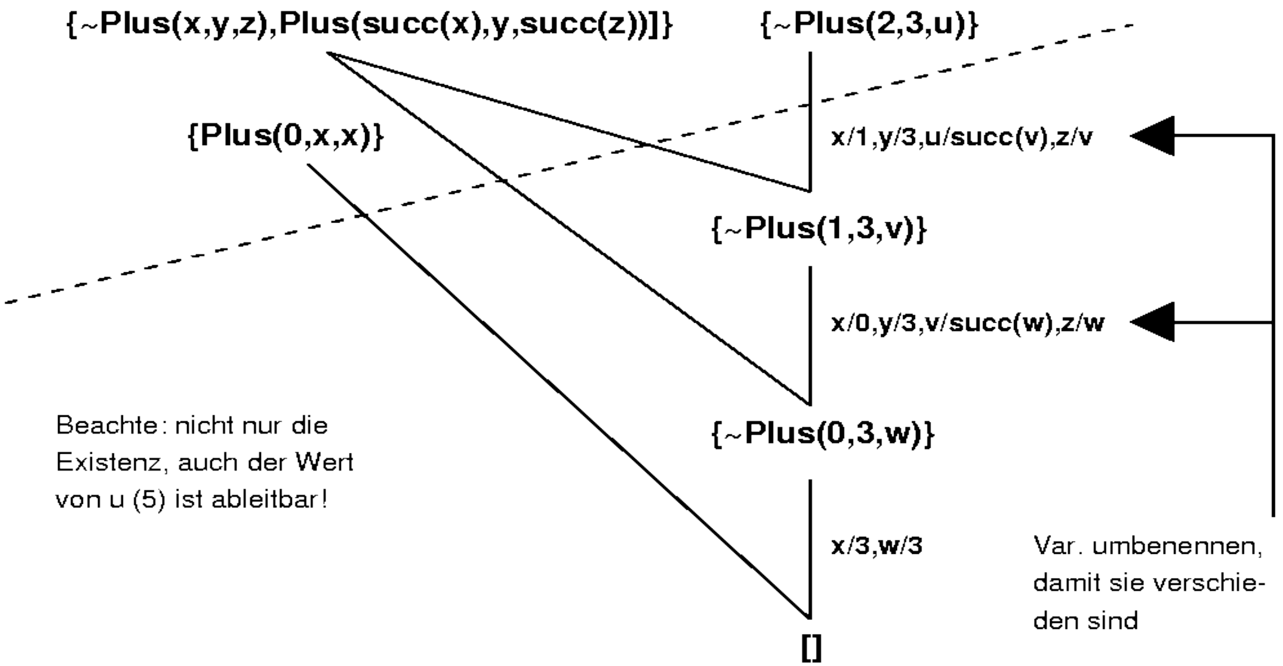
WB:

$$\forall x \; [Plus(null, x, x)]$$
$$\forall x, y, z \; [Plus(x, y, z) \Rightarrow Plus(succ(x), y, succ(z))]$$

Frage:

$$\exists u \; Plus(2, 3, u)$$

wobei wir der besseren Lesbarkeit wegen schreiben:
0 statt $null$, 2 statt $succ(succ(null))$ usw.



Faktorisierung (1)

- Annahme: Ein Barbier rasiert Männer genau dann, wenn sie sich nicht selber rasieren.
- Behauptung 1: Der Barbier rasiert sich selbst
- Behauptung 2: Der Barbier rasiert sich nicht selbst

Faktorisierung (2)

Faktorisierung: Verfeinerung der Resolutionsregel

Verschmelzung der Literale in den Elternklauseln durch Anwendung einer geeigneten Substitution, bevor die Resolvente erzeugt wird.

Faktorisierungsregel:

$\sigma' = [x/barbier]$
$$\frac{\{\neg Rasiert(barbier, x), \neg Rasiert(x, x)\}}{F1: \{\neg Rasiert(barbier, barbier)\}}$$

$\sigma'' = [y/barbier]$
$$\frac{\{Rasiert(y, y), Rasiert(barbier, y)\}}{F2: \{Rasiert(barbier, barbier)\}}$$

Aus $F1$ und $F2$ kann die leere Klausel abgeleitet werden.

Generierung von Antworten (ask)

Gegeben sei ein Resolutionsbeweis für $\exists x \; P(x)$,
d.h. für gewisse Werte von x ist die Formel unerfüllbar.

Wie sieht „*Beispiel*“ für x aus, so dass Formel unerfüllbar?

Statt die verwendeten Unifikatoren durchzusuchen,
können **Antwortprädikate** verwendet werden.

Sie akkumulieren die während des Beweises konstruierte
Substitution für x.

Das Antwortprädikat A kommt in der Signatur noch nicht vor.

- Ersetze die Formel $\exists x \; P(x)$ durch $\exists x \, [P(x) \wedge \neg A(x)]$.

- Der Resolutionsbeweis erzeugt statt _ eine Klausel, die nur das Antwortprädikat enthält.

Beispiel 3

WB:

$$Bruder(moritz, max),\ Bruder(moritz, fritz)\ \ldots$$
$$Gross(max),\ Gross(fritz)\ \ldots$$

Frage:

$$\exists x\ [Bruder(moritz, x) \wedge Gross(x)]$$

{Bruder(moritz,max)} {~Bruder(moritz,x), ~Gross(x), A(x)}

{Gross(max)}

x/max

{~Gross(max), A(max)}

{A(max)}

Behandlung von = bei der Resolution

- Über Unifikation ...

Zusammenfassung

- Algorithmus für Erfüllbarkeit: Resolution