Semantische Integration durch Reinterpretation
Ein formales Modell

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Dr. rer. nat.
an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
der Universität Hamburg

eingereicht beim Department Informatik von

Özgür Lütfü Özçep

aus Hamburg

Hamburg 2009

Genehmigt von der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Department Informatik der Universität Hamburg

auf Antrag von
Prof. Dr. Christopher Habel (Erstgutachter/Doktorvater)
Prof. Dr. Rüdiger Valk (Zweitgutachter)

Hamburg, den 16.12.09 (Tag der Disputation)

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein formales Modell für die semantische Integration von heterogenen Wissensquellen entwickelt, das auf dem Prinzip der Reinterpretation basiert. Während der Integration entstehende Konflikte werden durch eine konservative Neuinterpretation der im Konflikt enthaltenen Symbole aufgelöst; Hypothesen über semantische Beziehungen zwischen der alten und der neuen Lesart der Konfliktsymbole sind im Integrationsresultat enthalten.

Das formale Modell fokussiert auf ein einfaches Integrationsszenario, in dem zwei Ontologien (Empfänger- und Senderontologie), die sich in der Praxis bewährt haben und verwandte Terminologien besitzen, integriert werden. Mögliche Konflikte zwischen den Ontologien sollen durch die Ambiguität in der öffentlichen Sprache erklärbar sein; dieser Konflikttyp entsteht durch unterschiedliche Lesarten für dasselbe Symbol in den unterschiedlichen Ontologien.

Den Grundideen der Belief-Revision folgend lassen sich für das zu Grunde gelegte Integrationsszenario Adäquatheitskriterien angeben, die axiomatisch durch Postulate formalisiert werden können. Es wird gezeigt, dass es in Form von Reinterpretationsoperatoren konkrete Integrationsverfahren gibt, die (Unterklassen von) den Adäquatheitskriterien genügen.

Für Reinterpretationsoperatoren erfolgt eine andere Konfliktdiagnose als für Belief-Revisionsfunktionen; dennoch können Reinterpretationsoperatoren als Belief-Revisionsfunktionen dargestellt werden, sofern nicht die zu integrierenden Ontologien als Gegenstand einer Veränderung angesehen werden, sondern die in der Reinterpretation gebildeten Hypothesen über die semantischen Beziehungen der verschiedenen Lesarten von ambigen Symbolen.

Aus zwei inkompatiblen Postulatsklassen zum intendierten Integrationsszenario resultieren zwei Klassen von Reinterpretationsoperatoren, Typ-1- und Typ-2-Operatoren. Typ-1-Operatoren halten an der Terminologie der Empfängerontologie fest, Typ-2-Operatoren führen zu einer Adaption an die Terminologie der Senderontologie. Durch die Wahl von verschieden starken Hypothesen über die semantischen Beziehungen der disambiguierten Symbole in den Ontologien können für beide Typen verschieden starke Reinterpretationsoperatoren definiert werden; indem Aspekte zur Konservativität und minimalen Änderung betrachtet werden, können deren Unterschiede durch Postulate beschrieben werden.

Die wiederholte Anwendung von Reinterpretationsoperatoren kann für eine sequenzielle Integration von Ontologien genutzt werden. Die sequenzielle und die einschrittige Integration einer Ontologie mittels Reinterpretationsoperatoren erweisen sich als zwei verschiedene nicht aufeinander reduzierbare Ansätze. Eine eingehendere Analyse der sequenziellen Integration mittels Stabilität fördert weitere Unterschiede zwischen starken und schwachen Operatoren (des Typs 2) hervor; schwache Operatoren sind stabil, können dafür zu einer vergesslichen Adaption an

die Terminologie der Senderontologie führen, infolge der Bezüge zu ursprünglichen Konzepten der Empfängerontologie verloren gehen. Starke Operatoren führen zu einer weniger radikalen Adaption, sind dafür aber instabil.

Abstract

This work presents a formal model for integrating heterogeneous knowledge sources which relies on the principle of reinterpretation. Conflicts occurring in the integration are resolved with a conservative strategy in which symbols involved in a conflict get a new interpretation; the result contains hypothesis on the semantical relatedness of the different readings of the conflict symbols.

The formal model focusses on a simple integration scenario according to which two well proven ontologies (receiver's and sender's ontology) with similar terminologies have to be integrated. Conflicts can be explained by ambiguities in the public (common) language. This kind of conflict is caused by different readings of the same common symbol in different ontologies.

Following the main ideas of belief revision, one can formalize adequacy criteria for the intended integration scenario by postulates. It can be shown that (subclasses of) the adequacy criteria are operationalizable by reinterpretation operators.

Reinterpretation operators are based on a conflict diagnosis that is different from the conflict diagnosis for belief-revision functions. But reinterpretation operators can be represented as belief-revision functions if one considers not the ontologies to be the object of revision but the set of hypothesis on the semantical relatedness of different readings of ambiguous symbols.

Two incompatible subsets of the integration postulates are operationalized by two reinterpretation operators, type-1 and type-2 operators. Type-1 operators preserve the terminology of the receiver's ontology, type-2 operators adapt to the terminology of the sender's ontology. By choosing different sets of initial hypothesis on the semantical relatedness of ambiguous symbols operators of different strength can be defined. Differences between operators of different strength can be characterized by postulates that describe aspects of conservativity and minimality.

Iterated applications of reinterpretation operators can be used for a sequentialized integration of ontologies. One-step integration and sequential integration by reinterpretation operators are not reducible to each other. Considering the stability of iterated reinterpretation operators results in additional differences in the set of reinterpretation operators (of type 2) with different strength. Weak operators are stable but may result in an amnesic adaption to the terminology—thereby loosing connections to concepts of the receiver's ontology. Strong operators realize a less radical adaption but are instable.

Danksagung

Für die intensive Betreuung während der Erstellung meiner Dissertation möchte ich herzlichst Prof. Dr. Christopher Habel und Dr. Carola Eschenbach danken. Ebenfalls möchte ich ganz herzlichst Prof. Dr. Rüdiger Valk danken, der sich auf Anhieb bereit erklärt hatte, das zweite Gutachten zu verfassen. Ein großes Dankeschön auch an Hildegard Westermann für ihre zahlreichen ermunternden Worte.

Ohne die moralische Unterstützung meiner Geschwister Özlem und Serdar, meiner Schwiegereltern Hatice und Hasan Çınar und ganz besonders meiner Eltern Kadriye und Namık Özçep sowie meiner Frau Emel wäre diese Arbeit nicht zustande gekommen. Sizlere ne kadar teşekkür etsem yetmez. Hepinize minnettarım!

Für Emel

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Einordnung und Gegenstand der Arbeit

Die Kommunikation zwischen Menschen erweist sich in vieler Hinsicht als ein robuster Prozess, in dem normalerweise ein geeigneter Informationsaustausch möglich wird. Obwohl natürlichsprachliche Phänomene wie Vagheit, Ambiguität, Ellipsen etc. die Kommunikation unter Umständen erschweren können, werden die dadurch bedingten Kommunikationsprobleme in vielen Fällen nicht durch Nachfragen in einem Metadialog, der den eigentlichen Dialog unterbricht, sondern intern behandelt.

Viele der in einer Kommunikation auftretenden Probleme eines Kommunikationspartners (z.B. Missverständnisse) können als ein Konflikt zwischen der neu erworbenen Information vom anderen Kommunikationspartner und dem vorhandenen Wissen verstanden werden. Ein weit verbreiteter Konflikttyp zeigt sich im mehrdeutigen Gebrauch eines Ausdrucks durch zwei oder mehr Kommunikationspartner (Ambiguitätskonflikt). Ein Beispiel ist der unterschiedliche Gebrauch des Ausdrucks „Student“. Eine Person könnte hierunter die Gesamtheit aller an einer Hochschule eingeschriebenen männlichen Personen verstehen. Eine zweite Person, ihr Gesprächspartner, könnte im Gespräch mit ihr „Student“ in einem weiteren Sinne verwenden; er bezeichnet auch weibliche Personen, die an einer Hochschule eingeschrieben sind, als Student. Die erste Person könnte auf diese unterschiedlichen Lesarten stoßen, wenn sie ihren Gesprächspartner nach dem Beruf seiner Freundin Marina fragte und „Student“ als Antwort bekäme. Die Aussage „Marina ist Student“ würde mit ihrem Wissen, dass Marina eine weibliche Person ist und Studenten gemäß ihrem Verständnis nur männlich sein können, konfligieren. Statt das Gespräch zu unterbrechen und nachzufragen, kann die erste Person zur begründeten Erkenntnis gelangen, dass ihr Gesprächspartner den Ausdruck „Student“ in einem anderen Sinn verwendet und folgende Informationen, die ihr ihr Gesprächspartner kommuniziert, unter dieser neu gewonnenen Erkenntnis auswerten. Ist die erste Person davon überzeugt, dass ihre Lesart von „Student“ nur wenig von der Lesart des Gesprächspartners abweicht, wird sie als zusätzliche Erkenntnis eine semantische Beziehung zwischen ihrem Studentenbegriff und dem Studentenbegriff ihres Gesprächspartners gewinnen: Alle Studenten in ihrem Sinne sind auch Studenten im Sinne ihres Gesprächspartners, aber nicht umgekehrt.

Eine genaue Analyse des im obigen Beispiel genannten Mechanismus zur Konfliktauflösung von Ambiguitäten und seine formale Modellierung würde dazu beitragen, ein theoretisches Fundament für die Konstruktion von miteinander kommunizierenden, künstlichen Agenten bereitzustellen. Denn die in der Kommunikation entstehenden Konflikte sind nicht ein spezifisch menschliches Problem, sondern können in jedem System von kommunizierenden, rationalen (intelligenten) Agenten auftreten. Die in künstlichen Agenten (s.u.) gespeicherte Information kann durch formale Wissensbasen beschrieben werden, welche die Agenten während des Kommunikationsprozess im Rahmen einer Tell-Ask-Architektur[1] nutzen können; der Wissensbasis werden durch Tell-Aktionen neue Informationen hinzugefügt, durch Ask-Aktionen werden Informationen aus der Wissensbasis abgefragt. Obwohl für die Repräsentation von Information in einer deklarativen Wissensbasis formale Sprachen benutzt werden, in denen natürlichsprachliche Phänomene wie die Ambiguität vermieden werden sollen, müssen im Falle von künstlichen Agenten, die autonom agieren und robust sein sollen, (Ambiguitäts-)Konflikte in der Kommunikation behandelt werden; diese Forderung gilt insbesondere dann, wenn zwischen den kommunizierenden Agenten kein Abgleich der Terminologien erfolgt, der der eigentlichen Kommunikation vorangestellt wird. Der Grund für die Entstehung von (Ambiguitäts-)Konflikten in der Kommunikation von künstlichen Agenten ist, dass die Wissensbasen der Agenten von ihren Entwicklern mit einer intendierten Bedeutung für die dort verwendeten Symbole erstellt werden; wenn die intendierten Bedeutungen von Symbolen in zwei verschiedenen Wissensbasen unterschiedlich sind, können (Ambiguitäts-)Konflikte resultieren.

Die Beschreibung, Analyse und formale sowie technische Konstruktion von rationalen (künstlichen) Agenten ist eines der zentralen Themen in der Wissensrepräsentation, (allgemeiner) der Künstlichen Intelligenz und im Bereich verteilter Systeme, in dem (vornehmlich) Multiagentensysteme betrachtet werden.

[1] Levesque (1984)

In der Literatur existieren verschiedene Begriffe von (intelligenten) Agenten.[2] Eine allgemeine Kennzeichnung von Agenten, die den Kern des Agentenbegriffs in der Literatur zur Künstlichen Intelligenz und zu verteilten Systemen (Multiagenten) erfasst, geben Wooldridge und Jennings (1995). Sie beschreiben *Agenten* als Systeme, die in einer Umgebung situiert sind und in dieser Umgebung autonom agieren können, um bestimmte Ziele zu erreichen.

In der künstlichen Intelligenz interessiert man sich im Allgemeinen nicht für beliebige Agenten[3], sondern für intelligente, rationale Agenten. *Rationale Agenten* treffen angesichts des verfügbaren Wissens und der aus der Umgebung erhaltenen Informationen rationale, begründete Entscheidungen, um bestimmten Ziele zu erreichen. Dabei agieren die Agenten *autonom*, d.h. sind nicht von außen kontrolliert, sondern handeln allein auf der Basis des in ihnen verfügbaren Wissens und der verfügbaren wissensverarbeitenden Mechanismen. Als wesentliche Kennzeichen des intelligenten oder rationalen Verhaltens werden in der Literatur[4] die *Reaktivität*, also die Fähigkeit, auf Änderungen der Umgebung zu reagieren und in angemessener Zeit auf diese zu reagieren, die *Proaktivität*, d.h. die Zielgerichtetheit der Agenten, und vornehmlich in Multiagentensystemen die *Interaktionsfähigkeit*, also die Fähigkeit, mit anderen Agenten zu kommunizieren und zu agieren (kooperieren), genannt. Die Wahrnehmung seiner Umgebung und die Interaktion eines Agenten mit seiner Umgebung beschränkt sich in dieser Arbeit auf die Kommunikation mit Agenten.

Ein für die Programmierung eines künstlichen, kommunikationsfähigen Agenten wesentliches Konzept ist das des inneren Zustands. Ein Agent kann sich in einem von (endlich) vielen inneren Zuständen befinden. Dieser wird häufig auch als Glaubenszustand des Agenten beschrieben.[5] Abhängig von seinem inneren Zustand, in dem er erworbenes Wissen, Erfahrungen etc. speichert, und aktuellen Botschaften, die er von anderen Agenten erhält, kann der Agent auf die Botschaften reagieren, indem er bestimmte Aktionen ausführt oder seinerseits Botschaften sendet; er befindet sich danach in einem neuen inneren Zustand, dem Nachfolgezustand.

Die in der aktuellen Literatur zur Wissensrepräsentation benutzten Begriffe eines rationalen Agenten orientieren sich im Kern an der Beschreibung dessen, was

[2]Franklin und Graesser (1996)

[3]Auch Thermostaten können als Agenten verstanden werden.

[4]Vgl. Weiss (1999), Wooldridge (2002)

[5]In der BDI-Architektur für künstliche Agenten (Bratman, 1987; Rao und Georgeff, 1991) wird eine differenziertere Zuschreibung von mentalen Zuständen vorgenommen, die durch die Angabe von Glaubenszuständen (beliefs), Wünschen (desires) und Intentionen (intentions) eines Agenten erfolgt. Die BDI-Architektur wird hier nicht weiter besprochen, da das Integrationsproblem, das in dieser Arbeit angegangen wird, keine derart feine Architektur des Agenten voraussetzt.

das rationale Verhalten eines Agenten auszeichnet; eine in der Beschreibung wichtige Komponente ist die Zuschreibung von Glaubenszuständen, Zielen und von Wissen. Nur in Abhängigkeit davon, was ein Agent glaubt, welche Ziele er hat und was er weiß, kann beurteilt werden, inwiefern die durch den Agenten gewählten Aktionen die besten (und insofern rational) waren, um sein Ziel zu erreichen. Newell (1982) hat diese Perspektive auf Agenten im Wesentlichen mitgeprägt, indem er für die Einführung eines Wissenslevels (knowledge level) plädiert hat. Auf dem Wissenslevel finden die wissensverarbeitenden Prozesse statt. Gegenstand des wissensverarbeitenden Prozesses ist das Wissen, das einem Agenten zugeschrieben wird. Newell beschreibt das einem Agenten zugeschriebene Wissen funktional als diejenige Komponente auf dem Wissenslevel, mit der sich das rationale Verhalten eines Agenten erklären lässt. Konkret lässt sich das Wissen eines Agenten Newell gemäß durch dessen prozedurale Fähigkeiten (wie z.B. Schlussmechanismen) und durch das Faktenwissen, gesammelt in einer Wissensbasis[6], beschreiben.

Mit dem Wissen eines Agenten werden bestimmte Elemente seiner Umgebung (Gegenstände, Beziehungen, Konzepte) repräsentiert, während andere ausgelassen werden. Die Repräsentationssituation lässt sich Palmer (1978) gemäß durch eine (eventuell) partielle Funktion $\rho : \mathcal{W}_1 \longrightarrow \mathcal{W}_2$ beschreiben, in der $\mathcal{W}_1$ für die repräsentierte Welt (das Repräsentandum) und $\mathcal{W}_2$ für die repräsentierende Welt steht; ρ wird auch als Repräsentationsabbildung bezeichnet. Die Repräsentationsabbildung soll für eine Anwendung relevante Gegenstände und Beziehungen in $\mathcal{W}_1$ strukturerhaltend nach $\mathcal{W}_2$ abbilden.[7]

Das Wissen eines Agenten wird in einem bestimmten Format repräsentiert. Als Repräsentationsformat haben sich logische Sprachen bewährt; diese ermöglichen es, das inhaltliche und prozedurale Wissen des Agenten zu entkoppeln. Das inhaltliche Wissen in einer Wissensbasis wird deklarativ in Form von Sätzen einer logischen Sprache formuliert. In der Syntax werden wohlgeformte Zeichenketten (Sätze) definiert, die den Träger für das inhaltliche Wissen bilden. Die genaue Bedeutung der Sätze, ihre intendierte Bedeutung, wird durch die Semantik für die logische Sprache festgelegt. Das prozedurale Wissen bilden in der logischsymbolischen Repräsentation von Agenten Schlussmechanismen über der logischen Sprache. Da Logiken eine formale Semantik zur Verfügung stellen, können Konflikte innerhalb einer Wissensbasis bzw. zwischen der Wissensbasis eines Agenten und neu erworbener Information formal durch Erfüllbarkeits- bzw. Konsistenzkonzepte erfasst werden. Korrekte Schlussmechanismen bieten die Möglichkeit, die Konsistenz von Wissensbasen zu testen und sind daher ein probates Mittel, das Vorliegen eines Konflikts zu registrieren. Auch in dieser Arbeit werde ich mir

[6] Newell spricht von verschiedenen „bodies of knowledge“ (Newell, 1982, S. 7).

[7] Für die Beschreibung von internen Modellen von kognitiven Agenten bietet sich eine Erweiterung des Schemas um Metarepräsentationen gemäß Habel (1996) an.

die Vorteile einer formallogischen Repräsentation zu Nutze machen. In Anhang A werden die hierfür nötigen Grundlagen beschrieben.

Formallogische Sprachen sind derart ausgelegt, dass linguistische Phänomene wie Vagheit, Ellipsen etc., die in natürlichen Sprachen vorkommen, vermieden werden. Insbesondere werden bei formallogischen Repräsentationen von Agentenwissen agenteninterne Ambiguitäten ausgeschlossen. Wie bereits oben angedeutet und jetzt genauer ausgeführt wird, können jedoch Ambiguitätskonflikte zwischen kommunizierenden künstlichen Agenten auftreten, wenn ihre Wissensbasen in folgendem Sinne heterogen sind: Es kommen gleich lautende, in der Kommunikation verwendete Ausdrücke vor, die in den Wissensbasen der Agenten unterschiedliche intendierte Bedeutungen haben. Ich spreche zur Unterscheidung von agenteninternen Ambiguitäten auch von *Ambiguitäten in der öffentlichen Sprache* und *Ambiguitätskonflikten in der öffentlichen Sprache*.

Das Problem der Ambiguität in der öffentlichen Sprache ist nicht auf eine laxe Spezifikation der Kommunikationssprache zurückzuführen; in der Literatur werden verschiedene Sprachen und Protokolle beschrieben, die die Kommunikation zwischen Agenten formal spezifizieren.[8] Doch mit einer formalen Spezifikation einer Agentenkommunikationssprache wird die Ambiguitätsproblematik nicht gelöst, da hierfür auch die Sprache, in der Agenten Informationen kommunizieren (in der ACL die so genannte „content language“), disambiguiert werden müsste. Im Zusammenhang mit der „content language“ wird die Rolle von Ontologien (s.u.) als eine wichtige Säule in der Kommunikation von Agenten hervorgehoben.[9] Die zur Repräsentation von Ontologien verwendeten Sprachen wie KIF (Knowledge Interchange Format)[10] wurden als geeignete content languages für die Agentenkommunikation in Betracht gezogen.

Auch wenn die Domäne, über die sich zwei Agenten unterhalten, eng eingegrenzt ist, ist eine Festlegung von Symbolen auf die eine oder andere Lesart entweder nicht machbar oder nicht wünschenswert. Wird ein offenes System von kommunizierenden Agenten gestattet, ist die Anzahl möglicher Lesarten nicht im Voraus gegeben. Erst wenn mehrere Agenten konkret in einen Kommunikationsprozess eintreten, können die verschiedenen Lesarten eines in der öffentlichen Sprache ambigen Symbols von den Agenten registriert und lokal mit ihrer eigenen Lesart verglichen und semantisch verknüpft werden. Auch ist eine vorherige Festlegung der Bedeutung von Symbolen auf eine Lesart als die einzige und richtige Lesart des Symbols, an die sich alle Agenten halten müssen, in vielen Fäl-

[8] Ein Beispiel sind die Spezifikationen der Foundation for Intelligent Physical Agents (FIPA), die unter dem Sammelterm FIPA-ACL (Agent Communication language) veröffentlicht werden, `http://www.fipa.org/repository/aclspecs.html`. Labrou et al. (1999) geben einen Überblick zu ACL-Sprachen.

[9] Vgl. Erdur und Dikenelli (2002).

[10] Genesereth und Fikes (1992)

len nicht zu begründen, da keine Lesart sich gegenüber der anderen auszeichnet. Die Möglichkeit verschiedener Konzeptualisierungen (verschiedener Ontologien) von miteinander kommunizierender Agenten wird auch in den Spezifikationen der FIPA-ACL berücksichtigt; die „Ontology Service Specification" der FIPA[11] beschreibt eine Metaontologie, in der festgelegt ist, wie Agenten über ihre lokalen Ontologien miteinander kommunizieren können.

In der *ontologiebasierten semantischen Integration*[12] werden Konflikte, die auf die Heterogenität von Wissensbasen zurückgeführt werden können, untersucht. Die semantische Integration beschäftigt sich allgemein mit der Integration von und dem Informationsaustausch zwischen heterogenen Wissensbasen (s. Abschnitt 2.3). Eine Vielfalt von heterogenen Wissensbasen findet sich in offenen Domänen wie dem World Wide Web.

Konflikte wie z.B. Ambiguitätskonflikte bilden ein Hindernis für die Interoperabilität zwischen verschiedenen Gemeinschaften (Agenten) mit heterogenen Wissensbasen. In der semantischen Integration werden Ontologien (im informatischen Sinne) und semantische Abbildungen als ein adäquates Mittel zur Interoperabilität angesehen. Eine *Ontologie* (im informatischen Sinne) spezifiziert formal diejenigen Konzepte, Gegenstände und Relationen sowie deren Beziehungen zueinander, die für eine Domäne und eine informatische Anwendung für diese Domäne als relevant angesehen werden. Der Austausch von Informationen zwischen Gemeinschaften (Agenten) mit heterogenen Wissensbasen kann dadurch vereinfacht werden, dass sich die Gemeinschaften (Agenten) auf die Nutzung derselben Ontologie verpflichten.

Auch in der Vision des semantisch angereicherten World Wide Webs (Semantic Web) von Berners-Lee und Kollegen (Berners-Lee et al., 2001) haben Ontologien eine Schlüsselrolle. Sie können z.B. Websuchfunktionen erweitern, so dass die Suche nicht mehr an Schlüsselwörtern orientiert ist, die möglicherweise ambig sind, sondern auf Konzepten basiert. Vor allen Dingen aber sollen Ontologien künstlichen Softwareagenten die Möglichkeit geben, Informationen auf einer Webseite zu „verstehen"; ein Softwareagenten sollte dann in der Lage sein, von semantisch annotierten Webseiten mittels Ontologien Informationen zu sammeln und diese für die Bewältigung von Aufgaben zu nutzen, die bisher nur durch Menschen bewerkstelligt werden können. Wird z.B. ein Softwareagent beauftragt, in Onlinebibliothekssystemen alle Veröffentlichungen eines bestimmten Autors XY zusammenzutragen, sollte der Agent wissen, dass wenn ein Onlinebibliothekssystem eine Person als Verfasser eines Buchs nennt, diese Person damit auch Autor ist und das von ihm verfasste Buch eine Veröffentlichung ist. Diese Beziehungen (Verfasser

[11] `http://www.fipa.org/specs/fipa00086/index.html`
[12] Noy (2004)

sind nichts anderes als Autoren; jedes Buch ist eine Veröffentlichung etc.) würden dem Softwareagenten in einer Ontologie zur Verfügung gestellt werden.

Doch gerade in einer offenen Domäne wie dem WWW ist die Bestimmung einer einzigen Ontologie, die Softwareagenten nutzen sollen, hoffnungslos utopisch. Für dieselbe Domäne finden sich im WWW viele verschiedene Ontologien. Das gilt nicht nur für Ontologien, mit denen eine eng umgrenzte Domäne für eine spezielle informatische Anwendung konzeptualisiert wird („lower level ontolgies"), sondern auch für Ontologien, die sehr allgemeine Konzepte wie Ereignisse, Prozesse etc. modellieren („upper-level ontologies")[13]. Die Heterogenitätsproblematik, die durch die Festlegung einer Ontologie ausgehebelt werden sollte, wiederholt sich auf höherer Ebene. Miteinander kommunizierende Agenten, die auf unterschiedliche Ontologien zurückgreifen, müssen ebenfalls mit der Problematik von Ambiguitätskonflikten in der öffentlichen Sprache umgehen können.

Obwohl Newell (1982) gemäß Ontologien als „first class citizens" des Wissenslevels anzusehen sind und daher ihre Identität nicht von der speziellen syntaktischen Repräsentation abhängen sollte, werden in formallogisch basierten Ansätzen Ontologien mittels eines Vokabulars von logischen und nichtlogischen Symbolen sowie einer Menge von Axiomen über diesem Vokabular identifiziert, mit denen die intendierten Bedeutungen der Symbole (Gegenstände, Konzepte, Relationen in der Domäne) und deren Beziehungen festgelegt werden. Um der Vielfalt möglicher Ontologien Rechnung zu tragen, bietet sich eine Aufteilung des nichtlogischen Vokabulars einer Ontologie in öffentliche und interne Anteile an. Die öffentlichen Anteile sind für die Kommunikation mit Agenten vorgesehen, die auf andere Ontologien zurückgreifen; die internen Symbole werden nicht in der Kommunikation benutzt.

Ambiguitäten in der öffentlichen Sprache, die sich bei der Kommunikation von Agenten mit unterschiedlichen Ontologien ergeben, sind keine „inhaltlichen" Konflikte zwischen Ontologien wie sie z.B. durch unterschiedliche Modellierungsparadigmen (punkt- vs. intervallbasierte Modellierung von Ereignissen) in unterschiedlichen Ontologien entstehen können; vielmehr sind die Konflikte als *terminologische* Konflikte zu kennzeichnen. Die Terminologie eines Agenten, der auf eine Ontologie zurückgreift, wird durch die Zuordnung bestimmt, mit der nichtlogische Symbole des zu Grunde liegenden Vokabulars mit den relevanten Konzepten, Relationen und Gegenständen der Domäne verknüpft werden. Die Auflösung eines terminologischen Konflikts durch einen Agenten bedeutet daher nicht zwangsweise eine Änderung der inhaltlichen Konzeptualisierung in seiner Ontologie. Passt ein Agent infolge eines Terminologiekonflikts seine Terminologie an die Terminologie eines anderen Agenten an, so führt das zu einer Neuzuordnung von Konzepten,

[13]Beispiele sind BFO (`http://www.ifomis.org/bfo`), Cyc (`http://www.cyc.com/`), DOLCE (`http://www.loa-cnr.it/DOLCE.html`) und SUMO (`http://www.ontologyportal.org/`).

Relationen und Gegenständen zu den nichtlogischen Symbolen des öffentlichen Vokabulars.

In Beschreibungslogiken (s. Anhang A) wird eine Wissensbasis durch eine TBox und eine ABox beschrieben. Die TBox enthält terminologisches Wissen (kurz die Terminologie), während die ABox Faktenwissen beschreibt. Ontologien werden in dieser Arbeit durch beschreibungslogische Wissensbasen (über einem öffentlichen und internen Vokabular) repräsentiert und dürfen auch Faktenwissen (ABox) enthalten. Wenn ein Terminologieabgleich bei Auflösung eines Ambiguitätskonflikts erfolgt, so kann der zwar von ABox-Anteilen getriggert sein, doch ist eigentlich nur die Terminologie, festgelegt durch die TBox, vom Abgleich betroffen.

Aufgrund der Rolle, die den Ontologien zugeschrieben wird, besteht in der semantischen Integration ein großes Interesse daran, Kommunikationskonflikte zwischen Gemeinschaften (Agenten) mit heterogenen Ontologien, insbesondere Terminologiekonflikte, adäquat zu behandeln, um so die Ontologien integrieren zu können. Ein für die Integration relevantes Konzept bespricht die semantische Integration unter dem Terminus *semantische Abbildung*. Semantische Abbildungen sollen korrespondierende Konzepte, Relationen und Gegenstände in verschiedenen Ontologien (Wissensbasen) aufeinander abbilden. Brückenaxiome sind eine Form von semantischer Abbildung, bei der die Beziehung korrespondierender Elemente deklarativ formuliert wird; die (Formalisierung der) Subsumptionsbeziehung „Der Studentenbegriff von Person 2 ist weiter als der Studentenbegriff von Person 1“ ist ein Brückenaxiom für das oben besprochene Beispiel zweier miteinander kommunizierender Personen. Das Finden von semantischen Abbildungen ist eine nichttriviale Aufgabe, die nicht vollautomatisch funktioniert und den Eingriff von Ontologieingenieuren erfordert. Die Konstruktion vollautomatischer Verfahren zur Bildung von semantischen Abbildungen ist ein, wenn auch in näherer Zukunft nicht realisierbares, so doch häufig geäußertes Ziel in der semantischen Integration.

Ich betrachte in dieser Arbeit ein einseitiges Kommunikationsszenario, in dem ein Agent als Empfänger und ein zweiter Agent als Sender ausgezeichnet ist. Beide Agenten enthalten jeweils eine Ontologie als Wissensbasis. Ich spreche daher auch von einem *Integrationsszenario*, da die einseitige Kommunikation in der Integration von Information des Senders in die Ontologie des Empfängers resultiert. Verfahren, die der Agent zur Integration der Information benutzt, nenne ich entsprechend *Integrationsverfahren*. Der Sender schickt Information, die seiner Ontologie entstammt. Die Ontologien beider Agenten sind für die gleiche Domäne konzipiert und haben sich in der Praxis bewährt, so dass es einen guten Grund gibt, an ihnen festzuhalten. Die Terminologien der Ontologien werden als verwandt vorausgesetzt; trotz der Verwandtschaft der Terminologien kann es zu Terminologiekonflikten kommen. In meiner Arbeit entwickle ich für dieses Integrationsszenario einen Mechanismus, der zu einer adäquaten Integration von Ontologien gemäß formal spezifizierten Adäquatheitskriterien (s.u.) führt. Der Mechanismus wird durch zweistellige Operatoren realisiert und basiert auf der *Reinterpretation* von Symbolen, die in einen Konflikt involviert sind; hierbei werden die Konfliktsymbole neu interpretiert und die verschiedenen Lesarten der Konfliktsymbole durch semantische Abbildungen aufeinander bezogen. Das Ergebnis ist eine Kombination der beiden Ontologien zusammen mit einer Menge von semantischen Abbildungen.

1.2 Aufbau der Arbeit

Für die formale Modellierung von geeigneten Integrationsverfahren ist zunächst zu klären, was mögliche Adäquatheitskriterien für das hier vorausgesetzte Integrationsszenario sind. Während in der semantischen Integration viele verschiedene Verfahren zur Integration (heterogener) Wissensbasen existieren, wird die Frage nach Adäquatheitskriterien eher stiefmütterlich behandelt, obwohl diese sich in mehrerer Hinsicht als nützlich erweisen: Durch eine axiomatische Spezifikation mittels Postulaten können 1) Unterklassen von miteinander kompatiblen Adäquatheitskriterien formuliert, 2) eine auf Postulatserfüllung zielgerichtete Konstruktion von Integrationsverfahren durchgeführt und 3) verschiedene Integrationsverfahren (für dasselbe Integrationsszenario) bzgl. der Erfüllbarkeit der Postulate miteinander verglichen werden.

Die Postulatsorientierung ist eines der Grundmerkmale der Belief-Revision[14] (s. Abschnitt 2.1). In diesem Teilgebiet der Wissensverarbeitung (sowie Wissenschaftstheorie und Philosophie) werden Postulate und ihnen gehorchende Operatoren untersucht, die eine adäquate Änderung einer Wissensbasis unter neu erworbener, eventuell konfligierender Information funktional spezifizieren. Die in diesem Zusammenhang definierten Revisions-, Expansions- und Updatefunktionen beschreiben Änderungen, in denen die neue Information (oder Teile der neuen Information) in die resultierende Wissensbasis eingefügt wird; bei Kontraktionsfunktionen wird die triggernde Information aus der Wissensbasis entfernt. Bei Revisionsfunktionen ist die Änderung durch eine Konfliktdiagnose bestimmt, gemäß der der Konflikt durch vorher erworbene Falschinformation entstanden ist. Bei Updatefunktionen ist die Änderung durch eine Konfliktdiagnose bestimmt, gemäß der der Konflikt durch veraltete Information entstanden ist.

Ausgehend von einem Basissatz an Rationalitätspostulaten gemäß den grundlegenden Arbeiten von Alchourrón, Gärdenfors und Makinson, im Folgenden abgekürzt durch AGM (Alchourrón et al., 1985), werden verschiedene Postulate für das in dieser Arbeit intendierte Integrationsszenario untersucht. In dem Basissatz

[14] Alchourrón et al. (1985), Gärdenfors und Rott (1995), Gärdenfors (1988), Blackburn et al. (1997), Hansson (2006), Hansson (1999b), Levi (1980, 1991)

an Postulaten für das intendierte Integrationsszenario in Abschnitt 3.1 werden wichtige Eigenschaften wie die Konsistenz des Integrationsresultats und die Konservierung der Ontologien (in einer Namensvariante) formalisiert. Da im Vergleich zu Revisions- und Updatefunktionen im Integrationsszenario eine andere Konfliktdiagnose erfolgt (nicht Falschinformation oder veraltete Information, sondern ein unterschiedlicher Sprachgebrauch führt zum Konflikt), lässt sich die Einführung neuer Symbole und damit die Erweiterung des Sprachraums gut begründen. Daher sind viele der AGM-Postulate neu zu formulieren und neue, an das Integrationsszenario angepasste Postulate zu entwickeln.

Mit diesen Postulaten können die Voraussetzungen des intendierten Integrationsszenarios, dass beide Ontologien sich in der Praxis bewährt haben und daher auch beide im konsistenten Integrationsresultat erhalten sein sollten, eingefangen werden. Die Bedingung, dass die Terminologien von Empfänger und Sender verwandt sind und daher die verschiedenen Lesarten der Symbole ähnlich sein müssen, wird durch diese Postulate nicht abgedeckt. Ein für diese Bedingung eher geeignetes Postulat ist das Postulat zur Reinterpretationsrelevanz.

Mit dem Postulat zur Reinterpretationsrelevanz wie auch mit den dualen erweiterten Inklusionspostulaten (s. Abschnitt 5.3) werden Minimalitätsbedingungen an das Integrationsresultat geknüpft. Das Postulat zur Reinterpretationsrelevanz fordert, dass aus der Empfängerontologie nur für den Widerspruch relevante Sätze wegfallen dürfen. Da Inkompatibilitäten der Empfängerontologie und Senderontologie auf unterschiedliche Lesarten von Symbolen und nicht von Sätzen zurückgeführt werden, muss für die Beschreibung der in einen Konflikt involvierten Symbole das Konzept einer atomaren logischen Formel eingeführt werden; diese Aufgabe kann mit dem Begriff einer syntaktischen Primklausel gelöst werden. Die erweiterten Inklusionspostulate beschreiben, welche Sätze zu den kompatiblen Anteilen der Empfänger- und Senderontologie im Integrationsresultat höchstens hinzukommen dürfen.

Dass Teilklassen der beschriebenen Integrationspostulate durch Integrationsverfahren erfüllt werden können, wird in den Abschnitten 3.2 und 3.3 gezeigt. Diese Abschnitte enthalten die für alle weiteren Analysen grundlegenden Definitionen von verschiedenen Klassen von Reinterpretationsoperatoren. Ähnlich den Funktionen in der Belief-Revision werden die Reinterpretationsoperatoren als 2-stellige Funktionen definiert, die die Menge der Axiome aus der Empfängerontologie als erstem Argument und die (Teil-)Menge der Axiome aus der Senderontologie als zweitem Argument auf ein Integrationsresultat abbilden. Unter den Integrationspostulaten lassen sich zwei maximale Klassen von miteinander kompatiblen Postulaten ausmachen, die sich durch zwei verschiedene Klassen von Reinterpretationsoperatoren operationalisieren lassen, Typ-1- und Typ-2-Operatoren. Obwohl beide Typen von Operatoren strukturell ähnlich sind, haben sie unterschiedliche Eigenschaften bzgl. der Adaptabilität an die Terminologie des Senders: Typ-1-

Operatoren halten an der Terminologie des Empfängers fest, Typ-2-Operatoren führen zu einer Adaption an die Terminologie des Senders.

Das allen Reinterpretationsoperatoren zu Grunde liegende Konstruktionsprinzip basiert auf zwei Schritten, einer Entkopplung der zu integrierenden Ontologien durch Internalisierung von ambigen Symbolen in der Senderontologie (Typ 1) bzw. in der Empfängerontologie (Typ 2) und einer Kopplung der disambiguierten Symbole durch Hypothesen über die semantische Beziehung der unterschiedlichen Lesarten der Symbole. Da nach Voraussetzung des Integrationsszenarios die Terminologien der zu integrierenden Ontologien verwandt sind, wird seitens des Empfängers vor der Integration angenommen, dass alle nichtlogischen Symbole in seiner Ontologie dieselben Entitäten wie die (gleich lautenden) Symbole in der zu integrierenden Senderontologie bezeichnen; diese Annahme ist jedoch bei inkompatibler Empfänger- und Senderontologie nicht haltbar, so dass die anfänglichen Hypothesen über die semantischen Beziehungen gefiltert werden müssen.

Das Resultat der Integration mittels Reinterpretationsoperatoren besteht aus zwei Teilen, einer Kombination der initialen Ontologien und den gefilterten Hypothesen über die semantischen Beziehungen der disambiguierten Symbole. Die Hypothesen über die semantischen Beziehungen resultieren aus einem Verfahren, das Techniken der Belief-Revision nutzt, und sind deklarativ als Brückenaxiome (s. Abschnitt 2.3) notiert. Im Falle des obigen Beispiels zweier miteinander kommunizierender Personen, die unterschiedlichen Lesarten des Ausdrucks „Student“ haben, liefern Reinterpretationsoperatoren ein Brückenaxiom der Form „Das Studentenkonzept der ersten Person ist dem Studentenkonzept der zweiten Person untergeordnet“.

Reinterpretationsoperatoren sind im engeren Sinne keine Wissensrevisionsfunktionen, da sie, bedingt durch die Einführung von neuen (internen) Symbolen zur Entkopplung und zur Hypothesenbildung über die semantischen Beziehungen der disambiguierten Symbole, zu einer Spracherweiterung führen. Dies gilt für die Typ-1-Operatoren, die aufgrund der fehlenden Adaption an die Senderterminologie wenig mit Revisionsfunktionen gemein haben, wie auch für die Typ-2-Operatoren, die immerhin eine Adaption an die Senderterminologie realisieren und dabei die Integration der Senderontologie in ihrer ursprünglichen Form im Integrationsresultat garantieren. Durch Einschränkung der Reinterpretationsoperatoren auf das öffentliche Vokabular lässt sich dieser Unterschied zwischen Reinterpretationsoperatoren und Revisionsfunktionen überbrücken. In Abschnitt 4.1 wird der Frage nachgegangen, für welche Logiken eine derartige Einschränkung sinnvoll ist, ob die Einschränkung endlich repräsentierbar ist und welche klassischen Postulate in der Belief-Revision die eingeschränkten Reinterpretationsoperatoren erfüllen.

Obwohl Reinterpretationsoperatoren keine Wissensrevisionsfunktionen sind, die eine Empfängerontologie mit einer Senderontologie revidieren, lässt sich aufgrund des in dieser Arbeit gewählten Filterungsmechanismus für die Hypothesen zeigen, dass Reinterpretation darstellbar ist als Revision von Hypothesen: Das eigentliche Objekt der Revision sind die anfänglichen Hypothesen über die semantischen Beziehungen der disambiguierten Symbole; die zu integrierenden Ontologien bilden (nur) den Rahmen, innerhalb dem die Revision der Hypothesen erfolgt. Die Beweise hierzu werden in Abschnitt 4.2 dargestellt.

Orthogonal zu der Unterscheidung zwischen Typ 1 und Typ 2 lassen sich in Abhängigkeit von der Filterungsmethode für die Hypothesen verschieden starke Operatoren definieren (s. Abschnitte 3.2, 3.3, 5.3). Alle diese Operatoren erfüllen die zu ihrem Typ gehörigen Unterklassen der Basisintegrationspostulate von Abschnitt 3.1; die unterschiedlichen Effekte der schwachen und stärkeren Reinterpretationsoperatoren können jedoch durch Betrachtungen zur Konservativität (s. Abschnitt 3.2) und zur minimalen Änderung mittels der erweiterten Inklusionspostulate (s. Abschnitt 5.3) auf Postulatsebene beschrieben werden.

Die Integration zweier Ontologien lässt sich nicht nur durch eine Einschrittlösung realisieren, bei der alle Sätze einer Senderontologie mittels eines Operators gleichzeitig in die Empfängerontologie eingefügt werden, sondern auch durch eine sequenzielle Lösung, bei der der Empfänger nacheinander Teile der Senderontologie erhält und diese jeweils mit einem (in allen Schritten gleichen) Reinterpretationsoperator einfügt. In dem oben dargestellten einseitigen Kommunikationsmodell würde die Einschrittlösung einer zurückhaltenden Form (lazy evaluation) von Integration entsprechen, bei der der Empfänger die Informationen in einem Puffer speichert, um sie dann insgesamt durch einen Operator zu verarbeiten; während die Mehrschrittlösung einer gierigen Form von Evaluation (greedy evaluation) entspricht, bei der die Information sofort durch Anwendung des Operators ausgewertet wird.

Die schrittweise (sequenzielle) Integration von Information erfordert zusätzliche Postulate, mit denen ein adäquates Verhalten von Operatoren über mehrere Integrationsschritte hinweg spezifiziert werden kann. In Kapitel 6 werden aus der Literatur zur iterierten Revision bekannte Postulate auf ihre Eignung für die sequenzielle Integration in dem hier vorausgesetzten Integrationsszenario hin untersucht. Obwohl die Reinterpretationsoperatoren in der hier definierten Form prinzipiell für eine sequenzielle Integration genutzt werden können, sind sie nicht explizit für diese Form der Integration konstruiert; die Reinterpretationshistorie ist zwar in Form von Namensvarianten der Ontologien jeweils in den Integrationsresultaten vorhanden, bleibt bei der Integration jedoch unberücksichtigt. Daher zeigt sich, dass die Reinterpretationsoperatoren sich bzgl. der Iterationspostulate nicht einheitlich verhalten und durchaus nicht alle Iterationspostulate erfüllen (s. Abschnitt 6.2). In dieser Arbeit wird jedoch auch gezeigt, dass die Erfüllung der (leicht adaptierten) klassischen Iterationspostulate nicht in jedem Fall erwünscht ist, da sie nicht die besonderen Umstände des Integrationsszenarios berücksichtigen.

Die sequenzielle und die einschrittige Integration sind zwei prinzipiell verschiedene Ansätze, für die im Allgemeinen keine gegenseitige Reduktion zu erwarten ist. In Abschnitt 6.3 wird die Aussage über die gegenseitige Reduktion durch die Teilbedingungen der Sequenzialisierbarkeit und Kumulierbarkeit formalisiert und gezeigt, unter welchen Umständen eine abgeschwächte Form von Reduktion für Reinterpretationsoperatoren beweisbar ist.

Für das Ergebnis der sequenziellen Integration spielt die Reihenfolge, in der die Axiome integriert werden, eine wesentliche Rolle. Die Integration eines Axioms in einem Schritt kann dazu führen, dass in davor liegenden Schritten integrierte Axiome verloren gehen. Um dem Verlust entgegen zu wirken, kann der Sender im Voraus beauftragt werden, Axiome mehrmals zu verschicken. Die Integration einer Folge von Axiomen kann dann als erfolgreich gewertet werden, wenn die Menge der Axiome aus der Folge im Integrationsresultat enthalten ist. Da im Prinzip eine mehrfache Wiederholung derselben Axiome nötig sein könnte und die Anzahl der Wiederholungen nicht a priori bestimmt werden kann, müssen unendliche Folgen als Triggerfolgen betrachtet werden, die eine endliche Menge von Axiomen enthalten. Erfolgreich kann die Integration einer Folge von Axiomen nur dann sein, wenn die Folge von Integrationsresultaten sich auf eine Menge von Axiomen stabilisiert, sich also ab einem Schritt nicht mehr ändert.

Obwohl eher selten in der Belief-Revision behandelt, wurde auch für Belief-Revisionsfunktionen die Frage nach der Stabilität angegangen.[15] In Abschnitt 6.4 wird die Stabilität von Reinterpretationsoperatoren für unendliche Folgen von Axiomen mit einer einfachen Struktur untersucht. Wie sich zeigt, führen schwache Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 zu einem stabilen Verhalten, sofern die Inkompatibilitäten der Empfängerontologie mit der Menge der Triggeraxiome allein durch Reinterpretation der Konzeptsymbole möglich ist. Dafür können jedoch schwache Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 nicht garantieren, dass die Konzepte der Empfängerontologie im Integrationsresultat noch einen Beitrag zur Bedeutung der reinterpretierten Symbole leisten: Im Laufe der Integration können die Konzepte der Empfängerontologie vergessen werden. Außerdem kann gezeigt werden, dass die starken Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 nicht zwingend ein vergessliches Verhalten zeigen, dafür aber zu instabilen Integrationsresultaten führen können.

Die Ontologien, die in dieser Arbeit betrachtet werden, können durch endliche Wissensbasen über einer logischen Sprache formalisiert werden. In manchen Fällen ist es sinnvoll, Ontologien durch Präferenzrelationen zu strukturieren, da

[15] Vgl. Kelly (1995, 1998b,a), Martin und Osherson (1997, 1998, 2000) und Zhang und Foo (2002).

manche Teile der Ontologien wichtiger sind als andere Teile der Ontologien.[16] In Kapitel 7 werden Ontologien mit einer zusätzlichen Struktur (Sphärenkollektionen) betrachtet, die eine lokale Präferenzrelation zwischen Konzepten in der Ontologie beschreibt; in einer Sphärenkollektion werden für Konzepte der Ontologie logisch allgemeinere Konzepte beschrieben, die als mögliche Abschwächungen dieser Konzepte angesehen werden sollen. Reinterpretationsoperatoren für derart lokal strukturierte Ontologien realisieren eine minimale Änderung von Konzepten, deren denotierende Symbole in Konflikten zwischen der Empfängerontologie und dem Trigger involviert sind.

Der erste Teil des Anhangs (Anhang A) enthält eine Darstellung der mathematischen und logischen Grundlagen, die ich in meiner Arbeit voraussetze. Neben mengentheoretischen Begriffen werden die relevanten Konzepte aus der Aussagenlogik, der Prädikatenlogik und Beschreibungslogiken beschrieben. Ebenfalls sind hier die Begriffe eines Folgerungsoperators, einer (dualen) Restmenge und einer Selektionsfunktion, die im formalen Modell eine zentrale Rolle haben, definiert.

Um den Lesefluss nicht zu stören, sind längere Beweise zu den erzielten Resultaten dieser Arbeit in den Anhang B ausgelagert. Resultate, die als Lemmata für komplexere Beweise genutzt werden, nicht jedoch für das Grundverständnis des Ansatzes wichtig sind, werden nur im Anhang aufgeführt.

[16]Eine derartige Strukturierung ist insbesondere dann sinnvoll, wenn der Ontologiebegriff, wie in dieser Arbeit geschehen, so weit gefasst ist, dass er auch Faktenwissen (ABox in einer beschreibungslogischen Wissensbasis) einschließt.

2 Belief-Revision und semantische Integration

Der in dieser Arbeit entwickelte Reinterpretationsansatz basiert auf Ideen und Techniken, die zwei Teilgebieten der Wissensverarbeitung (Wissenschaftstheorie und Philosophie) zugeordnet werden, der Belief-Revision und semantischen Integration. Dieses Überblickskapitel stellt die grundlegenden Begriffe aus beiden Teilgebieten dar; weiter gehende Begriffe und Techniken werden in späteren Kapiteln detailliert besprochen.

2.1 Belief-Revision

Dieser Abschnitt gibt einen Überblick über das Teilgebiet der Wissensverarbeitung (sowie Wissenschaftstheorie und Philosophie), das unter dem Terminus *Belief-Revision* – im deutschen Sprachraum auch *Wissensrevision* – oder alternativ im Englischen unter den Begriffen *belief change, belief dynamics, theory change* oder *theory revision* aufgeführt wird. Die Darstellung beschränkt sich auf diejenigen Aspekte und Themeninhalte der Belief-Revision, die für das Modell der Reinterpretation, welches in dieser Arbeit entwickelt wird, relevant sind.

2.1.1 Der AGM-Ansatz

Motivation

Belief-Revision ist ein Teilgebiet der Wissensverarbeitung (sowie Wissenschaftstheorie und Philosophie), das sich mit der Dynamik von Wissens- und Glaubenszuständen beschäftigt und das enge Bezüge zum nichtmonotonen Schließen aufweist.[1] Obwohl sich die Anfänge der Belief-Revision auf Arbeiten aus den siebziger Jahren zurückführen lassen (Levi, 1977, 1980; Harper, 1977), findet sie mit den Arbeiten von Alchourrón, Gärdenfors und Makinson (AGM) in Alchourrón et al. (1985) (und Alchourrón und Makinson (1981)) eine formal fundierte Darstellung, die in der Folge entstandene Arbeiten zur Belief-Revision wesentlich geprägt hat.

Der AGM-Ansatz benutzt zur Modellierung von Glaubenszuständen in einem (idealen) Agenten ein logisches Rahmenwerk, das auf einem Paar $\langle \mathcal{L}, \mathrm{Cn} \rangle$ mit einer logischen Sprache $\mathcal{L}$ und einem Folgerungsoperator Cn für $\mathcal{L}$ beruht. Im AGM-Ansatz werden Sprachen $\mathcal{L}$ vorausgesetzt, die Sätze enthalten, in denen die aussagenlogischen Junktoren vorkommen, und die unter den aussagenlogischen Junktoren abgeschlossen sind.[2]

Definition 2.1. (Tarski, 1956) Ein Operator $\mathrm{Cn} : \mathrm{Pot}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{Pot}(\mathcal{L})$ über einer logischen Sprache $\mathcal{L}$ ist ein *Tarskischer Folgerungsoperator* genau dann, wenn er für $X, X_1, X_2 \subseteq \mathcal{L}$ folgende Bedingungen erfüllt:

1. $X \subseteq \mathrm{Cn}(X)$ (Inklusion)
2. Falls $X_1 \subseteq X_2$, dann $\mathrm{Cn}(X_1) \subseteq \mathrm{Cn}(X_2)$. (Monotonie)
3. $\mathrm{Cn}(X) = \mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(X))$ (Idempotenz)

Vom Folgerungsoperator Cn wird im Allgemeinen angenommen, dass er die klassische aussagenlogische Folgerung umfasst, kompakt ist und die Deduktionseigenschaft erfüllt.[3] Statt des Folgerungsoperators wird in den Formulierungen der Postulate auch die zugehörige Folgerungsrelation $\vdash_{\mathrm{Cn}}$ benutzt, die wie folgt definiert wird: $X \vdash_{\mathrm{Cn}} \alpha$ genau dann, wenn $\alpha \in \mathrm{Cn}(X)$. $\vdash_{\mathrm{Cn}} \alpha$ ist eine Abkürzung für $\emptyset \vdash_{\mathrm{Cn}} \alpha$ und besagt, dass α allgemeingültig (tautologisch) bzgl. Cn ist. Entsprechend bedeutet $\vdash_{\mathrm{Cn}} \neg\alpha$, dass α kontradiktorisch (bzgl. Cn) ist.

Ein Glaubenszustand wird im AGM-Ansatz durch eine bzgl. Cn abgeschlossene Menge repräsentiert, die *Belief-Set* genannt wird. Die Menge aller Belief-Sets für $\mathcal{L}$ wird in dieser Arbeit mit $\mathcal{BS}_{\mathcal{L}}$ bezeichnet.

$$\mathcal{BS}_{\mathcal{L}} = \{X \subseteq \mathcal{L} \mid X = \mathrm{Cn}(X)\}$$

[1] Siehe den Aufsatz von Makinson und Gärdenfors (1989) sowie die Bücher von Rott (2001), Schlechta (2004) und Bochman (2001).

[2] Logische Grundlagen zur Aussagenlogik werden in Anhang A, Abschnitt A.2 besprochen.

[3] Vgl. Anhang A, Definition A.33, S. 244.

Belief-Sets modellieren nicht den Inhalt dessen, was ein Agent glaubt, sondern den Inhalt dessen, was aus seinem Glaubensinhalt folgt. Der modellierte Agent ist daher ein idealer Agent, der in seinem Glaubenszustand alle Folgerungen speichert. Gemäß der Belief-Set-Konzeption gibt es auch nur einen inkonsistenten Glaubenszustand, der durch $\mathcal{L}$ repräsentiert wird; ist der ideale Agent in einem inkonsistenten Zustand, so folgen aus konfligierenden Glaubensinhalten alle Sätze in der logischen Sprache $\mathcal{L}$. Ein Belief-Set BS ist genau dann inkonsistent, d.h. $BS = \mathcal{L}$, wenn es ein kontradiktorisches Paar von Sätzen $\alpha, \neg\alpha$ enthält oder alternativ genau dann, wenn es die logische Konstante $\perp$ für die Kontradiktion enthält, d.h. $\perp \in BS$ bzw. $BS \vdash_{\mathrm{Cn}} \perp$ gilt.

Ein für die AGM-Konzeption typisches Anwendungsszenario, in dem die Dynamik der Glaubenszustände modelliert werden soll, veranschaulicht das folgende Beispiel.

Beispiel 2.2. (Nach Gärdenfors und Rott (1995)) Einem Vogelkundler wird von seinem Assistenten mitgeteilt, dass sich in der am See aufgestellten Falle ein Schwan verfangen habe. Dem Vogelkundler wird kurz nach dieser Mitteilung ein Glaubenszustand zugeschrieben, in dem folgende Sätze für wahr erachtet werden:

- Der gefangene Vogel ist ein Schwan.
- Der gefangene Vogel kommt aus Schweden.
- Schweden ist ein Teil Europas.
- Alle europäischen Schwäne sind weiß.

Aus dem, was der Vogelkundler glaubt, folgt insbesondere, dass der Vogel in der Falle weiß ist. Der Vogelkundler will sich vergewissern und schaut sich das gefangene Tier an, um nunmehr festzustellen, dass dieses ein schwarzer Vogel ist. Die neue Beobachtung ist nicht mit dem, was der Vogelkundler geglaubt hat, verträglich und *triggert* daher eine Änderung seines Glaubenszustands; infolge dieser Änderung werden Teile des alten Glaubenszustands, die mit der neuen Beobachtung unverträglich sind, fallen gelassen und sind daher nicht mehr im neuen Glaubenszustand des Vogelkundlers enthalten.

Die Dynamik der Glaubenszustände in dem obigen Beispiel lässt sich abstrakt durch die Abbildung eines Paares $\langle BS, \beta\rangle$ bestehend aus einem Belief-Set $BS \in \mathcal{BS}_{\mathcal{L}}$ (dem Ausgangsglaubenszustand) und einem Satz $\alpha \in \mathcal{L}$ (der neuen, triggernden Information) auf einen Nachfolgeglaubenszustand BS' repräsentieren. Im Fokus des AGM-Ansatzes steht die Modellierung der Dynamik von Glaubenszuständen durch 2-stellige Abbildungen.

$$\begin{aligned} \circ : \mathcal{BS}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{BS}_{\mathcal{L}} \\ \langle BS, \alpha\rangle &\longmapsto BS \circ \alpha \end{aligned}$$

Diese Abbildungen nenne ich schlicht *Wissensänderungsoperatoren* oder kürzer *Änderungsoperatoren*.[4] Die AGM-Modellierung umfasst zwei Dimensionen. Zum einen wird anhand von Rationalitätskriterien festgelegt, wie sich Glaubenszustände unter neuer Information ändern sollen. Die Rationalitätskriterien werden durch Axiome, in der Belief-Revision durchgehend *Postulate* genannt, formalisiert. Diese spezifizieren Klassen von Änderungsoperatoren, die die rationale oder adäquate Änderung von Glaubenszuständen modellieren sollen. Die zweite Dimension ist die Operationalisierung der Rationalitätspostulate durch die Konstruktion konkreter Wissensänderungsoperatoren.

Traditionell werden in der Belief-Revision drei Typen von Revisionsoperatoren unterschieden: *Expansionsoperatoren*, *Kontraktionsoperatoren* und *Revisionsoperatoren*. Expansionsoperatoren modellieren das Hinzufügen neuer Information ohne Beachtung der Inkonsistenz zwischen dem Ausgangsglaubenszustand und der triggernden Information. Kontraktionsoperatoren modellieren die Änderung eines Glaubenszustands, bei der die triggernde Information im Nachfolgeglaubenszustand nicht enthalten sein darf. Hierzu wird der Ausgangsglaubenszustand um konfligierende Sätze verkleinert, es kommen keine neuen Sätze hinzu. Revisionsoperatoren modellieren das Hinzufügen einer triggernden Information, so dass der Nachfolgeglaubenszustand konsistent ist.

Die Postulate und Operatoren, die in der AGM-Konzeption modelliert werden, bilden die Basis für die Integrationspostulate und Reinterpretationsoperatoren, die in dieser Arbeit entwickelt werden. Von besonderem Interesse sind die Kontraktions- und Revisionsoperatoren von AGM, die über die Harper- und Levi-Identität eng miteinander verknüpft sind. Obwohl auch für die Expansionsoperatoren Postulate formulierbar sind (Gärdenfors, 1988, S. 48–51), wird in der Literatur zumeist direkt ein konkreter Expansionsoperator für Belief-Sets definiert.

$$BS + \alpha = \mathrm{Cn}(BS \cup \{\alpha\}) \tag{2.1}$$

Diese Definition gründet auf der Tatsache, dass ein Wissensänderungsoperator genau dann die Expansionspostulate gemäß Gärdenfors (1988) erfüllt, wenn er die in Gleichung (2.1) gegebene Form hat (Gärdenfors, 1988, Theorem 3.1, S. 51).

Postulate

Die im Folgenden aufgeführten Postulate für Revisions- und Kontraktionsoperatoren bilden den Kern des AGM-Ansatzes. Als allgemeine Rationalitätskriterien (oder Integritätsbedingungen) führen Gärdenfors und Rott (Gärdenfors und Rott,

[4]Im Englischen wird der Terminus *belief change operator* bzw. *belief change function* verwendet. AGM sprechen von Funktionen statt von Operatoren.

1995, S. 38) die folgenden vier Bedingungen ein, die für jeden Wissensänderungsoperator gelten soll.[5]

1. Ein Wissensbestand sollte konsistent sein, sofern es möglich ist.
2. Wenn eine Aussage aus einem Wissensbestand folgt, sollte diese Aussage im Wissensbestand enthalten sein.
3. Die Menge der bei einer Wissensbestandsänderung verloren gehenden Informationen sollte minimal gehalten werden.
4. Sofern einige Aussagen im Wissensbestand besser begründet oder wichtiger sind als andere, sollte die Wissensbestandsänderung die schlechter begründeten bzw. weniger wichtigen aus dem Bestand entfernen.

In den unten dargestellten AGM-Postulaten werden die ersten beiden Kriterien durch das Konsistenzpostulat und das Abschlusspostulat explizit formalisiert. Das dritte Rationalitätskriterium wird als ein wesentliches Merkmal der AGM-Belief-Revision angesehen.[6] Die Problematik in der Formalisierung des Informationsverlustes und ihre Anwendung auf das hier entwickelte Reinterpretationsmodell werde ich ausführlich in Kapitel 5 behandeln. Minimaler Informationsverlust lässt sich für Revisionsoperatoren nicht durch ein Postulat explizieren; für Kontraktionsoperatoren gibt es eine Formalisierung durch das Wiedergewinnungspostulat (Recoverypostulat). Das vierte Rationalitätskriterium wird als die Kehrseite des Minimalitätskriteriums angesehen. Der Aspekt der epistemischen Verankerung wird im AGM-Ansatz in Form von Operatoren realisiert, die auf einer Präferenzrelation zur epistemischen Verankerung („epistemic entrenchment“) von Sätzen des Ausgangsglaubenszustands basieren.[7]

Es bezeichne für alle folgenden Postulate $BS \in \mathcal{BS}_{\mathcal{L}}$ ein Belief-Set und $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ Sätze.

Die Abschlussbedingung (closure) für Revisionsoperatoren erfordert, dass das Ergebnis der Revision ein Belief-Set, also abgeschlossen bzgl. Cn ist.

(AGM-R 1) $BS * \alpha \in \mathcal{BS}_{\mathcal{L}}$ (Abschluss/Closure)

Das zweite AGM-Postulat für Revisionsoperatoren garantiert, dass das Resultat den Trigger enthält, die Revision also erfolgreich ist. Revisionsoperatoren, die dieses Postulat erfüllen, eignen sich für solche Szenarien, in denen der Trigger

[5]Obwohl im englischen Wortlaut die Rede von „databases“ ist, sind die Rationalitätskriterien nicht auf Datenbanken beschränkt, sondern beziehen sich ganz allgemein auf alle Formen von Wissensbeständen.

[6](Makinson, 1985, S. 352), (Fuhrmann, 1997, S. 17), (Darwiche und Pearl, 1997, S. 2)

[7]Der Aspekt der epistemischen Verankerung von Sätzen durch Präferenzrelationen wird im Reinterpretationsmodell nicht verwendet und wird daher im Folgenden nicht ausgeführt.

einer vertrauenswürdigen Quelle entstammt und ihm daher Priorität gegenüber allen anderen Sätzen im Belief-Set BS einzuräumen ist.

(AGM-R 2) $\alpha \in BS * \alpha$ (Erfolg/Success)

Die Revision wird bzgl. mengentheoretischer Inklusion nach oben durch den Expansionsoperator beschränkt. Diese in anderen Zusammenhängen *Inklusion (inclusion)* genannte Eigenschaft führt in genau dem Fall zu einer echten Beschränkung, in dem Trigger α und Belief-Set BS kompatibel sind.

(AGM-R 3) $BS * \alpha \subseteq BS + \alpha$ (Expansion 1)

Das Postulat (AGM-R 4) beschreibt mit dem Expansionsresultat $BS + \alpha$ eine Unterschranke des Revisionsresultats für den Fall, dass der Trigger mit dem Belief-Set kompatibel ist: Alle Sätze, die in der Expansion von BS mit α enthalten sind, sind im Kompatibilitätsfall auch im Revisionsresultat $BS * \alpha$ enthalten.

(AGM-R 4) Falls $\neg\alpha \notin BS$, dann $BS + \alpha \subseteq BS * \alpha$. (Expansion 2)

Das Konsistenzpostulat besagt, dass die Konsistenz des Revisionsergebnisses gewährleistet ist, wenn der Trigger keine Kontradiktion ist. Die im Postulat formulierte Bedingung an Revisionsoperatoren ist sehr stark und geht über die im ersten informellen Rationalitätskriterium genannte Bedingung hinaus; falls der Trigger nicht kontradiktorisch ist, fordert Postulat (AGM-R 5) nicht nur, dass konsistente Belief-Sets nach der Revision weiterhin konsistent sind, sondern auch, dass das Revisionsresultat in solchen Fällen konsistent ist, in denen das Ausgangs-Belief-Set inkonsistent ist.

(AGM-R 5) Wenn $BS * \alpha \vdash_{\mathrm{Cn}} \bot$, dann $\vdash_{\mathrm{Cn}} \neg\alpha$. (Konsistenz/Consistency)

Wenn zwei Trigger logisch gesehen äquivalent sind, d.h., wenn $\vdash_{\mathrm{Cn}} \alpha \leftrightarrow \beta$, sollen die Ergebnisse der Revision bzgl. desselben Belief-Sets identisch sein.

(AGM-R 6) Wenn $\vdash_{\mathrm{Cn}} \alpha \leftrightarrow \beta$, dann $BS * \alpha = BS * \beta$.
(Rechtsextensionalität/(Right) Extensionality)

Ein korrespondierendes Postulat für die Extensionalität im linken Argument findet sich nicht unter den AGM-Postulaten, da dieses aufgrund der Abschlusseigenschaft der Belief-Sets im Voraus erfüllt wird. Sind zwei Belief-Sets bzgl. Cn äquivalent, d.h. gilt $\mathrm{Cn}(BS_1) = \mathrm{Cn}(BS_2)$, dann folgt aus der Abschlusseigenschaft von Belief-Sets unmittelbar, dass $BS_1 = BS_2$.

Diese ersten sechs Postulate werden auch die *AGM-Basispostulate* für Revisionsoperatoren genannt. In den so genannten ergänzenden Postulaten (AGM-R 7) und (AGM-R 8) wird das Verhalten der Revision bei Triggern spezifiziert, die als Konjunktion strukturiert sind. Postulat (AGM-R 7) besagt, dass die Revision mit einer Konjunktion von zwei Sätzen $(\alpha \wedge \beta)$ nach oben abgeschätzt werden kann durch die Revision mit dem ersten Konjunkt α gefolgt von einer Expansion mit dem zweiten Konjunkt β.

(AGM-R 7) $BS * (\alpha \wedge \beta) \subseteq (BS * \alpha) + \beta$ (Konjunktion 1/Conjunction 1)

Postulat (AGM-R 8) besagt, dass die Revision mit einer Konjunktion von zwei Sätzen $(\alpha \wedge \beta)$ nach unten abgeschätzt werden kann durch die Revision mit dem ersten Konjunkt α gefolgt von einer Expansion mit dem zweiten Konjunkt β – unter der Voraussetzung, dass die Revision mit dem ersten Konjunkt α zu einem Belief-Set führt, das mit dem zweiten Konjunkt β kompatibel ist.

(AGM-R 8) Falls $\neg\beta \notin BS * \alpha$, dann $(BS * \alpha) + \beta \subseteq BS * (\alpha \wedge \beta)$. (Konjunktion 2/Conjunction 2)[8]

Die Basis-AGM-Postulate zur Revision charakterisieren keinen einzelnen Revisionsoperator[9], sondern eine ganze Klasse von Operatoren. AGM definieren eine Klasse von Revisionsoperatoren (Partial-Meet-Revision), die sämtliche AGM-Basispostulate erfüllen. Es zeigt sich darüber hinaus, dass die AGM-Basispostulate derart spezifisch sind, dass sie gerade die Klasse der Partial-Meet-Operatoren charakterisieren (s.u.).

Parallel zu den Postulaten für die Revision lassen sich Postulate für die Kontraktion definieren. Die Abschlussbedingung für Kontraktionsoperatoren $\div$ besagt, dass das Kontraktionsresultat ein Belief-Set sein muss.

(AGM-K 1) $BS \div \alpha \in \mathcal{BS}_{\mathcal{L}}$ (Abschluss/Closure)

Das Inklusionspostulat besagt, dass die Kontraktion mit dem Trigger nur zum Löschen von Sätzen aus dem Ausgangs-Belief-Set führen soll; das Ergebnis der Kontraktion ist eine Teilmenge des Ausgangs-Belief-Sets BS. Dieses Postulat entspricht konzeptionell dem Postulat (AGM-R 3), da es eine Oberabschätzung für das Kontraktionsresultat angibt.

(AGM-K 2) $BS \div \alpha \subseteq BS$ (Inklusion/Inclusion)

Das (AGM-R 4) entsprechende Kontraktionspostulat ist (AGM-K 3); es besagt, dass in dem Falle, in dem der Trigger nicht im Belief-Set enthalten ist, keine Änderung getriggert werden soll.

(AGM-K 3) Falls $\beta \notin BS$, dann $BS \div \beta = BS$ (Vakuität/Vacuity)

Ein Kontraktionsoperator erfüllt das Erfolgspostulat, wenn der Trigger nicht im Kontraktionsresultat enthalten ist.

(AGM-K 4) $\alpha \notin BS \div \alpha$ (Erfolg/Success)

[8] Dieses Postulat wird auch unter dem Terminus *rational monotony* diskutiert.

[9] Auch das Hinzufügen der ergänzenden Postulate führt zu keiner Charakterisierung eines einzelnen Revisionsoperators.

Das dritte informelle Rationalitätskriterium fordert einen minimalen Verlust bei der Änderung einer Wissensbasis durch einen Trigger. Während es unter den Postulaten für Revisionsoperatoren $*$ keine konkrete Formalisierung dieses Rationalitätskriteriums gibt, beschreibt das Postulat zur Wiedergewinnung von Sätzen des Ausgangs-Belief-Sets (Recoverypostulat) eine starke Form von minimalem Informationsverlust für Kontraktionsoperatoren. Durch Hinzufügen des eliminierten Triggers α zum Kontraktionsresultat soll es möglich sein, das Ausgangs-Belief-Set vollständig zu rekonstruieren.

(AGM-K 5) $BS \subseteq (BS \div \alpha) + \alpha$ (Wiedergewinnung/Recovery)

Das Extensionalitätspostulat für Kontraktionsoperatoren besagt, dass das Kontraktionsresultat invariant bzgl. der syntaktischen Darstellung des Triggers ist.

(AGM-K 6) Wenn $\vdash_{\mathrm{Cn}} \alpha \leftrightarrow \beta$, dann $BS \div \alpha = BS \div \beta$
(Rechtsextensionalität/(Right) Extensionality)

Die beiden letzten Postulate sind die Entsprechungen der ergänzenden Postulate für Revisionsoperatoren. Postulat (AGM-K 7) schätzt die Kontraktion eines Belief-Sets BS mit einer Konjunktion von Sätzen $\alpha \wedge \beta$ nach unten ab durch den Schnitt der Kontraktionen mit den jeweiligen Konjunkten α und β.

(AGM-K 7) $BS \div \alpha \cap BS \div \beta \subseteq BS \div (\alpha \wedge \beta)$ (Konjunktion 1/Conjunction 1)

Für den Fall, dass das zweite Konjunkt β nicht im Kontraktionsresultat mit dem ersten Konjunkt α enthalten ist, schätzt das Postulat (AGM-K 8) die Kontraktion eines Belief-Sets BS mit einer Konjunktion von Sätzen $\alpha \wedge \beta$ nach oben ab; die Obermenge ist das Resultat der Kontraktion mit dem ersten Konjunkt α.

(AGM-K 8) Falls $\beta \notin BS \div \alpha$, dann $BS \div (\alpha \wedge \beta) \subseteq BS \div \alpha$. (Konjunktion 2/
Conjunction 2)

Die Parallelität in den Postulaten für Revisions- und Kontraktionsoperatoren drückt eine enge Verwandtschaft der beiden Operatoren aus, die zusätzlich durch die gegenseitige Definierbarkeit in Form der *Harper-* und *Levi-Identität* bestätigt wird.

Definition 2.3. Jedem Kontraktionsoperator $\div : \mathcal{BS}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{BS}_{\mathcal{L}}$ wird durch die Funktion $R(\cdot)$ über die *Levi-Identität* ein Revisionsoperator $R(\div) = *$ zugeordnet. Der Revisionsoperator $* : \mathcal{BS}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{BS}_{\mathcal{L}}$ ist für alle $BS \in \mathcal{BS}_{\mathcal{L}}$ und $\alpha \in \mathcal{L}$ festgelegt durch

$$BS * \alpha = (BS \div \neg\alpha) + \alpha \tag{2.2}$$

Mit der Levi-Identität kann aus einem Kontraktionsoperator $\div$ ein Revisionsoperator definiert werden. Die Revision von BS mit dem Trigger α wird dekomponiert in die zwei Schritte der Inkonsistenzauflösung durch Kontraktion mit der

Negation des Triggers gefolgt von der Expansion mit dem Trigger. Tatsächlich ist $*$ ein Revisionsoperator, der die AGM-Revisionspostulate erfüllt, sofern $\div$ die entsprechenden AGM-Kontraktionspostulate erfüllt. Genauer gilt:

Theorem 2.4. *(Gärdenfors und Rott, 1995, Theorem 3.3.1, S. 57) Falls ein Kontraktionsoperator $\div$ die Postulate (AGM-K 1)–(AGM-K 6) erfüllt, dann erfüllt $R(\div)$ die Postulate (AGM-R 1)–(AGM-R 6). Wenn darüber hinaus $\div$ das Postulat (AGM-K 7) bzw. (AGM-K 8) erfüllt, dann erfüllt $R(\div)$ das Postulat (AGM-R 7) bzw. (AGM-R 8).*

Die umgekehrte Darstellung eines Kontraktionsoperators durch einen Revisionsoperator erfolgt über die Harper-Identität.

Definition 2.5. Jedem Revisionsoperator $* : \mathcal{BS}_\mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{BS}_\mathcal{L}$ wird durch die Funktion $C(\cdot)$ über die *Harper-Identität* ein Kontraktionsoperator $C(*) = \div$ zugeordnet. Der Kontraktionsoperator $\div : \mathcal{BS}_\mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{BS}_\mathcal{L}$ ist für alle $BS \in \mathcal{BS}_\mathcal{L}$ und $\alpha \in \mathcal{L}$ festgelegt durch

$$BS \div \alpha = (BS * \neg\alpha) \cap BS \tag{2.3}$$

Ein Kontraktionsoperator ergibt sich aus einem Revisionsoperator durch zwei Teilschritte; zunächst wird das Ausgangs-Belief-Set mit dem negierten Trigger revidiert; danach wird das Revisionsresultat mit dem Ausgangs-Belief-Set geschnitten. Tatsächlich gilt, dass, wenn $*$ die AGM-Revisionspostulate erfüllt, der über die Harper-Identität definierte Kontraktionsoperator die AGM-Kontraktionspostulate erfüllt.

Theorem 2.6. *(Gärdenfors und Rott, 1995, Theorem 3.3.2, S. 57) Falls ein Revisionsoperator $*$ die Postulate (AGM-R 1)–(AGM-R 6) erfüllt, dann erfüllt $C(*)$ die Postulate (AGM-K 1)–(AGM-K 6). Wenn darüber hinaus $*$ das Postulat (AGM-R 7) bzw. (AGM-R 8) erfüllt, dann erfüllt $C(*)$ das Postulat (AGM-K 7) bzw. (AGM-K 8).*

Zusätzlich zu den Theoremen lässt sich feststellen, dass $R(\cdot), C(\cdot)$ inverse Operationen sind.

Beobachtung 2.7. *(Gärdenfors und Rott, 1995, S. 57–58) Für alle Revisions- bzw. Kontraktionsoperatoren $*, \div : \mathcal{BS}_\mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{BS}_\mathcal{L}$, die die AGM-Basispostulate für Revisionsoperatoren $*$ bzw. AGM-Basispostulate für Kontraktionsoperatoren $\div$ erfüllen, gilt:*

$$\begin{aligned} R(C(*)) &= * \\ C(R(\div)) &= \div \end{aligned}$$

Partial-Meet-Operatoren

Neben der Spezifikation von Kontraktions- und Revisionsoperatoren definieren AGM (Alchourrón et al., 1985) auch Operatoren, die diese Postulate erfüllen. Basis für diese *Partial-Meet-Revision* und *Partial-Meet-Kontraktion* genannten Operatoren ist das Konzept der Restmenge und einer darüber definierten Selektionsfunktion. Die *Restmenge* $BS \perp \alpha$ eines Belief-Sets BS modulo des Triggers α enthält diejenigen Teilmengen von BS, aus denen nicht der Trigger folgt und die in diese Eigenschaft inklusionsmaximal sind.[10] D.h. für eine Menge X gilt $X \in BS \perp \alpha$ genau dann, wenn:

1. $X \subseteq BS$;

2. $\alpha \notin \mathrm{Cn}(X)$;

3. Es gibt keine Menge X', so dass $X \subset X' \subseteq BS$ und $\alpha \notin \mathrm{Cn}(X')$, d.h. X ist inklusionsmaximal bzgl. der ersten beiden Eigenschaften.

$X \in BS \perp \alpha$ wird *ein Rest von BS durch α* genannt. Aus der Maximalitätsbedingung und der Tatsache, dass BS ein Belief-Set ist, folgt insbesondere, dass alle Restmengen X ebenfalls Belief-Sets sind.

Man kann sich die Restmengen als Szenarien veranschaulichen, unter denen das Belief-Set durch minimale Änderung mit der Negation des Triggers kompatibel gemacht wird. Da keine der Restmengen per se gegenüber den anderen Restmengen priorisiert ist, wird durch eine Selektionsfunktion eine Teilmenge $\gamma(BS \perp \alpha)$ von $BS \perp \alpha$ ausgezeichnet, die für das Resultat der Partial-Meet-Kontraktions- und -Revisionsoperatoren bestimmend ist. Eine Selektionsfunktion gemäß AGM (Alchourrón et al., 1985) wird wie folgt definiert:[11] Sei $BS \in \mathcal{BS}_{\mathcal{L}}$ ein Belief-Set. Eine *AGM-Selektionsfunktion* γ für BS ist eine Funktion

$$\gamma : \mathrm{Pot}(\mathcal{BS}_{\mathcal{L}}) \longrightarrow \mathrm{Pot}(\mathcal{BS}_{\mathcal{L}}),$$

so dass für alle Sätze α gilt:

1. Falls $BS \perp \alpha \neq \emptyset$, dann $\emptyset \neq \gamma(BS \perp \alpha) \subseteq BS \perp \alpha$;

2. $\gamma(\emptyset) = \{BS\}$.

Da unter den durch eine Selektionsfunktion γ ausgezeichneten Mengen nicht weiter unterschieden wird, wird einer Fairnessregel folgend der Schnitt zwischen den ausgezeichneten Restmengen gebildet. Das Ergebnis der Schnittbildung ist das Resultat der Partial-Meet-Kontraktion (Gleichung (2.4)). Die Partial-Meet-Revision wird über die Levi-Identität aus der Partial-Meet-Kontraktion definiert.

[10] Vgl. die allgemeinere Definition A.36 in Anhang A, S. 245.

[11] Vgl. die allgemeinere Definition A.38 in Anhang A, S. 246.

Definition 2.8. Sei $BS \in \mathcal{BS}_{\mathcal{L}}$ ein Belief-Set, $\alpha \in \mathcal{L}$ ein Satz und γ eine Selektionsfunktion für BS. Dann sind die *Partial-Meet-Kontraktionsoperatoren* $\sim_\gamma$ und die *Partial-Meet-Revisionsoperatoren* $\sim_\gamma$ für ein Belief-Set BS definiert über

$$BS \sim_\gamma \alpha \;=\; \bigcap \gamma(BS \perp \alpha) \tag{2.4}$$

$$BS *_\gamma \alpha \;=\; \bigcap \gamma(BS \perp \neg\alpha) + \alpha \tag{2.5}$$

Als Grenzfälle der Partial-Meet-Operatoren werden Maxichoice-Operatoren und Full-Meet-Operatoren definiert.

Definition 2.9. Ein Partial-Meet-Kontraktionsoperator $\sim_\gamma$ für ein Belief-Set BS ist genau dann ein *Maxichoice-Operator* für BS, wenn die Selektionsfunktion γ genau eine Restmenge auswählt, d.h., wenn für alle $\alpha \in \mathcal{L}$ und $BS \perp \alpha \neq \emptyset$ gilt: $|\gamma(BS \perp \alpha)| = 1$.
Ein Partial-Meet-Kontraktionsoperator für ein Belief-Set BS ist genau dann ein *Full-Meet-Kontraktionsoperator* für BS, wenn zur Schnittbildung alle Restmengen ausgewählt werden, d.h., wenn für alle $\alpha \in \mathcal{L}$ und $BS \perp \alpha \neq \emptyset$ gilt: $\gamma(BS \perp \alpha) = BS \perp \alpha$. Full-Meet-Kontraktionsoperatoren $\sim$ lassen sich damit wie folgt darstellen: $BS \sim \alpha = \bigcap(BS \perp \alpha)$, falls $BS \perp \alpha \neq \emptyset$ und $BS \sim \alpha = BS$ sonst.

Die korrespondierenden *Maxichoice-Revisionsoperatoren* und *Full-Meet-Revisionsoperatoren* werden über die Levi-Identität definiert.

Maxichoice-Operatoren bilden das obere Extrem der Partial-Meet-Operatoren. Maxichoice-Revisionsoperatoren für Belief-Sets führen zu sehr starken Revisionsresultaten; für jeden Satz β gilt, dass aus dem Resultat einer Maxichoice-Revision entweder β oder seine Negation $\neg\beta$ folgt – ganz unabhängig davon, ob im Ausgangs-Belief-Set β enthalten ist.

Theorem 2.10. *(Alchourrón und Makinson (1982)) Ist $*$ ein Maxichoice-Revisionsoperator für ein Belief-Set $BS \in \mathcal{BS}_{\mathcal{L}}$ und ist $\alpha \in \mathcal{L}$ ein Satz, dann ist das Resultat $BS * \alpha$ maximal in dem Sinne, dass für alle $\beta \in \mathcal{L}$ $BS * \alpha \vdash_{\mathrm{Cn}} \beta$ oder $BS * \alpha \vdash_{\mathrm{Cn}} \neg\beta$ gilt.*

Full-Meet-Operatoren bilden das untere Ende der Partial-Meet-Operatoren. Die Full-Meet-Revision für Belief-Sets führt zu einer radikalen Konfliktauflösung, infolge der das Revisionsresultat nur noch Folgerungen des Triggers enthält.

Theorem 2.11. *(Alchourrón und Makinson (1982)) Sei $\sim$ ein Full-Meet-Kontraktionsoperator und $*$ der über die Levi-Identität definierte zugehörige Full-Meet-Revisionsoperator. BS sei ein Belief-Set aus $\mathcal{BS}_{\mathcal{L}}$.*

$$\textit{Für alle } \alpha \in BS \textit{ gilt:} \quad BS \sim \alpha = BS \cap \mathrm{Cn}(\neg\alpha).$$

$$\textit{Für alle } \alpha \textit{ mit } \neg\alpha \in BS \textit{ gilt:} \quad BS * \alpha = \mathrm{Cn}(\alpha).$$

Die Partial-Meet-Kontraktionsoperatoren erfüllen alle sechs AGM-Basispostulate. Darüber hinaus gilt jedoch, dass die Partial-Meet-Kontraktionsoperatoren die Klasse aller Kontraktionsoperatoren, die die sechs AGM-Basispostulate erfüllen, repräsentieren. Denn jeder Kontraktionsoperator $\div$, der die sechs AGM-Basispostulate erfüllt, lässt sich darstellen als Partial-Meet-Kontraktionsoperator, d.h., für ein Belief-Set BS und alle Sätze β gilt, dass es eine Selektionsfunktion γ gibt, so dass $BS \div \beta = BS \sim_\gamma \beta$ gilt.

Theorem 2.12. *(Alchourrón et al., 1985) Ein Operator $\div$ für ein Belief-Set $BS \in \mathcal{BS}_\mathcal{L}$ erfüllt die AGM-Basispostulate für die Kontraktion (AGM-K 1)–(AGM-K 6) genau dann, wenn er ein Partial-Meet-Kontraktionsoperator für BS ist, es also einen Partial-Meet-Kontraktionsoperator $\sim_\gamma$ für BS mit Selektionsfunktion γ gibt, so dass für alle $\alpha \in \mathcal{L}$ gilt: $BS \div \alpha = BS \sim_\gamma \alpha$.*

Als Korollar folgt die entsprechende Aussage für Revisionsoperatoren.

Theorem 2.13. *(Alchourrón et al., 1985; Gärdenfors, 1988) Ein Operator $*$ für ein Belief-Set $BS \in \mathcal{BS}_\mathcal{L}$ erfüllt die sechs AGM-Basispostulate für die Revision (AGM-R 1)–(AGM-R 6) genau dann, wenn er ein Partial-Meet-Revisionsoperator für BS ist, es also einen Partial-Meet-Revisionsoperator $*_\gamma$ für BS mit Selektionsfunktion γ gibt, so dass für alle $\alpha \in \mathcal{L}$ gilt: $BS * \alpha = BS *_\gamma \alpha$.*

Die ergänzenden Postulate (AGM-R 7) und (AGM-R 8) bzw. (AGM-K 7) und (AGM-K 8) werden i.A. von den Partial-Meet-Operatoren nicht erfüllt. Hierfür werden zusätzliche Bedingungen an die zu Grunde liegende Selektionsfunktion gestellt, die durch eine Präferenzstruktur über den Restmengen formalisiert werden. Die Menge der durch eine Selektionsfunktion ausgewählten Restmengen sollen gerade die Menge der besten (hier maximalen) Elemente bzgl. einer Relation $\leq$ sein. Sei ein Belief-Set BS vorgegeben. Eine Selektionsfunktion γ für BS und die zugehörigen Partial-Meet-Operatoren $*_\gamma, \sim_\gamma$ werden *relational* genannt, wenn es eine Relation $\leq\, \subseteq \mathrm{Pot}(BS) \times \mathrm{Pot}(BS)$ gibt, so dass für alle Sätze α die Menge der durch γ ausgewählten Restmengen in $BS \perp \alpha$ gerade die bzgl. $\leq$ maximalen Elemente sind:

$$\gamma(BS \perp \alpha) = \{BS' \in BS \perp \alpha \mid BS'' \leq BS' \text{ für alle } BS'' \in BS \perp \alpha\}$$

Ist die Relation $\leq$ darüber hinaus auch transitiv, so heißen die Selektionsfunktion und die zugehörigen Partial-Meet-Operatoren *transitiv-relational*. Es zeigt sich, dass die Menge aller AGM-Kontraktionspostulate für Kontraktionsoperatoren genau durch die Menge der transitiv-relationalen Kontraktionsoperatoren repräsentiert wird.

Theorem 2.14. *(Alchourrón et al., 1985) Für Belief-Sets BS erfüllt ein Operator $\circ$ genau dann alle AGM-Postulate (AGM-K 1)–(AGM-K 8) für Kontraktionsoperatoren, wenn er ein transitiv-relationaler Partial-Meet-Kontraktionsoperator ist.*

Als Korollar folgt die korrespondierende Aussage für Revisionsoperatoren.

Theorem 2.15. *(Alchourrón et al., 1985) Für Belief-Sets BS erfüllt ein Operator $\circ$ genau dann alle AGM-Postulate (AGM-R 1)–(AGM-R 8) für Revisionsoperatoren, wenn er ein transitiv-relationaler Partial-Meet-Revisionsoperator ist.*

2.1.2 Belief-Revision vs. Belief-Update

Eine wesentliche Grundannahme für die Modellierung in der Belief-Revision ist die, dass Konflikte zwischen der triggernden Information und dem Glaubenszustand auf vorher erworbene Falschinformation zurückzuführen ist. In dem Beispiel des Vogelkundlers etwa geht der Vogelkundler davon aus, dass einer der vorher erworbenen vier Glaubensinhalte, mit denen seine Beobachtung konfligiert, unabhängig von der Zeit, auf die sich der Glaubensinhalt bezieht, falsch sein muss. Konflikte eines anderen Typs entstehen, wenn der Glaubenszustand auf veralteter Information basiert und der Trigger zeitlich neuere Information enthält. Beispielsweise glaubt jemand an einem Dienstag noch, dass es Tickets für das Rockkonzert seiner Lieblingsband gibt. Er hat jedoch kein Geld dabei und nimmt sich vor, die Tickets am darauf folgenden Tag zu kaufen. Am Mittwoch sagt ihm der Verkäufer, dass es keine Tickets mehr gibt. Der Widerspruch zwischen seinem Glaubenszustand, gemäß dem es noch Tickets gibt, und der Aussage des Verkäufers am Mittwoch ist auf veraltete Information (und nicht Falschinformation) zurückzuführen.

Dieser Typ des Konflikts wird im so genannten *Belief-Update* behandelt.[12] Aufgrund der unterschiedlichen Konfliktdiagnose sind Operatoren zum Belief-Update keine Revisionsoperatoren. Der Unterschied zwischen Belief-Revision und Belief-Update lässt sich auf der Ebene der Postulate verdeutlichen.

Beispiel 2.16. (Nach Winslett (1988)) Ein Agent glaubt, dass sich auf einem Tisch entweder ein Buch (p) oder ein Magazin (q) befindet. Der Glaubenszustand des Agenten lässt sich durch das Belief-Set $\mathrm{Cn}((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$ beschreiben. Nun wird die Information gegeben, dass jemand ein Buch auf den Tisch gestellt hat (p). Die Anwendung eines AGM-Revisionsoperators $*$ zur Beschreibung des Nachfolgeglaubenszustands würde, da der Revisionsoperator $*$ die Postulate (AGM-R 3) und (AGM-R 4) erfüllt, das Belief-Set $\mathrm{Cn}(\{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q), p\})$ zurückgeben, gemäß dem auf dem Tisch kein Magazin ist, obwohl kein Hinweis darauf besteht,

[12] Keller und Winslett (1985), Katsuno und Mendelzon (1991), Herzig und Rifi (1998, 1999)

dass ein Magazin entfernt worden ist. Diese nicht plausible Folgerung verdeutlicht, dass die AGM-Postulate (AGM-R 3) und (AGM-R 4) nicht zu den Postulaten gehören können, die das Verhalten von Update-Operatoren $\diamond$ spezifizieren.

Ein alternatives Postulat, das in der Axiomatisierung von Updateoperatoren $\diamond$ gemäß Katsuno und Mendelzon (1991) die Rolle der Postulate (AGM-R 3) und (AGM-R 4) einnimmt, ist das Idempotenzpostulat.[13] Es besagt, dass wenn der Trigger bereits im Glaubenszustand gilt, dann ein Hinzufügen des Triggers keine Änderung bewirkt.

(KM-Idem) Falls $\alpha \in BS$, dann $BS \diamond \alpha = BS$. (KM-Idempotenz)

Aus dem Idempotenzpostulat folgt insbesondere, dass inkonsistente Belief-Sets nach einem Update inkonsistent bleiben. Entsprechend ist auch das zugehörige Konsistenzpostulat für Update-Operatoren schwächer als das Konsistenzpostulat für Revisionsoperatoren. Es fordert die Konsistenz des Resultats nur in dem Falle, in dem neben dem Trigger auch das Belief-Set konsistent ist.

(KM-Kons) Falls $BS \not\vdash_{\mathrm{Cn}} \bot$ und $\not\vdash_{\mathrm{Cn}} \neg\alpha$, dann $BS \diamond \alpha \not\vdash_{\mathrm{Cn}} \bot$. (KM-Konsistenz)

Die Diskussion zur Unterscheidung zwischen Revision und Update zeigt, dass unterschiedliche Erklärungen für die Gründe eines Konflikts zu unterschiedlichen Postulaten und Operatoren führen können. In dem hier entwickelten Reinterpretationsansatz wird eine von der Belief-Revision und vom Belief-Update abweichende Konfliktdiagnose gegeben, die in unterschiedlichen Postulaten und Operatoren resultieren.[14]

2.1.3 Revision für endliche Wissensbestände

Belief-Bases

Für die Reinterpretationsoperatoren, welche in dieser Arbeit entwickelt werden, bildet der AGM-Ansatz einen wichtigen Ausgangspunkt. Neben AGM-ähnlichen Postulaten werden auch konkrete Klassen von Reinterpretationsoperatoren definiert, die auf die Restmengenkonstruktion der Partial-Meet-Operatoren zurückgreifen. Für die Reinterpretationsoperatoren werden jedoch zusätzliche Erweiterungen des AGM-Ansatzes genutzt, die in der einen oder anderen Form auch in der Belief-Revisionsliteratur nach AGM diskutiert werden.

Eine naheliegende Erweiterung ist die, Operatoren nicht auf Belief-Sets einzuschränken, sondern ihre Anwendung auf *Belief-Bases*, d.h. nicht zwingend logisch

[13] Im Aufsatz von Katsuno und Mendelzon (1991) ist es das zweite Postulat (U2), formuliert für aussagenlogische Formeln statt für Belief-Sets.

[14] Vgl. Kapitel 3.

abgeschlossenen Satzmengen einer Sprache $\mathcal{L}$, zu untersuchen. Die Repräsentation von Glaubenszuständen durch logisch abgeschlossene Mengen im AGM-Ansatz ist dadurch motiviert, dass nicht das tatsächlich von einem Agenten explizit Geglaubte modelliert werden soll, sondern das, was aus dem Geglaubten folgt. Der logische Abschluss führt zu berechnungstechnisch schwer handhabbaren unendlichen Mengen von Sätzen. Daher wird in der Belief-Revisionsliteratur nach AGM auch die Revision von Belief-Sets, die endlich repräsentierbar sind, und von Belief-Bases untersucht. Aus den Operatoren für Belief-Bases ergeben sich Wissensverarbeitungsmechanismen, die in realistischen Agentenmodellen eingesetzt werden können.

Die Betrachtung von Belief-Bases statt von Belief-Sets führt zu Operatoren, die in einigen wesentlichen Punkten von den AGM-Operatoren abweichen können. Belief-Bases ermöglichen eine zusätzliche dynamische Strukturierung des Glaubenszustandes, die die syntaktische Darstellung der Belief-Bases in der Revisionsoperation berücksichtigt. Dieser Zugang führt zu syntaxsensitiven Belief-Base-Operatoren (vgl. Hansson (1993a)), die das Postulat der Linksextensionalität nicht erfüllen. Sind z.B. zwei semantisch äquivalente, aber syntaktisch verschiedene Belief-Bases $B_1 = \{p, q\}$ und $B_2 = \{p \wedge q\}$ gegeben, kann Belief-Base-Revision mit dem Trigger $\neg p$ zu unterschiedlichen Resultaten führen. Eine intuitive Begründung für den Unterschied lässt sich durch unterschiedliche Rechtfertigungsstrukturen für B_1 und B_2 geben. Während in B_1 zwei Aussagen p, q vorliegen, die auf unterschiedliche Weise erworben wurden und/oder unterschiedliche Rechtfertigungen aufweisen, kommt in B_2 nur eine Aussage $p \wedge q$ vor. Die Teilaussagen p und q in B_2 erben ihre Rechtfertigung von $p \wedge q$. Wenn sich nun herausstellt, dass $\neg p$ wahr ist, fällt die Rechtfertigung für p weg. Für B_1 hat das die Folge, dass p eliminiert werden muss, aber q aufrecht erhalten werden kann, da q eine (möglicherweise) andere Rechtfertigung besitzt. Für B_2 hat die Integration des Triggers $\neg p$ zur Folge, dass $p \wedge q$ eliminiert werden muss und q nicht aufrecht erhalten werden kann, da es dieselbe Rechtfertigungsbasis hat wie p.

Die AGM-Postulate für Revisionsoperatoren lassen sich ohne größere Veränderung auf Belief-Bases übertragen.[15] Auch die Konstruktion für Partial-Meet-Revisionsoperatoren lassen sich auf Belief-Bases anwenden.

Eine wesentliche Adaption der AGM-Ansatzes auf Belief-Bases besteht in der Anpassung des Expansionsoperators. Der Expansionsoperator für Belief-Bases B wird zu einer einfachen mengentheoretischen Vereinigung der Belief-Base B und des Triggers α.

$$B + \alpha = B \cup \{\alpha\}$$

[15] Für eine Besprechung von Kontraktionspostulaten für Belief-Bases siehe Hansson (1993a), Hansson (1999b).

Mit dieser Neudefinition des Expansionsoperators und der Ersetzung von Belief-Sets BS durch Belief-Bases B können sämtliche AGM-Postulate umgeschrieben werden. Das aus der Umschreibung resultierende neue Abschlusspostulat macht für Belief-Bases keinen Sinn, da das der Idee der kategorialen Übereinstimmung (categorial matching) von Ausgangs- und Endzustand widerspräche. Um Repräsentationstheoreme, wie sie für die AGM-Operatoren gelten, auch für Operatoren über Belief-Bases beweisen zu können, werden jedoch stärkere Adaptionen vorgenommen bzw. andere Postulate eingeführt. Hansson bespricht (u.a.) folgende Belief-Base-Postulate für Revisionsoperatoren[16]. Es seien $B, B' \subseteq \mathcal{L}$ Belief-Bases und $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$. Die Postulate (HR 1)–(HR 3) sind die natürlichen Entsprechungen der AGM-Revisionspostulate zum Erfolg, zur Konsistenz und zur Inklusion (Expansion 1).

(HR 1) $\alpha \in B * \alpha$ (Erfolg/Success)

(HR 2) Wenn $B * \alpha \vdash_{\mathrm{Cn}} \perp$, dann $\alpha \vdash_{\mathrm{Cn}} \perp$. (Konsistenz/Consistency)

(HR 3) $B * \alpha \subseteq B + \alpha$ (Inklusion/Inclusion)

Das neu hinzukommende Relevanzpostulat (HR 4) drückt eine Form von minimalem Verlust aus. Wenn ein Satz β, der im Ausgangs-Belief-Base vorkommt, nicht im Revisionsresultat enthalten ist, muss es Sätze in B geben, die für sich konsistent sind, die aber zusammen mit β inkonsistent sind.[17]

(HR 4) Wenn $\beta \in B$ und $\beta \notin B * \alpha$, dann gibt es eine Menge B', so dass gilt:

- $B * \alpha \subseteq B' \subseteq B \cup \{\alpha\}$;
- $B' \not\vdash_{\mathrm{Cn}} \perp$;
- $B' \cup \{\beta\} \vdash_{\mathrm{Cn}} \perp$.

Das Uniformitätspostulat (HR 5) verallgemeinert das Postulat zur Rechtsextensionalität.

(HR 5) Falls für alle $B' \subseteq B$ genau dann $B' \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathrm{Cn}} \perp$ der Fall ist, wenn $B' \cup \{\beta\} \vdash_{\mathrm{Cn}} \perp$ der Fall ist, ist $B \cap (B * \alpha) = B \cap (B * \beta)$. (Uniformität)

Die Restmengenkonstruktion für Belief-Sets lässt sich ohne zusätzliche Änderungen auf Belief-Bases übertragen, so dass sich auch für Belief-Bases Partial-Meet-Operatoren, insbesondere Maxichoice- und Full-Meet-Operatoren zur Kontraktion definieren lassen. Über die Levi-Identität ergeben sich Revisionsoperatoren für Belief-Bases. Die resultierenden Revisionsoperatoren für Belief-Bases $*$

[16] Hansson (1993a), Hansson (1999b)

[17] Dieses Postulat wird in Kapitel 5 genauer analysiert.

werden *interne Revisionsoperatoren* genannt.[18] Da Belief-Bases nicht zwingend abgeschlossen sind, weisen Maxichoice- und Full-Meet-Operatoren über Belief-Bases nicht die unplausiblen Eigenschaften aus den Theoremen 2.10 und 2.11 auf.

Interne Partial-Meet-Revisionsoperatoren lassen sich genau durch die Postulate (HR 1)–(HR 5) charakterisieren.

Theorem 2.17. *(Hansson, 1993a) Ein Operator $*$ für eine Belief-Base B ist genau dann ein interner Partial-Meet-Revisionsoperator, wenn er die Postulate (HR 1)–(HR 5) erfüllt.*

Knowledge-Bases

Obwohl mit der Erweiterung auf Belief-Bases Wissensverarbeitungsmechanismen für realistischere Agentenmodelle (mit endlich beschreibbaren Wissenszuständen) modelliert werden können, widerspricht die Syntaxabhängigkeit der Idee der Verarbeitung von Wissen auf dem Wissenslevel gemäß Newell (1982). Das Wissen von Agenten wird in Wissensbasen gespeichert, die anders als Belief-Bases von der besonderen (syntaktischen) Repräsentation unabhängig sein sollen. Dalal (1988) formuliert die Syntaxunabhängigkeit als ein Prinzip für Revisionsoperatoren: Die durch Revision resultierende Wissensbasis soll nicht von der syntaktischen Darstellung der Trigger (das entspricht dem Extensionalitätspostulat von AGM), aber auch nicht von der syntaktischen Darstellung der Ausgangswissensbasis abhängen (Linksextensionalität). Insbesondere für Operatoren, die auf Wissensbasen operieren, die zur Repräsentation von Ontologien verwendet werden, ist Linksextensionalität eine wünschenswerte Eigenschaft. Für Belief-Base-Operatoren, die das Inklusionspostulat (HR 3) erfüllen, kann Linksextensionalität nicht garantiert werden.

In KI-Arbeiten zur Belief-Revision werden Revisionsoperatoren untersucht, die eine Revision auf dem Wissenslevel realisieren.[19] In den Ansätzen von Dalal (1988) und Katsuno und Mendelzon (1992) werden Operatoren definiert, die als linkes Argument eine endliche Wissensbasis, repräsentiert durch eine aussagenlogische Formel, erhalten. Die semantisch konstruierten Revisionsoperatoren basieren auf Ordnungsrelationen und gewährleisten die Unabhängigkeit von der syntaktischen Darstellung der Wissensbasen; werden zwei logisch äquivalente aussagenlogische Formeln zur Repräsentation einer Wissensbasis gewählt, so sind die Ergebnisse der Revision bzgl. beider Formeln als linkem Argument (bei gleichem rechten Argument) logisch äquivalent.

[18]Anders als bei Belief-Sets lassen sich für Belief-Bases auch externe Revisionsoperatoren definieren, bei denen zuerst der Trigger hinzugefügt und dann die Inkonsistenz behoben wird.

[19]Dalal (1988), Nebel (1989), Hansson (1993b), Katsuno und Mendelzon (1992), Delgrande und Schaub (2003)

Delgrande und Schaub (2003) definieren Revisions- und Kontraktionsoperatoren, die ebenfalls unabhängig von der syntaktischen Repräsentation des linken Arguments sind. Ihr Ansatz basiert auf der Einführung von Hilfssätzen (Biimplikationen), die zur Prüfung von Konsistenzbedingungen in der Revision bzw. Kontraktion verwendet werden, die jedoch nicht im Revisions- bzw. Kontraktionsresultat enthalten sind. Die Grundidee der Reinterpretation, die in dieser Arbeit entwickelt wird, ist im Ansatz von Delgrande und Schaub implizit vorhanden; eine detaillierte Darstellung von und Auseinandersetzung mit dem Ansatz von Delgrande und Schaub wird in Abschnitt 2.4 gegeben.

Nebel (1989) und Hansson (1993b) geben eine Wissenslevelanalyse von Revisions- und Kontraktionsoperatoren für Belief-Bases. Hierzu werden Belief-Base-Operatoren Operatoren für Belief-Sets zugeordnet. Ist $B \subseteq \mathcal{L}$ eine Belief-Base und $\circ$ ein Kontraktions- bzw. Revisionsoperator, so wird der *Abschluss* von $\circ$ als Operator $\circ'$ definiert, der auf dem Abschluss der Belief-Base B operiert (Hansson, 1993b):

$$\text{Für alle } \alpha \in \mathcal{L}\text{: } \mathrm{Cn}(B) \circ' \alpha = \mathrm{Cn}(B \circ \alpha) \tag{2.6}$$

Ein Operator $\circ'$ für ein Belief-Set BS wird *basisgenerierter Kontraktions- bzw. Revisionsoperator* genannt, wenn es eine Belief-Base B und einen Operator $\circ$ für diese Belief-Base gibt, so dass $\circ'$ der Abschluss von $\circ$ ist, also Gleichung (2.6) gilt. Die basisgenerierten Kontraktions- und Revisionsoperatoren beschreiben die Effekte der zu Grunde liegenden Belief-Base-Operatoren auf dem Wissenslevel.

2.1.4 Triggernde Belief-Bases

Statt eines einzelnen Satzes kann auch eine Belief-Base (oder ein Belief-Set) als Trigger angesehen werden. Diese Erweiterung resultiert in so genannten *multiplen* Revisions- und Kontraktionsoperatoren. Obwohl für multiple Revisionsoperatoren linkes und rechtes Argument von der gleichen Kategorie sind, ist die multiple Revision weiterhin eine echte Revisionsoperation und damit asymmetrisch, da sie die Integration eines (mengenförmigen) Triggers in eine Belief-Base beschreibt. Insofern sind multiple Operatoren von *Merge-Operatoren* gemäß Fuhrmann (Fuhrmann, 1997, S. 79ff) zu unterscheiden, die die genannte Asymmetrie aufbrechen.

Für multiple Revision gibt es eine naheliegende Adaption der AGM-Postulate.[20] In der Adaption lässt sich auch gleich die Erweiterung der linken Argumente auf Belief-Bases einschließen. Zur Abdeckung dieser beiden Fälle (linkes Argument ist immer ein Belief-Set bzw. linkes Argument ist eine Belief-Base) wird der Expansionsoperator $+$ in Abhängigkeit von der intendierten Anwendung definiert. Falls das linke Argument B_1 immer ein Belief-Set ist, wird der Expansionsoperator definiert über $B_1 + B_2 = \mathrm{Cn}(B_1 \cup B_2)$. Wird kein Belief-Set als linkes Argument vorausgesetzt, wird der Expansionsoperator definiert über $B_1 + B_2 = B_1 \cup B_2$. Wie auch im Falle der Belief-Base-Revision für einfache Trigger gilt, dass es weitere (hier nicht aufgelistete) Postulate gibt, die spezifisch auf Belief-Bases ausgerichtet sind. Die Adaption (zu Teilen gemäß Zhang und Foo (2001)) ergibt folgende Postulate. Es seien $* : \mathrm{Pot}(\mathcal{L}) \times \mathrm{Pot}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{Pot}(\mathcal{L})$ ein Operator und $B_1, B_2 \subseteq \mathcal{L}$ Belief-Bases.

(MR 1) Falls $B_1 \in \mathcal{BS}_\mathcal{L}$, dann auch $B_1 * B_2 \in \mathcal{BS}_\mathcal{L}$. (Kategorische Übereinstimmung/Categorical matching)

(MR 2) $B_2 \subseteq B_1 * B_2$ (Erfolg/Success)

(MR 3) $B_1 * B_2 \subseteq B_1 + B_2$ (Expansion 1)

(MR 4) Falls $B_1 \cup B_2 \nvdash_{\mathrm{Cn}} \bot$, gilt $B_1 + B_2 \subseteq B_1 * B_2$. (Expansion 2)

(MR 5) Falls $B_1 * B_2 \vdash_{\mathrm{Cn}} \bot$, ist $B_2 \vdash_{\mathrm{Cn}} \bot$. (Konsistenz/Consistency)

(MR 6) Wenn $\mathrm{Cn}(B_2) = \mathrm{Cn}(B_3)$, dann $\mathrm{Cn}(B_1 * B_2) = \mathrm{Cn}(B_1 * B_3)$. (Rechtsextensionalität/(Right) Extensionality)

(MR 7) $B_1 * (B_2 \cup B_3) \subseteq (B_1 * B_2) + B_3$ (Konjunktion 1/Conjunction 1)

(MR 8) Wenn $(B_1 * B_2) \cup B_3 \nvdash_{\mathrm{Cn}} \bot$, dann $(B_1 * B_2) + B_3 \subseteq B_1 * (B_2 \cup B_3)$. (Konjunktion 2/Conjunction 2)

[20] Für multiple Kontraktion ergibt sich ein zusätzlicher Freiheitsgrad, der auf unterschiedliche Erfolgsbedingungen zurückgeführt wird. Bei der *Paket-Kontraktion* (*package contraction*) wird die erfolgreiche Elimination aller Sätze in der triggernden Belief-Base gefordert; die triggernde Belief-Bases wird in diesem Fall konjunktiv interpretiert. Bei der *Auswahl-Kontraktion* (*choice contraction*) wird nur die erfolgreiche Elimination mindestens eines der Sätze in der triggernden Belief-Base gefordert; in diesem Fall wird die triggernde Belief-Base disjunktiv interpretiert (Fuhrmann, 1997).

2.1.5 Iterierte Revision

Ein Wissensänderungsoperator $\circ$ gilt als iterierbar, wenn er beginnend mit einer beliebigen (eventuell strukturierten) Belief-Base B auf eine Folge von Triggern $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ angewandt werden kann, so dass eine neue (eventuell strukturierte) Belief-Base $B \circ \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle = (\ldots (B \circ \alpha_1) \circ \alpha_2) \circ \cdots \circ \alpha_n$ resultiert. Die Iterierbarkeit eines Revisionsoperators ist eine Grundvoraussetzung, um Integrationsszenarien modellieren zu können, in denen Information sequenziell integriert wird. In den AGM-Postulaten gänzlich ausgespart ist die Spezifikation der Operatoren unter wiederholter Anwendung des Operators bei einer Folge von Triggern. Aus den AGM-Postulaten folgen Aussagen, die eine wiederholte (iterierte) Anwendung von Wissensänderungsoperatoren betreffen. So lässt sich z.B. leicht zeigen, dass AGM-Revisionsoperatoren nicht kommutativ sind, d.h., dass im Allgemeinen nicht für alle Belief-Sets BS und Sätze α, β gilt, dass $(BS * \alpha) * \beta = (BS * \beta) * \alpha$. Doch es gibt keine Postulate, die konkret eine iterierte Anwendung von Revisionsoperatoren beschreiben.

Tatsächlich sind die AGM-Partial-Meet-Operatoren nicht iterierbar, da sie relativ zu einem konkreten Belief-Set erklärt werden. Es ist möglich, AGM-Operatoren durch eine Erweiterung des Begriffs einer Selektionsfunktion iterierbar zu machen. Doch es müssen auch Postulate ergänzt werden, die ein adäquates Verhalten für die iterierte Anwendung von Wissensänderungsoperatoren spezifizieren.

Darwiche und Pearl (1994) diskutieren vier grundlegende Iterationspostulate. Ihre Postulate beschreiben, wie die Revision mit zwei Triggern α, β von der Revision in den Schritten davor abhängen dürfen.

Das erste Postulat (DP 1) besagt, dass, wenn zwei Trigger zu integrieren sind, von denen der zweite (β) logisch stärker ist als der erste Trigger (α), dann die schrittweise Integration von beiden nichts anderes als die Integration des (zweiten) stärkeren Triggers allein liefert.

(DP 1) Wenn $\beta \vdash_{\mathrm{Cn}} \alpha$, dann ist $(BS * \alpha) * \beta = BS * \beta$.

Das zweite Postulat besagt, dass wenn zwei inkompatible Trigger zu integrieren sind, die schrittweise Integration von beiden nichts anderes liefert als die Integration des zweiten Triggers allein.

(DP 2) Wenn $\beta \vdash_{\mathrm{Cn}} \neg\alpha$, dann ist $(BS * \alpha) * \beta = BS * \beta$.

Das dritte Postulat besagt, dass kein Trigger zu einer Evidenz gegen sich selbst führen darf.

(DP 3) Wenn $BS * \beta \vdash_{\mathrm{Cn}} \alpha$, dann ist $(BS * \alpha) * \beta \vdash_{\mathrm{Cn}} \alpha$.

Postulat (DP 4) besagt, dass wenn die Integration des zweiten Triggers β mit dem ersten Trigger α kompatibel ist, dann die Integration beider Trigger ebenfalls kompatibel mit dem ersten Trigger ist.

(DP 4) Wenn $BS * \beta \nvdash_{\mathrm{Cn}} \neg\alpha$, dann ist $(BS * \alpha) * \beta \nvdash_{\mathrm{Cn}} \neg\alpha$.

Die Iterationspostulate von Darwiche und Pearl bilden in der Belief-Revisionsliteratur den Ausgangspunkt für eine detaillierte Analyse iterierter Revision. Eine eingehendere Diskussion dieser Postulate wird in Kapitel 6 gegeben. Hier wird insbesondere untersucht, ob sich die Postulate (DP 1)–(DP 4) als Adäquatheitskriterien für die sequenzielle Integration eignen und ob die Reinterpretationsoperatoren diese Postulate erfüllen.

2.1.6 Nicht-priorisierte Revision

AGM-Revisionsoperatoren geben dem Trigger Priorität gegenüber den im Ausgangsglaubenszustand geltenden Aussagen. Die Korrektheit des Triggers wird nicht angezweifelt. Diese Annahme ist im Erfolgspostulat (Successpostulat) formalisiert. Nicht-priorisierte Revision lässt diese Annahme fallen, indem sie dem Trigger nur noch die Rolle zukommen lässt, eine Änderungen des Glaubenszustands zu bewirken, aber nicht mehr garantiert, dass der Trigger im Nachfolgeglaubenszustand gilt. Auch in dieser Arbeit wird eine Klasse von Reinterpretationsoperatoren definiert, die nicht das ursprüngliche Erfolgspostulat erfüllt, sondern nur eine Abschwächung. In der Literatur existieren unterschiedliche Typen nichtpriorisierter Revision, die in fünf Kategorien eingeteilt werden können (Hansson, 1999a, pp. 413–414). Es bezeichne α den Trigger und B die initiale Belief-Base oder das initiale Belief-Set.

1. Es wird zunächst entschieden, ob der Trigger α akzeptiert wird oder verworfen wird. Falls α akzeptiert wurde, wird B (bzgl. eines vorgegebenen Revisionsoperators) mit α revidiert.

2. Triff (in einem Integrationsschritt) eine Auswahl zwischen den Sätzen in B und α.

3. Erweitere B in einem Expansionsschritt um α zu $B+\alpha$ und dann konsolidiere $B + \alpha$, d.h., mache $B + \alpha$ konsistent.

4. Bestimme zunächst den Anteil $f(\alpha)$ von α, der akzeptiert werden soll, und revidiere dann B (bzgl. eines vorgegeben Revisionsoperators) mit $f(\alpha)$.[21]

5. Triff (in einem Integrationsschritt) eine Auswahl zwischen den Sätzen in B und den Elementen von $\mathrm{Cn}(\alpha)$.

[21] Siehe Hansson und Ferme (1999) und die Typ-1-Operatoren in Kapitel 3.

2.1.7 Sphärenbasierte Ansätze

Das theoretische Fundament für den in Kapitel 7 dargestellten Ansatz der auf Konzeptkontraktion beruhenden Ontologierevision sind Groves sphärenbasierte Revisionsoperatoren (Grove, 1988). Der sphärenbasierte Ansatz von Grove ist eine Verallgemeinerung der vom Philosophen und Logiker David Lewis (Lewis, 1973) angestellten Überlegungen im Rahmen der kontrafaktischen Logik, in der systematisch kontrafaktische Aussagen wie z.B. „Wenn Hunde fliegen könnten, müssten Herrchen und Frauchen mit Segelflugzeugen Gassi gehen“ behandelt werden.

Grove definiert die sphärenbasierten Operatoren für die Menge von aussagenlogischen Sätzen $\mathrm{Satz}(\mathcal{V}_{\mathrm{AL}})$.[22] In Groves Ansatz wird die Revision von Belief-Sets BS einer aussagenlogischen Sprache nicht wie im klassischen AGM-Ansatz durch Löschung und Erweiterung der in ihnen enthalten Sätze definiert. Stattdessen ist der Gegenstand der Revision die Menge aller mit dem Belief-Set kompatiblen maximal konsistenten Mengen der gesamten Menge von Sätzen $\mathrm{Satz}(\mathcal{V}_{\mathrm{AL}})$. Ich folge der anschaulichen Redeweise von Hansson (1999b) und nenne jede maximal konsistente Menge in $\mathrm{Satz}(\mathcal{V}_{\mathrm{AL}}) \perp\perp$ eine *mögliche Welt*. Diese Redeweise geht darauf zurück, dass maximal konsistente Mengen $X \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_{\mathrm{AL}}) \perp\perp$ Konsistenz- und Abschlussbedingungen erfüllen, die die Bildung einer sie wahr machenden Wahrheitswertbelegung ermöglichen.

Beobachtung 2.18. *Für alle Restmengen $X \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_{AL}) \perp\perp$ und alle Sätze $\alpha, \beta \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_{AL})$ gilt:*

- $\perp \notin X$
- *Entweder $\alpha \in X$ oder $\neg\alpha \in X$.*
- *$\alpha \vee \beta \in X$ genau dann, wenn $\alpha \in X$ oder $\beta \in X$.*
- *$\alpha \wedge \beta \in X$ genau dann, wenn $\alpha \in X$ und $\beta \in X$.*

Aus der Beobachtung 2.18 folgt, dass jedes $X \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_{\mathrm{AL}}) \perp\perp$ eine eindeutig bestimmte sie wahr machende Wahrheitswertbelegung[23] $\mathcal{I}$ hat. Diese Wahrheitswertbelegung $\mathcal{I}$ wird definiert über: Für alle Aussagensymbole p sei $p^{\mathcal{I}} = 1$ genau dann, wenn $p \in X$.

Eine *Proposition* ist eine Menge von möglichen Welten. Die Menge aller mit einem Belief-Set BS kompatiblen möglichen Welten wird in der Literatur auch die Menge der *Modelle* von BS[24] genannt und ist definiert über

$$[BS] = \{X \mid BS \subseteq X \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_{\mathrm{AL}}) \perp\perp\}$$

[22] Vgl. Anhang A, Definition A.1, S. 221.

[23] Vgl. Anhang A, S. 231.

[24] Für prädikatenlogische Sprachen kann ein Modell in diesem neuen Sinne mehrere Modelle im Sinne von sie wahr machende prädikatenlogische Interpretationen haben.

Die Menge $[BS]$ ist die durch das Belief-Set BS repräsentierte Proposition. Zwischen Propositionen und Belief-Sets bestehen folgende Beziehungen.

Beobachtung 2.19. *(Hansson, 1999b, Observation 3.27)*

1. *Für Belief-Sets BS gilt $\bigcap[BS] = BS$.*

2. *Für Propositionen $\mathcal{W}$ ist $\bigcap\mathcal{W}$ ein Belief-Set.*

Mittels der möglichen Welten lassen sich so genannte *propositionale Operatoren* $\circ^{prop}$ zur Expansion, Revision und Kontraktion definieren, die nicht Belief-Sets und Formeln als Argumente haben, sondern als linkes Argument eine Proposition $\mathcal{W}$ und als rechtes Argument die durch eine Formel α repräsentierte Proposition $[\alpha]$. Auf der Basis von propositionalen Selektionsfunktionen $\circ^{prop}$ lassen sich unter Ausnutzung der Beobachtung 2.19.2 Operatoren $\circ$ definieren, die auf Belief-Sets BS und Formeln operieren:

$$BS \circ \alpha = \bigcap([BS] \circ^{prop} [\alpha]) \tag{2.7}$$

Die sphärenbasierten Operatoren von Grove (1988) können gemäß der in Gleichung (2.7) genannten Konstruktion analysiert werden. Wird ein Belief-Set BS unter einer triggernden Information α kontrahiert bzw. revidiert, dann werden zunächst die Modelle von BS und α gebildet. Anschließend wird ein sphärenbasierter, für Propositionen definierter Operator angewandt und das Ergebnis schließlich durch Schnittbildung von der Ebene der möglichen Welten zurück auf die Ebene der Belief-Sets geholt.

Ein Sphärensystem ist für eine Proposition $\mathcal{W}$ erklärt.

Definition 2.20. (Grove, 1988, S. 158) Eine Menge $\mathcal{S} \subseteq \text{Pot}(\text{Satz}(\mathcal{V}_{\text{AL}}) \perp \perp)$ ist ein *Sphärensystem für $\mathcal{W}$*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mathcal{S}$ ist bzgl. Inklusion total geordnet, d.h. für alle $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ gilt $S_1 \subseteq S_2$ oder $S_2 \subseteq S_1$.

2. $\mathcal{W}$ ist kleinstes Element im Sphärensystem, d.h. $\mathcal{W} \in \mathcal{S}$ und für alle $S \in \mathcal{S}$ gilt $\mathcal{W} \subseteq S$.

3. $\text{Satz}(\mathcal{V}_{\text{AL}}) \perp \perp$ ist das größte Element im Sphärensystem, d.h. $\text{Satz}(\mathcal{V}_{\text{AL}}) \perp \perp$ ist in $\mathcal{S}$ enthalten und für alle $S \in \mathcal{S}$ gilt $S \subseteq \text{Satz}(\mathcal{V}_{\text{AL}}) \perp \perp$.

4. Für alle Sätze α gilt: Wenn es eine Sphäre $S \in \mathcal{S}$ gibt mit $[\alpha] \cap S \neq \emptyset$, dann gibt es eine inklusionsminimale Sphäre $S_{\min} \in \mathcal{S}$ mit $[\alpha] \cap S_{\min} \neq \emptyset$.

Die Funktion $c_{\mathcal{S}}$ wähle zu jedem $[\alpha]$ die gemäß 4. existierende minimale Sphäre aus, deren Schnitt mit $[\alpha]$ nicht leer ist. Wegen der dritten Bedingung gibt es genau dann keine Sphäre, deren Schnitt mit $[\alpha]$ nicht leer ist, wenn $[\alpha] = \emptyset$. In diesem Falle wird $c_{\mathcal{S}}([\alpha]) = c_{\mathcal{S}}(\emptyset) = \text{Satz}(\mathcal{V}_{\text{AL}}) \perp\perp$ gesetzt. Es bezeichne weiter

$$f_{\mathcal{S}}([\alpha]) = c_{\mathcal{S}}([\alpha]) \cap [\alpha]$$

die Schnittmenge von $[\alpha]$ und der gemäß der vierten Bedingung existierenden minimalen Sphäre $S_{\min}$. Die Sphären um eine Proposition $\mathcal{W}$ können als Abschwächungen („fall-backs") von $\mathcal{W}$ verstanden werden. Sphärenrevision und -kontraktion auf der Ebene der möglichen Welten lassen sich damit wie folgt definieren.

Definition 2.21. (Hansson, 1999b) Für eine Proposition $\mathcal{W}$, ein Sphärensystem $\mathcal{S}$ für $\mathcal{W}$ und eine Proposition der Form $[\alpha]$ sind der *propositionale sphärenbasierte Revisionsoperator* $\circledast$ und der *propositionale sphärenbasierte Kontraktionsoperator* $\ominus$ definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \circledast [\alpha] &= f_{\mathcal{S}}([\alpha]) \\ \mathcal{W} \ominus [\alpha] &= \mathcal{W} \cup f_{\mathcal{S}}([\neg\alpha]) \end{aligned}$$

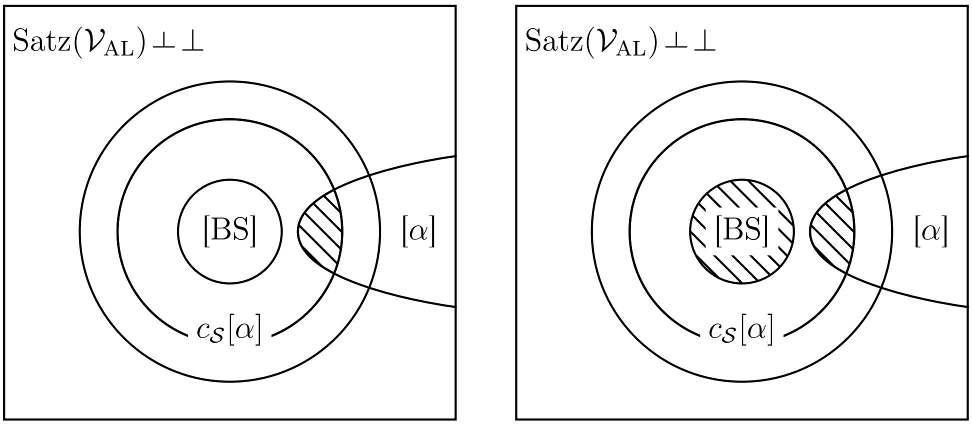
Schließlich können die auf Sphären basierenden Revisionsoperatoren $*_{\mathcal{S}}$ und Kontraktionsoperatoren $-_{\mathcal{S}}$ wie folgt definiert werden.

Definition 2.22. Für Belief-Sets BS, Sphärensysteme $\mathcal{S}$ für $[BS]$ und Formeln α sind der *sphärenbasierte Revisionsoperator* $*_{\mathcal{S}}$ und *Kontraktionsoperator*$-_{\mathcal{S}}$ definiert durch:

$$\begin{aligned} BS *_{\mathcal{S}} \alpha &= \bigcap([BS] \circledast [\alpha]) \\ BS -_{\mathcal{S}} \alpha &= \bigcap([BS] \ominus [\alpha]) \end{aligned}$$

In Abb. 2.1 wird die Wirkungsweise der sphärenbasierten Revision und Kontraktion veranschaulicht. Die Punkte in der Fläche repräsentieren die möglichen Welten, das äußere Rechteck beschreibt $\text{Satz}(\mathcal{V}_{\text{AL}}) \perp\perp$, die Menge aller möglichen Welten. Sphären werden durch konzentrische Kreise um $[BS]$ dargestellt. In dem dargestellten Inkonsistenzfall haben α und BS keine kompatiblen möglichen Welten, daher schneiden sich die zugehörigen Flächen von $[BS]$ und $[\alpha]$ nicht. Die schraffierten Flächen entsprechen jeweils den mit dem Resultat der Operation kompatiblen möglichen Welten $[BS] \circledast [\alpha]$ bzw. $[BS] \ominus [\alpha]$.

Ein wichtiges Resultat von Grove (1988) ist die Aussage, dass sphärenbasierte Revisionsoperatoren nichts anderes sind als transitiv-relationale Partial-Meet-Revisionsoperatoren.



(a) Revision für Sphärensystem $\mathcal{S}$ (b) Kontraktion für Sphärensystem $\mathcal{S}$

Abbildung 2.1: Veranschaulichung der sphärenbasierten Operatoren

Theorem 2.23. *(Grove, 1988) Sphärenbasierte Revisionsoperatoren $*_{\mathcal{S}}$ lassen sich äquivalent als transitiv relationale Partial-Meet-Revisionsoperatoren darstellen und umgekehrt.*

Auch die sphärenbasierten Kontraktionsoperatoren lassen sich äquivalent durch eine andere Klasse von Kontraktionsoperatoren charakterisieren.

Theorem 2.24. *(Grove, 1988) Sphärenbasierte Kontraktionsoperatoren $*_{\mathcal{S}}$ lassen sich äquivalent durch auf epistemischen Verankerungsrelationen basierenden Kontraktionsoperatoren darstellen und umgekehrt.*

Insbesondere folgt aus den Theoremen, dass die sphärenbasierten Operatoren alle AGM-Postulate erfüllen.

Korollar 2.25. *Die sphärenbasierten Revisionsoperatoren bzw. Kontraktionsoperatoren auf Belief-Sets erfüllen alle AGM-Postulate (Basis- und ergänzende Postulate) für Revisionsoperatoren (AGM-R 1)–(AGM-R 8) bzw. für Kontraktionsoperatoren (AGM-K 1)–(AGM-K 8).*

Groves Sphärenansatz erweist sich als ein nützliches technisches Mittel, um die lokal minimale Änderungen von Konzepten zu modellieren. In Kapitel 7 werden sphärenbasierte Reinterpretationsoperatoren definiert; sie modellieren die Integration von neuer Information in eine Ontologie, die durch Sphärensysteme für in ihr spezifizierte Konzepte strukturiert ist. In der ursprünglichen Definition von Grove sind die sphärenbasierten Operatoren nicht iterierbar. In Kapitel 7 wird gezeigt, wie sich auch iterierbare sphärenbasierte Reinterpretationsoperatoren definieren lassen.

2.2 Konzeptrevision: Wassermann und Fermé

Wassermann (1998) und Wassermann und Fermé (1999) greifen den sphärenbasierten Ansatz von Grove (1988) (siehe Abschnitt 2.1.7) auf, um die Änderung von Konzepten zu beschreiben. In dem anvisierten Szenario wird einem Agenten eine konzeptuelle Beschreibung CB einer bestimmten Klasse von Objekten zugeschrieben. Wassermann und Fermé reden hier zwar von einer „description of a particular object“ (S. 2), doch aus den folgenden Beispielen geht hervor, dass nicht ein spezifisches Objekt gemeint ist, für das der Agent eine Beschreibung besitzt, sondern eine Klasse/Kategorie von Objekten, die die Beschreibung erfüllen, z.B. die Klasse der Tiger. Dem Agenten wird von einer vertrauenswürdigen Quelle ein Objekt präsentiert und behauptet, dass es ein CB-Objekt ist. Wenn das Objekt nicht die Beschreibung CB erfüllt, hat der Agent CB hinreichend abzuschwächen, so dass es auch auf das präsentierte Objekt zutrifft. Wenn der Agent z.B. als notwendige Bedingung an einen Tiger die Eigenschaft ansieht, ein orange-schwarz-weiß gestreiftes Fell zu haben, und ihm ein ungestreifter, weißer Tiger präsentiert wird, muss der Agent sein Konzept des Tigers abschwächen, indem er die problematische Eigenschaft aus der Beschreibung eliminiert. Für die Modellierung dieser Revision eines Konzeptes können Sphären benutzt werden. Ein Sphärensystem um ein Konzept CB beschreibt dann eine linear geordnete Menge von abgeschwächten Konzepten.

Der von Wassermann und Fermé zu Grunde gelegte Begriff eines *Konzepts* ist geprägt durch die Theorie der *Begriffsräume* (*conceptual spaces*) von Gärdenfors (2000). In dieser Theorie sind Konzepte konvexe Räume in einem mehrdimensionalen Raum, dessen Dimensionen jeweils eine mit Slots in einem Frame vergleichbare Eigenschaft (z.B. Farbe, Gewicht) repräsentieren. Ein Punkt in diesem mehrdimensionalen Raum repräsentiert ein konkretes Objekt. In dieser Theorie der Konzepte werden Prototypikalitätseffekte gemäß Rosch (Rosch, 1973, 1975) berücksichtigt. Die Prototypentheorie basiert auf der Beobachtung, dass sich für (viele) Kategorien Objekte angeben lassen, die als typische Vertreter dieser Kategorie angesehen werden können. Zum Beispiel sind typische Vertreter der Kategorie aller Vögel solche, die fliegen können; Pinguine sind keine prototypischen Vertreter der Vogelkategorie. Die Repräsentation von Konzepten in mehrdimensionalen Attributsräumen ermöglicht es u.a., den Prototypikalitätseffekt durch räumliche Beziehungen zu modellieren. So können die prototypischen Vertreter einer durch ein Konzept repräsentierten Kategorie als Elemente in der Region um das Zentrum des Konzepts beschrieben werden.

Da Wassermann und Fermé auch Prototypikalitätseffekte behandeln, definieren sie ein *Konzeptkomplex* als ein Paar $\langle \underline{C}, \underline{P} \rangle$ aus zwei Belief-Sets $\underline{C}, \underline{P}$ mit der Einschränkung, dass $\underline{C} \subseteq \underline{P}$. Die Menge $\underline{C}$, so die intendierte Lesart, beschreibt alle möglichen Objekte, die unter das Konzept $\underline{C}$ fallen können, und $\underline{P}$ beschreibt die Menge aller für das Konzept $\underline{C}$ prototypischen Objekte. Obwohl die Autoren $\underline{C}, \underline{P}$ Belief-Sets nennen, enthalten $\underline{C}, \underline{P}$ keine in der Dimension wahr-falsch auswertbare Aussagen, sondern Beschreibungen, die von Objekten erfüllt oder instanziiert werden können. $\underline{C}, \underline{P}$ sind folglich logisch abgeschlossene Mengen von Objektbeschreibungen. Wie genau der Abschlussoperator und die zu Grunde liegende Konzeptbeschreibungssprache aussehen, geht aus den Artikeln nicht hervor. Für die Formalisierung des oben geschilderten Szenarios wird einem Agenten ein Konzeptkomplex $\langle \underline{C}, \underline{P} \rangle$ zugeschrieben. Die Revision des Konzeptkomplexes wird durch eine konkrete Beschreibung C ausgelöst, die syntaktisch von derselben Art ist wie die in $\underline{C}$ und $\underline{P}$ enthaltenen Beschreibungen. Die Menge der möglichen Objekte, die durch eine Menge von Beschreibungen erfüllt wird, wird jeweils durch eckige Klammern bezeichnet, $[\underline{C}]$ und $[\underline{P}]$. Anders als bei Grove (1988) werden die möglichen Objekte nicht durch maximal konsistente Mengen modelliert. Stattdessen setzen Wassermann und Fermé eine Menge M aller möglichen Objekte voraus, welche bei der Definition der Sphärensysteme die Rolle des maximalen Elements $\mathrm{Satz}(\mathcal{V}_{\mathrm{AL}}) \perp\perp$ gemäß Groves Definition von Sphärensystemen einnimmt.

Wassermann (1998) definiert eine auf Sphären basierende Konzeptrevision für Konzeptkomplexe. Wassermann und Fermé (1999) definieren zusätzlich eine auf Restklassenmengen basierende Partial-Meet-Variante der Konzeptrevision und besprechen eine dritte Variante, bei der der Sphärenbegriff erweitert wird, um Prototypikalitätseffekte besser modellieren zu können. Der einzige wesentliche Unterschied der sphärenbasierten Konzeptrevision gemäß Wassermann und Fermé (1999) im Vergleich mit Grove (1988) ist, dass für die Revision eines Konzeptkomplexes $\langle \underline{C}, \underline{P} \rangle$ – neben der Explikation der Revision von $\underline{C}$ – auch eine Explikation für die Revision der Prototypbeschreibungen $\underline{P}$ gegeben werden muss, die dem Common-Sense-Reasoning mit prototypischen Objekten gerecht wird. Die Details der Konstruktion für Wassermanns und Fermés Revisionsoperatoren sind für die in Kapitel 7 zu beschreibenden sphärenbasierten Reinterpretationsoperatoren nicht relevant. Auch das Rahmenwerk der Begriffsräume gemäß Gärdenfors (2000) wie auch sämtliche Prototypikalitätseffekte spielen für die Modellierung in Kapitel 7 keine Rolle. An dem Ansatz von Wassermann und Fermé ist festzuhalten, dass Sphärensystem und im Allgemeinen Belief-Revisions-Techniken benutzt werden können, um Konzeptänderungen zu beschreiben.

Als problematisch ist an Wassermanns und Fermés Ansatz die Tatsache anzusehen, dass die Revision eines Konzeptes völlig unabhängig von anderen Konzepten geschieht, die für das revidierte Konzept relevant sein könnten. Diese Einschränkung führt insbesondere dann zu Problemen, wenn einem Agenten ein Objekt präsentiert wird, dessen Beschreibung nicht nur ein Konzept(komplex), sondern mehrere Konzept(komplex)e betrifft. Für eine geeignete Modellierung muss die Revision von Konzepten innerhalb eines Netzes von Konzepten geschehen, die dem Agenten zugeschrieben werden. Ich realisiere diese Erweiterung dadurch, dass ich die Revision eines Konzeptes im Rahmen einer Ontologie erkläre, in der das Konzept seine Bedeutung erhält (Kapitel 7). Die Sphärensysteme eines Konzeptes werden in kompatibler Weise relativ zu einer Ontologie erklärt.

2.3 Semantische Integration

2.3.1 Interoperabilität, Ontologien und Konflikte

Semantische Integration („semantic integration") beschäftigt sich mit dem Problem, Informationen von verschiedenen, möglicherweise heterogenen Wissensbeständen derart zu integrieren, dass Interoperabilität zwischen den Wissensbeständen gewährleistet wird. Interoperabilität der Wissensbestände meint dabei, dass das Wissen aus den verschiedenen Beständen ausgetauscht und durch verschiedene Nutzer und Anwendungen gemeinsam genutzt werden können.

Ontologien werden in der Informatik als ein wesentliches Mittel zum Austausch und zur Nutzung von Wissen angesehen. In der knappen Formulierung von Gruber (1993) ist eine *Ontologie* eine „explizite Spezifikation einer Konzeptualisierung". Die Konzeptualisierung für einen Gegenstandsbereich einer informatischen Anwendung beschreibt alle Objekte, Konzepte und Relationen, die als existent und für die anvisierte informatische Anwendung als relevant angesehen werden. Die explizite Spezifikation erfolgt durch einen Formalismus (wie z.B. eine Logik), mit dem die relevanten Objekte, Konzepte und Relationen denotiert und zueinander in Beziehung gesetzt werden können.

In den meisten Fällen wird der Formalismus so gewählt, dass in der informatischen Anwendung berechnungstechnisch handhabbare Schlussmechanismen resultieren (Noy, 2004). Ein derartiger Formalismus, der auch in dieser Arbeit zur Beschreibung von Ontologien verwendet wird, sind Beschreibungslogiken; als logischer Formalismus bieten Beschreibungslogiken die Möglichkeit, Aussagen über Beziehungen von Objekten, Konzepten und Relationen des Gegenstandsbereichs formal eindeutig zu formulieren, sind hierbei hinreichend ausdrucksmächtig und haben (in den meisten Fällen) gute Berechnungseigenschaften für Schlussmechanismen zum Überprüfen relevanter semantischer Kategorien wie z.B. die Erfüllbarkeit eines Konzeptes (s. Anhang A, S. 236). In einer algebraisch-logischen Formalisierung lässt sich eine Ontologie durch ein Tupel $\langle O, Sig \rangle$ beschreiben; dabei ist Sig ein Vokabular von nicht-logischen Symbolen bzw. genauer die Signatur, in der auch die Stelligkeit der Symbole beschrieben ist, und O eine Menge von Axiomen über Sig (Kalfoglou und Schorlemmer, 2005).

Ontologien sind eine der Säulen, auf der gemäß der Vision von Berners-Lee und Kollegen (Berners-Lee et al., 2001) das Semantic Web ruht. Das Semantic Web soll das bisherige syntaktische Web um zusätzliche semantische Informationen anreichern, die die Nutzung und den Austausch von Informationen verschiedener Wissensbestände durch Softwareagenten ermöglicht. Während menschliche Nutzer einer persönlichen Webseite eines Universitätsangestellten XY erkennen können, dass ein Link mit der Bezeichnung „Curriculum vitae“ auf eine Seite verweist, die Informationen über den Lebenslauf des Angestellten, u.a. zu seiner akademischen Ausbildung enthält, muss einem Softwareagenten diese Information erst vermittelt werden. Indem der Link zusätzlich mit einem semantischen Markup durch ein Konzept für Lebenslauf versehen wird und die Beziehung zwischen dem Konzept Lebenslauf und dem Konzept der akademischen Ausbildung in einer Ontologie zur Verfügung gestellt wird, hat auch der Softwareagent die Möglichkeit, Wissen über die akademische Ausbildung des Universitätsangestellten XY zu erwerben und dem Nutzer des Softwareagenten bereitzustellen.

Unter der Leitung des World Wide Web Consortium (W3C)[25] werden Formalismen und (Inferenz-)Mechanismen entwickelt und zum Standard erklärt, die die Architektur des Semantic Web festlegt. Neben dem RDF (Ressource Description Language)[26] ist die Famile von Web Ontology Languages (OWL)[27] eines der wichtigen Formate des Semantic Web. OWL (bzw. der Nachfolger OWL 2)[28] ist ein Formalismus, der sich für die eindeutige Beschreibung von Ontologien eignet und die Konstruktion berechnungstechnisch handhabbarer Inferenzmechanismen gestattet. Schlussmechanismen über Fragmenten von OWL (genauer die Fragmente OWL-DL und OWL-Lite, nicht jedoch Full OWL) lassen sich durch Schlussmechanismen für Beschreibungslogiken modellieren (Horrocks und Patel-Schneider, 2004).

Obwohl Ontologien als eine der Säulen des Semantic Web gelten, birgt die Tatsache, dass das Web eine offene Domäne ist, die Problematik multipler und heterogener Ontologien in sich. Insbesondere für Ontologien, die für konkrete Anwendungen und Gegenstandsbereiche entwickelt werden („lower ontologies“ oder „domain (specific) ontologies“), können verschiedene Lösungsansätze existieren, die zu Konflikten im Informationsaustausch führen. Z.B. kann die Ontologie eines Onlinebibliothekssystems mit dem Ausdruck „Artikel“ nur solche Veröffentlichungen denotieren, die in einer Zeitschrift erschienen sind, während in der Ontologie eines anderen Onlinebibliothekssystems der gleiche Ausdruck benutzt wird, um ein weiteres Konzept von Veröffentlichung zu kennzeichnen, gemäß dem ein Artikel auch in einem Proceedingsband oder einem Sammelband erscheinen darf (Dou et al., 2003). Aber auch für allgemeine Ontologien („upper ontology“, „toplevel ontology“), die am ehesten mit Ontologien der Philosophie zu vergleichen sind und in denen allgemeinste Konzepte wie die eines abstrakten oder konkreten

[25] `http://www.w3.org/`
[26] `http://www.w3.org/RDF/`
[27] `http://www.w3.org/TR/owl-features/`
[28] `http://www.w3.org/TR/2009/WD-owl2-profiles-20090421/`

Gegenstands, des Prozesses, des Ereignisses etc. beschrieben werden, existieren de facto verschiedene Modellierungen (Gómez-Pérez et al., 2004, S. 33).[29] Damit Ontologien ihrem Zweck gerecht werden, Interoperabilität von heterogenen Wissensquellen zu gewährleisten, sind (halb-)automatische Mechanismen für die Integration verschiedener, eventuell konfligierender Ontologien bereitzustellen.

Es gibt verschiedene Typen von Konflikten, die es bei der Integration von Ontologien aufzulösen gilt (Visser et al., 1997; Klein, 2001). Als besonders schwierig gelten Konflikte auf dem so genannten Ontologielevel. Ein Beispiel für diesen Konflikttyp, auf den in dieser Arbeit fokussiert wird und der im obigen Beispiel zum Onlinebibliothekssystem genannt wurde, ist die Ambiguität von Symbolen, die in den verschiedenen Ontologien benutzt werden (interontologische Ambiguität bzw. spezieller Homonymie). Andere wichtige Konflikttypen auf dem Ontologielevel, die in dieser Arbeit nicht betrachtet werden, sind die Verwendung von unterschiedlichen Symbolen zur Bezeichnung gleicher Entitäten (Konzepte, Relationen etc.) in den verschiedenen Ontologien (interontologische Synonymie); die Benutzung verschiedener Modellierungsparadigmen; unterschiedliche Granularität der Modellierung und eine unterschiedliche Abdeckung des Gegenstandsbereichs durch die Ontologien.

2.3.2 Die Rolle von semantischen Abbildungen

Die Forschung im Bereich der ontologiebasierten semantischen Integration zentriert sich um die Repräsentation, das Schließen mit und das Auffinden von semantischen Abbildungen (Noy, 2004). Semantische Abbildungen (im weiten Sinne)[30] sollen Beziehungen zwischen korrespondierenden Konzepten, Rollen und Individuen verschiedener Ontologien herstellen. Gemäß der Klassifikation von Flouris und Kollegen (Flouris et al., 2008) gibt es verschiedene Typen von semantischen Abbildungen, die Gegenstand verschiedener Typen von Ontologieänderung sind.

Ontologieabbildungen („ontology mappings“) sind Funktionen (Abbildungen im engen Sinne) von der Signatur einer Ontologie auf die Signatur einer anderen Ontologie, die mit den intendierten Bedeutungen der nicht-logischen Symbole, welche durch die Ontologieaxiome spezifiziert werden, konform sind. Ein engerer Begriff ist der des *Ontologiemorphismus* („ontology morphism“). Ontologiemorphis-

[29] In der Literatur (Smith, 2008) wird zuweilen auch die Behauptung verteidigt, dass das Problem multipler Ontologien auf falsche Modellierungen zurückgeführt werden muss und eigentlich genau eine allgemeine, korrekte Ontologie existiert. Diese Behauptung ist angesichts prinzipiell verschiedener, aber gleichwertiger Möglichkeiten, relevante Gegenstandsbereich zu modellieren (vgl. z.B. die intervallbasierte Modellierung von Ereignissen mit der punktbasierten Modellierung von Ereignissen) nicht haltbar.

[30] Mit der zusätzlichen Kennzeichnung „im weiten Sinne“ wird der Tatsache Rechnung getragen, dass „Abbildung“ nicht zwingend auf Funktionen beschränkt sein muss, sondern auch Relationen einschließen kann.

men bilden nicht nur die nichtlogischen Symbole verschiedener Ontologien aufeinander ab, sondern auch die Axiome der Ontologien (Kalfoglou und Schorlemmer, 2005). Bei der *Ontologieanpassung* („ontology matching“) werden allgemein (semantische) Relationen zwischen korrespondierenden Symbolen (z.B. Äquivalenzbeziehung, Subkonzeptbeziehung, etc.) verschiedener Ontologien bestimmt. Das Ergebnis der Ontologieanpassung wird *Ontologiealinierung* („ontology alignment“) genannt. Falls die Relationen, die bei der Ontologieanpassung gefunden werden, durch totale Funktionen von einer intermediären Ontologie auf die anzupassenden Ontologien dargestellt werden, wird der gesamte Prozess *Ontologiartikulation* („ontology articulation“) genannt. Die Anwendung von semantischen Abbildungen auf Ontologien wird (in einer der beiden möglichen Bedeutungen)[31] auch *Ontologieübersetzung* („ontology translation“) genannt.

Unabhängig vom Typ der semantischen Abbildung können verschiedene Repräsentationsformate zur Beschreibung der semantischen Abbildung verwendet werden. Vier der möglichen Repräsentationsformate werden im Folgenden kurz beschrieben, da sie für den hier entwickelten Ansatz der Reinterpretation relevant sind.

Eine mögliche Form von Repräsentation sind die *Brückenaxiome* („bridging axioms“) (Dou et al., 2002). Dou und Kollegen präsentieren Ontologien in zwei verschiedenen Namensräumen, so dass die Vokabulare der Ontologien disjunkt sind. Brückenaxiome sind als Sätze (Axiome) in einem Vokabular definiert, das die Vokabulare der Ausgangsontologien enthält. Die Sätze treffen Aussagen über die Korrespondenz von Termen der Ausgangsontologien. Der Vorteil von Brückenaxiomen gegenüber anderen Repräsentationsformaten ist, dass die Ontologien zusammen mit den Brückenaxiomen eine Wissensbasis bilden, die die Anwendung von uniformen Schlussmechanismen gestattet. Für die Definition der Reinterpretationsoperatoren (Abschnitt 3.2) werden ebenfalls Brückenaxiome definiert, die Konzepte, Rollen und Individuen verschiedener Ontologien semantisch aufeinander beziehen.

Ein anderes Repräsentationsformat für semantische Abbildungen wird im Ansatz von Calvanese et al. (2001) verwendet. Die so genannten *Sichten* („views“) sind Funktionen, die Konzepte und Rollen einer globalen Ontologie auf korrespondierende Konzepte und Rollen in lokalen Ontologien abbilden. In der Formulierung der Konservations- und Rekonstruierbarkeitspostulate (Abschnitt 3.1) benutze ich Substitutionen, um die Konzepte und Rollen der ursprünglichen Ontologie und einer im Integrationsresultat konservierten Namensvariante aufeinander abzubilden. Diese Substitutionen können als Sichten verstanden werden.

Eine dritte Form zur Repräsentation von semantischen Abbildungen, die in der Literatur zur semantischen Integration nicht diskutiert wird, sind Abschwächungs-

[31] In der anderen Bedeutung ist Ontologieübersetzung der Prozess, die formale Repräsentation einer Ontologie (z.B. von RDF nach OWL) zu ändern.

funktionen wie z.B. Qi und Kollegen (Qi et al., 2006) sie verwenden (s. Abschnitt 2.3.4). Diese Funktionen bilden Axiome einer Ontologie auf logisch schwächere Axiome ab. Abschwächungsfunktionen sind keine Ontologiemorphismen im Sinne von Kalfoglou und Schorlemmer (2005), da die abgeschwächten Axiome keiner der integrierten Ontologie angehören, sondern erst im Laufe der Integration konstruiert werden.

Das letzte Repräsentationsformat für semantische Abbildungen, das hier erwähnt werden soll, liegt dem generellen Ansatz verteilter Systeme (Distributed Systems (DS)) von Zimmermann und Euzenat (2006) oder spezifischer dem Ansatz verteilter Beschreibungslogiken (Distributed Description Logics (DDL)) gemäß Borgida und Serafini (2003) zu Grunde. Eine DS besteht aus lokalen Ontologien und Ontologiealinierungen für jedes Paar von lokalen Ontologien. Im Unterschied zu den Brückenaxiomen sind die hier verwendeten semantischen Abbildungen zwischen den lokalen Ontologien keine Axiome in einer globalen Ontologie, sondern zusätzliche Komponenten, die korrespondierende Entitäten der lokalen Ontologien aufeinander abbilden. Eine DS bedarf daher zusätzlicher Schlussmechanismen und kann nicht auf die Schlussmechanismen für die lokalen Ontologien zurückgreifen. Zimmermann und Euzenat (2006) und Borgida und Serafini (2003) explizieren die semantische Basis für den neuen Schlussmechanismus, indem eine verteilte Semantik definiert wird, die auch die Funktion der semantischen Abbildungen, so genannten *Brückenregeln* („bridge rules"), eindeutig spezifiziert. Für verteilte Systeme ist es irrelevant, ob die lokalen Ontologien ein gemeinsames Vokabular haben oder nicht. Ambiguitätskonflikte im öffentlichen Vokabular, die in dieser Arbeit behandelt werden, können hier erst gar nicht auftreten.

Es gibt verschiedene Methoden für das Auffinden von semantischen Abbildungen. Eine Methode basiert auf der Nutzung von allgemeinen, domänenunabhängigen Ontologien (upper, top-level ontologies) wie z.B. DOLCE (Gangemi et al., 2003). Diese stellen allgemeine Begriffe zur Verfügung, die durch domänenspezifische Ontologien benutzt werden können. Falls (domänenspezifische) Ontologien auf einer solchen allgemeinen Ontologie aufsetzen, kann die Anzahl der Ambiguitätskonflikte zwischen ihnen im Vergleich zu Ontologien, die keine gemeinsame Ontologie erweitern, reduziert werden. Dennoch können weiterhin Ambiguitätskonflikte vorliegen, insbesondere dann, wenn die Symbole nicht in der allgemeinen Ontologie expliziert werden. Daher sind zusätzliche Verfahren zur Auflösung von Ambiguitätskonflikten nötig.

Eine andere Methode zum Auffinden von semantischen Abbildungen basiert auf Heuristiken[32] oder Techniken des maschinellen Lernens[33]. Die Heuristiken nutzen z.B. natürlichsprachliche Beschreibungen in den Ontologien, Konzeptbeschrei-

[32] Noy und Musen (2003), Euzenat und Valtchev (2004), Bouquet et al. (2003)
[33] Doan et al. (2003)

bungen, strukturelle oder logische Eigenschaften der Ontologien. Der in dieser Arbeit entwickelte Reinterpretationsansatz (siehe Abschnitte 3.2 und 3.3) nutzt logische Eigenschaften der Ontologien, um adäquate semantische Abbildungen zu konstruieren. Dabei wird als grundlegende Heuristik für die Auflösung von Ambiguitätskonflikten in der öffentlichen Sprache vorausgesetzt, dass gleiche nichtlogische Symbole gleiche Entitäten bezeichnen. Durch Wahl anderer Heuristiken ist es prinzipiell möglich, den Reinterpretationsansatz auch zur Auflösung anderer Konflikte auf dem Ontologielevel zu nutzen.

2.3.3 Semantische Integration und Ontologieänderung

In der ontologiebasierten semantischen Integration werden allgemein Mechanismen untersucht, in denen in der einen oder anderen Form Ontologien geändert werden. Flouris und Kollegen (Flouris et al., 2008) geben eine Klassifikation der verschiedenen Ansätze zur Ontologieänderung, die sich nach dem Zweck, dem Input, dem Output und zusätzlichen erwähnenswerten Eigenschaften der Ontologieänderung richtet. Eine Einteilung der Ansätze auf oberster Ebene liefert vier Gruppen.

In der ersten Gruppe steht die Heterogenität der Ontologie und die Auflösung der heterogenitätsbedingten Konflikte im Vordergrund; in dieser Gruppe führen Flouris und Kollegen die Formen von Veränderung an, die oben im Zusammenhang mit der Besprechung der semantischen Abbildungen genannt wurden: das Finden von Ontologieabbildungen, das Finden von Ontologiemorphismen, die Ontologieanpassung, die Ontologieartikulation, die Ontologiealinierung und die Ontologieübersetzung.

In der hiermit verwandten zweiten Gruppe sind alle Ansätze versammelt, in denen die Kombination von verschiedenen Ontologien zu einer neuen Ontologie verwirklicht wird. Falls die Domänen der Ontologien identisch oder ähnlich sind, sprechen Flouris und Kollegen von der *Ontologiemischung* („ontology merge“). Das Ziel der Ontologiemischung ist es, die Domäne genauer zu beschreiben. Die Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien (s. Abschnitt 3.3) können als Operatoren zur Ontologiemischung verstanden werden. Sind die Domänen der Ontologien verschieden, wird der Kombinationsprozess stattdessen *Ontologieintegration* genannt. Das Ziel der Ontologieintegration ist es, durch die Kombination der Ontologien konzeptuell eine größere Domäne zu erfassen.

Das Mischen oder die Integration von Ontologien beinhaltet in den meisten Fällen eine Betrachtung der Konflikte, die durch die Heterogenität der Ontologien entstehen, und hängt daher mit den Ansätzen der ersten Gruppe zusammen. Dennoch halten Flouris und Kollegen diese Gruppen auseinander, da beim Ontologiemischen nicht einfach semantische Relationen zwischen Ontologien bestimmt werden müssen, sondern auch eine Entscheidung darüber zu treffen ist, welche Anteile der Ontologien jeweils in der resultierenden Ontologie konserviert werden sollen und welche gelöscht werden. Diese Entscheidung ist insbesondere dann von Belang, wenn die Ontologien verschiedene Modellierungsparadigmen verwirklichen, bei denen semantische Korrespondenzen nicht existieren oder nur sehr schwach sind.

Der Reinterpretationsansatz beschäftigt sich vornehmlich mit den Problemen, die innerhalb dieser ersten beiden Gruppen eine Rolle spielen.

Die dritte Gruppe fasst Ansätze zur Modifikation von Ontologien zusammen. Beim *Ontologiedebugging* („ontology debugging") werden Ontologien auf Fehler (Inkonsistenzen, Inkohärenzen etc.) hin untersucht (*Ontologiediagnose*) und dieser entledigt (*Ontologiereparatur*). Bei der Ontologiemischung oder Ontologieintegration sind häufig Teilprozesse des Ontologiedebuggings und der Ontologiereparatur enthalten. Diese beziehen sich meist jedoch nicht auf jeweils eine einzelne Ontologie, sondern auf die zwischenzeitliche Vereinigung der zu mischenden oder zu integrierenden Ontologien. In der *Ontologieevolution* („ontology evolution") wird die Entwicklung einer Ontologie untersucht, die sich aus der Modifikation der Ontologie durch neu erworbene Informationen (nicht zwingend einer anderen Ontologie) ergibt (Haase und Stojanovic, 2005). Hierbei werden verschiedene Typen von Modifikationen betrachtet, die durch die neue Information getriggert werden können. Auch in dieser Arbeit (s. Abschnitt 3.2 und Kapitel 6) ist eine Form von Ontologieevolution Gegenstand der Untersuchung. In diesem Falle sind die triggernden Informationseinheiten einfache, sequenziell verschickte Axiome einer anderen Ontologie, die bestimmten Konsistenzbedingungen genügen.

In der vierten Gruppe wird als einziger Ansatz die *Versionskontrolle* von Ontologien („ontology versioning") aufgeführt, in der die Beziehungen zwischen verschiedenen (zeitlichen) Versionen einer Ontologie untersucht werden. Auch im Reinterpretationsansatz können verschiedene Versionen einer Ontologie ausgemacht werden. Im Reinterpretationsansatz werden beim Integrieren zweier Ontologien diese als Namensvarianten im Resultat konserviert und sind selbst bei einer Folge von Integrationen im Resultat enthalten und können aus diesem durch eine inverse Substitution rekonstruiert werden (s. Proposition 6.6, S. 166).

2.3.4 Belief-Revision für Ontologien

Da sich eine Ontologie bzw. eine Menge von Ontologieaxiomen als spezielle Wissensbasis darstellen lässt und die Aufgabe der Konfliktauflösung bei der Kombination (Mischung oder Integration im Sinne von (Flouris et al., 2008)) von Ontologien nötig ist, sind Techniken der Belief-Revision geeignete Hilfsmittel für die Aufgaben der semantischen Integration – insbesondere für die Aufgaben in der Ontologiemischung, Ontologieintegration und Ontologieevolution.

Einen, so weit mir bekannt ist, ersten Hinweis auf die Möglichkeit, Techniken der Belief-Revision zur Beschreibung von Ontologieänderung zu nutzen, gibt Foo (1995). Am Beispiel von Taxonomien (Hierarchien von Konzepten) demonstriert Foo die Anwendung von zwei Operatoren („refinement“ und „abstraction“), die zu einer (konsistenten) Ausgangsontologie und einer möglicherweise konfligierenden, neuen Information eine neue (konsistente) Ontologie liefern.

Auch Fuhrmann (1997) bespricht in seinem Essay die Anwendung von Belief-Revisions-Operatoren (genauer: Paket-Kontraktionsoperatoren) auf Ontologien. Der Ontologiebegriff wird hier allerdings sehr allgemein im Sinne von Fine (1991) als mögliche Kollektion von Objekten (Fuhrmann, 1997, S. 106) gebraucht und formal durch ein Element in einem Ontologieraum, der bestimmten Abschlussbedingungen gehorcht, beschrieben.

Der bereits besprochene Ansatz von Wassermann (1998) (s. Abschnitt 2.2) wendet Revisionsoperatoren zur Modifikation eines Konzeptes an.

Viele der aktuelleren Untersuchungen zur Belief-Revision in der semantischen Integration beschäftigen sich mit der Revision von Ontologien, deren Axiommenge als beschreibungslogische Wissensbasis vorliegt.[34] Es existieren explizite Anwendungen für das Ontologiedebugging, die Ontologieevolution und -kombination (Ontologiemischung und -integration).

Die Anwendbarkeit des ursprünglichen AGM-Ansatzes ist beschränkt durch die Tatsache, dass AGM-Operatoren logisch abgeschlossene Mengen voraussetzen. Für Ontologiebetrachtungen sind daher Base-Revisionsoperatoren die geeignetere Wahl. Zusätzliche Probleme bereitet die Tatsache, dass Beschreibungslogiken im Allgemeinen keine Negation und Konjunktion von Axiomen, sondern nur von Konzepten gestatten. Auch hier müssen die AGM-Postulate für andere Logiken entsprechend angepasst werden.[35]

Ein weiteres Problem für die Anwendbarkeit ergibt sich aus der Tatsache, dass der im AGM-Ansatz vorausgesetzte Tarskische Folgerungsoperator Cn kompakt und supraklassisch sein und die Deduktionseigenschaft haben muss (s. Definitionen 2.1, S. 16 und A.33, S. 244). Flouris und Kollegen (Flouris et al., 2005) nennen solche Logiken *AGM-konform* („AGM-compliant“), in denen ein Operator definiert werden kann, der die AGM-Kontraktionspostulate (s. diese Arbeit S. 21 ff.) erfüllt. Für Logiken mit einem Tarskischen Folgerungsoperator, der die zusätzlichen genannten Eigenschaften hat, lässt sich AGM-Konformität beweisen. Wie Flouris und Kollegen (Flouris et al., 2005) jedoch auch zeigen, existieren verschiedene Beschreibungslogiken, die nicht AGM-konform sind. Der Grund für dieses negative Resultat ist das problematische Recoverypostulat (s. diese Arbeit,

[34] Für einen ausführlicheren Überblick siehe Haase und Qi (2007)

[35] Siehe z.B. Flouris et al. (2006)

S. 22). Für Revisionsoperatoren, deren Anwendung in dieser Arbeit vornehmlich im Vordergrund steht, bestehen keine vergleichbaren Probleme.

In der Literatur existieren verschiedene Beispiele für die Revision und Kombination von beschreibungslogischen Wissensbasen mittels eines Revisionsoperators, der sowohl durch eine Konstruktion gegeben als auch durch Postulate spezifiziert wird. Der Aufsatz von Qi und Kollegen (Qi et al., 2006) ist ein Beispiel für eine Arbeit, in der Belief-Revision zur Integration von beschreibungslogischen Wissensbasen (DL-Wissensbasen) benutzt wird. Im folgenden Unterabschnitt, dem letzten zum Überblick über die semantische Integration, wird dieser Ansatz ausführlich besprochen, da er mit dem Reinterpretationsansatz verglichen werden soll (S. 78).

Zwei weitere Ansätze zur Integration von Wissensbasen, die sich durch Anwendung von Reinterpretation bei der Integration auszeichnen, sind in den Arbeiten von Delgrande und Schaub (Delgrande und Schaub, 2000, 2004, 2007) und im Aufsatz von Goeb und Kollegen (Goeb et al., 2007) dargelegt. Diese werden in dem darauf folgenden Abschnitt 2.4 detailliert besprochen.

2.3.5 Integration mittels Abschwächungen

Die von Qi und Kollegen (Qi et al., 2006) betrachtete Grundsituation ist ähnlich der, die auch für das Reinterpretationsframework (Kapitel 3) betrachtet wird. Eine endliche beschreibungslogische[36] Wissensbasis O_2 (Sender) ist in eine endliche beschreibungslogische Wissensbasis O_1 (Empfänger) zu integrieren.[37] Vorausgesetzt wird die Konsistenz von O_1 und zusätzlich, dass *Konflikte* zwischen O_1 und O_2, das sind inklusionsminimale widersprüchliche Teilmengen von $O_1 \cup O_2$, mindestens ein ABox-Axiom enthalten müssen. Begründet wird diese Einschränkung mit dem Hinweis, dass bereits mehrere Ansätze zur Auflösung von Konflikten zwischen TBoxen existieren würden. Im weiteren Verlauf des Artikels wird nicht explizit auf diese Einschränkung zurückgegriffen, aber aus den Definitionen der Operatoren ergibt sich, dass sie nicht zur Auflösung von Konflikten, die nur die TBoxen betreffen, benutzt werden können (s.u.).

Es werden u.a. zwei verschiedene Revisionsoperatoren, $\circ_w$ und die Verfeinerung $\circ_{rw}$, definiert und analysiert, mit der die Integration realisiert werden kann. Das Ergebnis der Integration $O_1 \circ_w O_2$ bzw. $O_1 \circ_{rw} O_2$ ist eine so genannte disjunktive Wissensbasis, d.h. eine Menge von DL-Wissensbasen, die genau dann unter einer

[36]Siehe Anhang A für einen Überblick zu Beschreibungslogiken.

[37]Statt einfacher Satzmengen gestatten Qi und Kollegen zur Repräsentation von Wissensbasen auch Multimengen. Ich werde von dieser zusätzlichen Feinheit abstrahieren. Außerdem erweitern die Autoren ihren Ansatz (Qi et al., 2006) auf die Behandlung von geschichteten Wissensbasen („stratified knowledge bases"). Dieser Aspekt zur Strukturierung einer Ontologie ist für den dargestellten Vergleich mit dem Reinterpretationsansatz (S. 78) irrelevant und wird daher ausgeblendet.

Interpretation $\mathcal{I}$ wahr ist, wenn mindestens eine der enthaltenen Wissensbasen unter $\mathcal{I}$ wahr ist.

Grundidee für beide Operatoren ist es, die in der Empfängerwissensbasis O_1 enthaltenen Sätze derart abzuschwächen, dass die Konflikte mit der Senderwissensbasis O_2 aufgelöst werden. Die im Aufsatz von Qi und Kollegen (Qi et al., 2006) definierte Abschwächung eines Satzes α zu einem neuen Satz α_{weak} ist eine Möglichkeit unter vielen, zu einem Satz α einen *logisch schwächeren* Satz im Sinne von $\alpha \models \alpha_{weak}$ zu definieren.[38] Diese Abschwächungsfunktionen können als eine Form von semantischer Abbildung verstanden werden, die Subsumptionsaxiome der ursprünglichen Wissensbasis O_1 auf solche Subsumptionsaxiome abbildet, die mit der Wissensbasis des Senders O_2 konform sind. Der von Qi und Kollegen definierten Abschwächung $(\cdot)_{weak}$ liegt die Konzeption von Ausnahmelisten von Konstanten zu Grunde. Da nach Voraussetzung in einem Konflikt ein ABox-Axiom enthalten sein soll, kann auch eine in dieser enthaltene verantwortliche Konstante identifiziert werden. Die Aussagen der ursprünglichen Empfängerwissensbasis werden eingeschränkt auf alle diejenigen Konstanten, die nicht unter den für den Widerspruch verantwortlich gemachten Konstanten sind. Mit dem Grad d eines so abgeschwächten Satzes wird die Anzahl derjenigen Konstanten verstanden, die als Ausnahmen identifiziert worden sind. Formal wird erklärt: Eine für den Operator $\circ_w$ intendierte Abschwächung $(\cdot)_{weak,w}$ und der zugehörige Grad d werden definiert durch: Für alle Subsumptionen $C \sqsubseteq D$ ist jeder Satz $(C \sqsubseteq D)_{weak,w}$ der Form $C \sqcap \neg\{a_1\} \sqcap \ldots \sqcap \neg\{a_n\} \sqsubseteq D$ eine Abschwächung.[39] Der Grad ist $d(C \sqcap \neg\{a_1\} \sqcap \ldots \sqcap \neg\{a_n\} \sqsubseteq D) = n$. Für alle ABox-Axiome α hat $\alpha_{weak,w}$ die Form $\top$ (vollständige Löschung; $\top$ steht hier für eine Tautologie und nicht das universale Konzept) und $d(\alpha_{weak,w}) = 1$ oder die Form α (unverändert lassen) und $d(\alpha_{weak,w}) = 0$.

Eine für den Operator $\circ_{rw}$ intendierte Abschwächung $(\cdot)_{weak,rw}$ ist eine Erweiterung von $(\cdot)_{weak,w}$, bei der auch ABox-Axiome α der Form $\forall R.C(a)$ abgeschwächt werden können zu einem Satz $\alpha_{weak,\ rw}$ der Form $\forall R.(C \sqcup \{b_1, \ldots, b_n\})(a)$ mit dem Grad $d(\alpha_{weak,rw}) = n$.

Eine DL-Wissensbasis O_{weak,w,O_2} ist eine $(\cdot)_{weak,w}$-Abschwächung der DL-Wissensbasis O bzgl. O_2, wenn $O_{weak,w,O_2} \cup O_2$ konsistent ist und es eine Bijektion von O nach $O_{weak,\ w,O_2}$ gibt, so dass jedes $f(\alpha)$ eine Abschwächung von α ist. Die Menge aller abgeschwächten Wissensbasen von O bzgl. O_2 wird mit $Weak^w_{O_2}(O)$ bezeichnet. Der Grad einer abgeschwächten Wissensbasis O_{weak,w,O_2} ist $d(O_{weak,w,O_2}) = \Sigma_{\alpha \in O_{weak,w,O_2}} d(\alpha)$, also die Summe aller Grade der enthalte-

[38] Die Grundidee der Abschwächung formulieren bereits Benferhat et al. (2004). Und die Anwendung dieser Grundidee auf DL-Wissensbasen ist bereits bei Meyer et al. (2005) zu finden.

[39] $C \sqcap \neg\{a_1\} \sqcap \ldots \sqcap \neg\{a_n\} \sqsubseteq D$ besagt: Alle Cs außer $a_1, \ldots, a_n$ sind Ds. Vgl. Tabelle A.1, S. 227 im Anhang A für die Semantik von Nominalia.

nen Sätze. Entsprechend werden O_{weak,rw,O_2} und $Weak^{rw}_{O_2}(O)$ definiert. Schließlich werden der Operator $\circ_w$ bzw. $\circ_{rw}$ wie folgt definiert.

Definition 2.26. (Qi et al., 2006) Sei O_1 eine konsistente DL-Wissensbasis und O_2 eine DL-Wissensbasis. Das Resultat der auf $(\cdot)_{weak,w}$-Abschwächung bzw. auf $(\cdot)_{weak,rw}$-Abschwächung basierenden Revision von O_1 bzgl. O_2 wird definiert durch:

$$\begin{aligned} O_1 \circ_w O_2 &= \{O_2 \cup O_i \mid O_i \in Weak^{w}_{O_2}(O_1) \text{ und es gibt kein} \\ &\quad\; O_j \in Weak^{w}_{O_2}(O_1) \text{ mit } d(O_j) < d(O_i)\} \\ &\text{bzw.} \\ O_1 \circ_{rw} O_2 &= \{O_2 \cup O_i \mid O_i \in Weak^{rw}_{O_2}(O_1) \text{ und es gibt kein} \\ &\quad\; O_j \in Weak^{rw}_{O_2}(O_1) \text{ mit } d(O_j) < d(O_i)\} \end{aligned}$$

Das Ergebnis der Integration von O_2 in O_1 ist die Disjunktion aller gradminimalen Abschwächungen von O_1 bzgl. O_2. Aus der Definition der Operatoren wird ersichtlich, dass die oben genannte Einschränkung an die Integrationssituation (ein ABox-Axiom muss am Konflikt echt beteiligt sein) nötig ist. Ist z.B. $O_1 = \{K \sqsubseteq \bot\}$ und $O_2 = \{\top \sqsubseteq K\}$, lässt sich mit dem angegebenen Abschwächungsverfahren kein konsistentes Resultat erzielen.

Die Eigenschaften des Operators $\circ_w$ veranschaulicht das folgende Beispiel.

Beispiel 2.27. Es seien

$$\begin{aligned} O_1 &= \{\neg K_2(a), \exists R.K_1 \sqsubseteq K_2, R(a,b)\} \\ O_2 &= \{K_1(b)\} \end{aligned}$$

$O_1 \cup O_2$ ist inkonsistent, daher wird jede Abschwächung von O_1 bzgl. O_2 einen Grad größer gleich eins haben. Gemäß den Definitionen ist jedes der folgenden Wissensbasen eine Abschwächung $O_{1\,weak,w,O_2}$ der Senderwissensbasis O_1 bzgl. O_2.

$$\begin{aligned} O_{11} &= \{\top, \exists R.K_1 \sqsubseteq K_2, R(a,b)\} \\ O_{12} &= \{\neg K_2(a), (\exists R.K_1) \sqcap \neg\{a\} \sqsubseteq K_2, R(a,b)\} \\ O_{13} &= \{\neg K_2(a), \exists R.K_1 \sqsubseteq K_2, \top\} \end{aligned}$$

Die Grade der Mengen O_{11}, O_{12}, O_{13} sind jeweils gleich eins, und es gibt keine weitere Abschwächung von O_1 bzgl. O_2 des Grades eins, daher bilden sie (jeweils vereinigt mit O_2) die Disjunkte der Integration von O_2 in O_1:

$$O_1 \circ_w O_2 = \{O_2 \cup O_{11}, O_2 \cup O_{12}, O_2 \cup O_{13}\}$$

Die in den Operatoren von Qi und Kollegen (Qi et al., 2006) gewählten Abschwächungen sind satzorientiert. Sie können aber auch als implizite Abschwächungen von Konzepten verstanden werden. Dabei liege eine *Abschwächung eines*

Konzeptes C zu einem Konzept C^* genau dann vor, wenn $\models C \sqsubseteq C^*$ gilt. Zum Beispiel resultiert die Abschwächung von $\neg K_2(a)$ in O_{11} in einer Abschwächung des Konzeptsymbols K_2 zu $\top$.

Die implizite Abschwächung von K_2 zeigt eine weitere besondere Eigenschaft der Operatoren von Qi und Kollegen. Es dürfen auch solche Konzepte abgeschwächt werden, in denen keines der Symbole der triggernden Wissensbasis (hier K_1, b) enthalten ist.

An der Wissensbasis O_{11} erkennt man auch, dass die impliziten Abschwächungen der Konzepte nicht uniform sind: Das Konzeptliteral $\neg K_2$ im ABox-Axiom $\neg K_2(b)$ erfährt eine Abschwächung, das Symbolvorkommnis K_2 im TBox-Axiom $\exists R.K_1 \sqsubseteq K_2$ hingegen erfährt keine Abschwächung oder Verstärkung.

2.4 Reinterpretation in der Belief-Revision

Die Kernidee des hier entwickelten Reinterpretationsansatzes ist es, bei der Integration[40] zweier inkonsistenter Wissensbasen Symbole zu disambiguieren, die für entstehende Inkonsistenzen verantwortlich gemacht werden können, und deren Bedeutungen durch Brückenaxiome in konsistenter Weise aufeinander zu beziehen. In abgewandelter Form ist diese Idee auch in der Literatur zur Belief-Revision zu finden. Zwei Beispiele, mit denen der hier entwickelte Ansatz verwandt ist, werden in den folgenden beiden Abschnitten besprochen. Die Arbeiten von Delgrande und Schaub (Delgrande und Schaub, 2000, 2004, 2007) orientieren sich an der Belief-Revision. Die Autoren definieren Revisionsoperatoren, deren Definition sich auf eine Menge von Biimplikationen stützt. Die Biimplikationen werden nicht als Brückenaxiome, sondern als Hilfsmenge für die Revision verstanden. Daher bleibt die Anwendung der Operatoren für eine semantische Integration zweier heterogener Wissensbestände im Hintergrund. Goeb und Kollegen dagegen (Goeb et al., 2007) gehen von dem Szenario einer semantischen Integration aus. Der vorgestellte Algorithmus enthält Belief-Revisions-Techniken, eine logikbasierte Analyse des implizit definierten Integrationsoperators hingegen wird nicht gegeben.

2.4.1 Der Ansatz von Delgrande und Schaub

In dem von Delgrande und Schaub entwickelten Ansatz (Delgrande und Schaub, 2000, 2003, 2004, 2007) werden aussagenlogische Biimplikationen $p \leftrightarrow p'$ zwischen Aussagensymbolen p der öffentlichen Sprache und neu eingeführten Aussagensymbolen p' einer internen Sprache benutzt, um Revisionen und Kontraktionen

[40]Ich weiche im Folgenden von der Redeweise von Flouris und Kollegen (Flouris et al., 2008) ab und verwende „Integration“ als allgemeine Bezeichnung für jede Form von Kombination zweier Ontologien.

durchzuführen. Delgrande und Schaub definieren neue Revisions- und Kontraktionsoperatoren im allgemeineren Rahmenwerk von so genannten Belief-Change-Szenarios. Ich stelle den Ansatz mit der auf diese Arbeit angepassten Notation dar.

Es wird ein aussagenlogisches Vokabular $\mathcal{V}_c$ von Aussagensymbolen vorausgesetzt. Es sei $\mathcal{V}_i = \{p' \mid p \in \mathcal{V}_c\}$ ein gleichmächtiges internes Vokabular und $\sigma = \sigma_{\mathcal{V}_c}$ eine Substitution mit Träger $\mathcal{V}_c$, so dass σ das öffentliche Vokabular $\mathcal{V}_c$ bijektiv auf $\mathcal{V}_i$ abbildet, $\sigma(p) = p'$.[41] Ein *Belief-Change-Szenario* $\mathcal{B} = \langle O_1, O_2, O_3 \rangle$ besteht aus drei Mengen O_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) von aussagenlogischen Sätzen über einer Menge von Aussagensymbolen des öffentlichen Vokabulars $\mathcal{V}_c$. Dabei stehen O_1 für die initiale Wissensbasis des Empfängers, O_2 für die Wissensbasis, die im Revisionsresultat enthalten sein muss und O_3 für eine Wissensbasis, die nicht im Resultat enthalten sein darf. Das Rahmenwerk ist allgemein genug, das klassische Revisions- bzw. Kontraktionsszenario zu modellieren. Klassische Revision von O mit α wird durch das Belief-Change-Szenario $\langle O, \{\alpha\}, \emptyset \rangle$ modelliert; klassische Kontraktion von O mit α durch das Belief-Change-Szenario $\langle O, \emptyset, \{\alpha\} \rangle$.

Definition 2.28. (Delgrande und Schaub, 2003, S. 9) Eine *Belief-Change-Extension* eines Belief-Change-Szenarios $\mathcal{B} = \langle O_1, O_2, O_3 \rangle$ ist eine Menge der Form

$$\mathrm{Cn}(O_1\sigma \cup O_2 \cup EQ_i) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$$

wobei $EQ_i \subseteq EQ = \{p \leftrightarrow p' \mid p \in \mathcal{V}_c\}$ eine inklusionsmaximale Menge von Brückenaxiomen ist, für die folgende Bedingung gilt:

$$\mathrm{Cn}(O_1\sigma \cup O_2 \cup EQ_i) \cap \mathrm{Cn}(O_3 \cup \{\perp\}) = \emptyset$$

Falls kein EQ_i mit den genannten Eigenschaften existiert, wird $\mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$ als einzige Belief-Change-Extension definiert.

Für das spezielle Belief-Change-Szenario der klassischen Belief-Revision, repräsentiert durch $\langle O, \{\alpha\}, \emptyset \rangle$, bestehen die zugehörigen Belief-Change-Extensionen aus Mengen E_i der Form $E_i = \mathrm{Cn}(O\sigma \cup EQ_i \cup \{\alpha\})$, wobei $EQ_i \in EQ \top (O\sigma \cup \{\alpha\})$. $EQ \top (O\sigma \cup \{\alpha\})$ ist die duale Restmenge von EQ modulo $(O\sigma \cup \{\alpha\})$; das ist die Menge aller inklusionsmaximalen Teilmengen von EQ, die mit $O\sigma \cup \{\alpha\}$ kompatibel sind.[42] Es bezeichne $(E_i)_{i \in I}$ die Familie aller Belief-Change-Extensionen des Szenarios $\mathcal{B} = \langle O, \{\alpha\}, \emptyset \rangle$. Eine Selektionsfunktion c wird über der Indexmenge I erklärt. Selektionsfunktionen c gemäß Delgrande und Schaub entsprechen Maxichoice-Selektionsfunktionen der Partial-Meet-Revision. Insbesondere gilt für

[41] Die Begriffe einer Substitution und des Trägers einer Substitution werden in Anhang A, Abschnitt A.2.2 erläutert.

[42] Vgl. Definition A.37, S. 245 in Anhang A.

$I \neq \emptyset$, dass $c(I) \in I$.[43] Auf der Grundlage dieser Begriffe werden eine so genannte Choice-Revision $\dot{+}_c$ (entspricht Maxichoice-Revision bei AGM) und eine skeptische Revision (entspricht Full-Meet-Revision bei AGM) definiert. Die Choice-Revision $\dot{+}_c$ wählt genau eine Belief-Change-Extension, Sceptical-Revision $\dot{+}$ wählt den Schnitt aller Belief-Change-Extensionen als Revisionsresultat.

Definition 2.29. (Delgrande und Schaub, 2003, S. 11) Gegeben seien eine aussagenlogische Wissensbasis O, ein Satz α und $(E_i)_{i \in I}$ die Menge aller Belief-Change-Extensionen des Belief-Change-Szenarios $\langle O, \{\alpha\}, \emptyset \rangle$ und eine Selektionsfunktion über I mit $c(I) = k$. Dann werden *Choice-Revision* $\dot{+}_c$ und die *Sceptical-Revision* $\dot{+}$ definiert durch:

$$\begin{aligned} O \dot{+}_c \alpha &= E_k \text{ (für } c(I) = k) \\ O \dot{+} \alpha &= \bigcap_{i \in I} E_i \end{aligned}$$

Ähnlich lassen sich Kontraktionsoperatoren für das Belief-Change-Szenario $\langle O, \emptyset, \{\alpha\} \rangle$ definieren.[44]

Die Operatoren von Delgrande und Schaub erfüllen alle AGM-Basispostulate bis auf das Konsistenzpostulat (AGM-R 5). Stattdessen erfüllen ihre Operatoren folgende Abschwächung des Konsistenzpostulats:

(AGM-R' 5) Genau dann ist $O * \alpha$ konsistent, wenn O und α konsistent sind.

Außerdem erfüllen die Operatoren das erste ergänzende AGM-Postulat, nicht jedoch das zweite ergänzende AGM-Postulat.

Theorem 2.30. *(Delgrande und Schaub, 2003, S. 11) Die Operatoren $\dot{+}_c$ und $\dot{+}$, aufgefasst als Operatoren über Belief-Sets im linken Argument, erfüllen folgende Postulate:*

1. *(AGM-R 1)–(AGM-R 4), (AGM-R 6), (AGM-R 7) und*

2. *die Abschwächung des Konsistenzpostulats (AGM-R' 5)*

Aufgefasst als Operatoren über Belief-Bases erfüllen $\dot{+}_c$ und $\dot{+}$ auch das Postulat für die Linksextensionaltät: Wenn O_1 und O_2 äquivalent sind, kurz: $O_1 \equiv O_2$, dann auch $O_1 * \alpha \equiv O_2 * \alpha$.

[43] Delgrande und Schaub (Delgrande und Schaub, 2003, S. 11) weisen darauf hin, dass prinzipiell auch der allgemeinere Fall einer Selektionsfunktion betrachtet werden kann, die eine Teilmenge von präferierten Indizes aus I auswählt. Die resultierenden Operatoren würden der Partial-Meet-Revision entsprechen.

[44] Da die Kontraktionsoperatoren für den in dieser Arbeit entwickelten Ansatz nicht relevant sind, werden sie hier ausgelassen.

Das Ergebnis der Revision unter $\dot{+}_c, \dot{+}$ ist nicht endlich. Delgrande und Schaub zeigen allerdings, dass sich endliche Varianten der Operatoren definieren lassen, bei denen das Revisionsergebnis ebenfalls eine endliche Wissensbasis ist. Konkret lassen sich Revisionsoperatoren $\circ^{endl}$ definieren (entsprechendes gilt für die Kontraktionsoperatoren), die als erstes Argument eine endliche Wissensbasis O, als zweites Argument einen Satz α erhalten und als Output eine endliche Wissensbasis $O \circ^{endl} \alpha$ liefern, so dass folgende Abschlussbedingung gilt:[45]

$$\mathrm{Cn}(O) \circ \alpha = \mathrm{Cn}(O \circ^{endl} \alpha) \tag{2.8}$$

Diese Gleichung hat das Muster, mit dem basigenerierte Revisionsoperatoren von Belief-Sets definiert werden (vgl. Gleichung (2.6) in Abschnitt 2.1.3). Für die Operatoren von Delgrande und Schaub gilt wegen der Linksextensionalität, dass die Revision einer (möglicherweise endlichen) Wissensbasis O als linkem Argument dasselbe Revisionsresultat liefert wie die Revision mit ihrem Abschluss:

$$\mathrm{Cn}(O) \circ \alpha = O \circ \alpha \text{ für } \circ \in \{\dot{+}, \dot{+}_c\}$$

Wegen dieser Gleichung und der Abgeschlossenheit des Revisionsresultats lässt sich Gleichung (2.8) auch darstellen durch

$$O \circ \alpha \equiv O \circ^{endl} \alpha$$

Die endliche Repräsentation basiert auf der geeigneten Ersetzung von Aussagensymbolen durch ihre Negation. Gegeben seien ein Belief-Change-Szenario $\mathcal{B}$ und eine Menge von Biimplikationen EQ_i. Die Formel $\lceil \alpha \rceil_i$ entsteht aus der Formel α mit $\mathcal{V}(\alpha) \subseteq \mathcal{V}_c$ (alle Aussagensymbole von α sind in $\mathcal{V}_c$ enthalten), indem jedes Vorkommen eines Aussagensymbols $p \in \mathcal{V}_c \setminus \mathcal{V}(EQ_i)$ durch seine Negation $\neg p$ ersetzt wird. Sei $\mathcal{B} = \langle O, \{\alpha\}, \emptyset \rangle$ ein Belief-Change-Szenario und $(E_i)_{i \in I}$ die Familie aller Belief-Change-Extensionen zu $\mathcal{B}$ sowie c eine Selektionsfunktion mit $c(I) = k$. Dann werden definiert:

$$\begin{aligned} \lceil \mathcal{B} \rceil &= \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{\beta \in O} \lceil \beta \rceil_i \\ \lceil \mathcal{B} \rceil_c &= \bigwedge_{\beta \in O} \lceil \beta \rceil_k \end{aligned}$$

[45] Das ist meine Rekonstruktion der etwas kryptischen und fehlerhaften Darstellung von Delgrande und Schaub (2000). In Theorem 9 von Delgrande und Schaub (2000) mus es statt $\mathrm{Cn}(K) \dot{+} \alpha = \mathrm{Cn}(\lceil \langle \mathrm{Cn}(K), \{\alpha\}, \emptyset \rangle \rceil \wedge \alpha)$ heißen $\mathrm{Cn}(K) \dot{+} \alpha = \mathrm{Cn}(\lceil \langle K, \{\alpha\}, \emptyset \rangle \rceil \wedge \alpha)$, da die Definition von $\lceil \langle K, U, V \rangle \rceil$ endliches K voraussetzt. Die Darstellung von Delgrande und Schaub (2003) enthält diesen Fehler nicht mehr, allerdings wird auch hier die endliche Repräsentierbarkeit nicht auf eine konkrete Formel gebracht.

Die endlichen Revisionsoperatoren werden schließlich definiert durch

$$\begin{aligned} O \dotplus_c^{endl} \alpha &= \lceil (O, \{\alpha\}, \emptyset \rceil_c \wedge \alpha \\ O \dotplus^{endl} \alpha &= \lceil (O, \{\alpha\}, \emptyset \rceil \wedge \alpha \end{aligned}$$

Mit dieser Notation lässt sich das endliche Repräsentationstheorem formulieren:

Theorem 2.31. *(Delgrande und Schaub, 2003, S. 17) Es gelten folgende endlichen Repräsentationen:*

$$O \dotplus_c \alpha \equiv O \dotplus_c^{endl} \alpha$$
$$O \dotplus \alpha \equiv O \dotplus^{endl} \alpha$$

Bemerkung 1. Delgrande und Schaub formulieren den Repräsentationssatz nur für den skeptischen Operator $\dotplus$. Ihr Beweis (Delgrande und Schaub, 2003, S. 33–34) zeigt jedoch auch die endliche Repräsentierbarkeit für $\dotplus_c$.

Die Operatoren $\dotplus, \dotplus_c$ von Delgrande und Schaub enthalten in Form der Menge von Biimplikationen EQ eine wichtige Komponente, die sie zu geeigneten Kandidaten für die semantische Integration von Ontologien macht. Die Menge EQ lässt sich als eine Menge von Brückenaxiomen verstehen, mit der Hypothesen über semantische Beziehungen zwischen einem öffentlichen Symbol p und einem internen Symbol p' gebildet werden. Allerdings sind zwei wichtige Adaptionen nötig. Da die Belief-Change-Extensionen E_i einen Schnitt mit der öffentlichen Sprache enthalten, sind die Brückenaxiome nicht mehr im Resultat enthalten. Ebenso geht auch die Wissensbasis des Empfängers verloren und lässt sich nicht mehr aus dem Resultat rekonstruieren. In manchen Integrationsszenarien gibt es jedoch einen guten Grund, die Empfängerwissensbasis im Resultat zu konservieren. Durch Weglassen der Schnittbildung in den Belief-Extensionen lassen sich aus Delgrandes und Schaubs Operatoren modifizierte Reinterpretationsoperatoren definieren, die dem Desiderat der Konservierung Rechnung tragen.

Die zweite Adaption betrifft die logische Sprache. Die Aussagenlogik bildet keinen hinreichend ausdrucksmächtigen Formalismus, mit dem sich Ontologien modellieren lassen. Möchte man Delgrandes und Schaubs Ansatz für Zwecke der Integration von Ontologien nutzen, sind sie auf ausdrucksstärkere Sprachen wie z.B. Beschreibungslogiken zu verallgemeinern.

Eine Verallgemeinerung, die beide Adaptionen enthält, wird im Kapitel 3 gegeben. Neben der Verallgemeinerung auf Beschreibungslogiken und die Prädikatenlogik wird auch die Menge der Brückenaxiome erweitert. Es werden nicht nur Äquivalenzbeziehungen zwischen Konzepten, $C \doteq C'$, betrachtet – diese bilden die kanonische Verallgemeinerung der Biimplikationen in der Aussagenlogik – sondern auch Unterkonzeptbeziehungen der Form $C \sqsubseteq C'$ bzw. allgemeiner $C \sqsubseteq C' \sqcup D$.

Bereits für Delgrandes und Schaubs Operatoren führt eine Erweiterung von EQ auf Implikationen der Form $p \rightarrow p'$ und $p' \rightarrow p$ zu neuen Revisionsoperatoren. Dieser Punkt wird in Abschnitt 4.2 (S. 117) gezeigt.

2.4.2 Der Ansatz von Goeb und Kollegen

Auch der Ansatz von Goeb und Kollegen (Goeb et al., 2007) enthält die Idee der Reinterpretation. Goeb und Kollegen stellen ein Verfahren zur Integration von TBoxen im Rahmen einer 1-zu-1-Kommunikation zwischen zwei Agenten vor, auf die unter der Bezeichnung Empfänger („receiver“) und Sender („sender“) Bezug genommen wird. Die Integration wird durch ein ABox-Axiom des Senders getriggert, welches eventuell nicht mit der Empfängerontologie konsistent ist. Nach dem Empfang des ABox-Axioms fordert der Empfänger den Sender auf, die für das ABox-Axiom relevanten Teile seiner TBox zuzuschicken, womit der eigentliche Integrationsprozess eingeleitet wird.

Der Integrationsprozess wird durch einen semiformalen Algorithmus beschrieben (Goeb et al., 2007, S. 112–133) und anhand eines Hauptbeispiels erläutert. Für das Verständnis des Integrationsoperators, den der Algorithmus induziert, ist keine genaue Kenntnis des Algorithmus nötig. Ich werde der Vollständigkeit halber jedoch in Klammern die Codezeilen angeben, aus denen die jeweils genannten logischen Eigenschaften folgen.

Zur Konfliktauflösung führt der Algorithmus neue Symbole ein, die mit einem Zeitmarker versehen sind. Die reinterpretierten Symbole sind dabei Rollen- oder Konzeptsymbole. Zu einem Symbol $s \in \mathcal{V}_c$ des öffentlichen Vokabulars $\mathcal{V}_c$ werden gleich zwei neue Symbole $\sigma_1(s)$ und $\sigma_2(s)$ eingeführt, die jeweils für das alte Symbol des Senders und das alte Symbol des Empfängers stehen. Der Integrationsprozess (die Autoren sprechen im Original von einem „Merge“) lässt sich in zwei Hauptphasen unterteilen, einer ersten Phase der vorläufigen Integration, gefolgt von einer Vervollständigung der Integration.

Um einen späteren Vergleich mit dem hier entwickelten Reinterpretationsansatz vorzubereiten, wird der durch den Algorithmus gegebene Integrationsoperator für die Menge von Axiomen O_1 der Empfängerontologie und die Menge der Axiome O_2 der Senderontologie formal und detailliert beschrieben. Zur Orientierung sind im Folgenden die verwendeten Symbole mit den von ihnen eingenommenen Rollen aufgelistet.

- $\mathcal{V}_c$: öffentliches Vokabular
- $\mathcal{V}_i^1$: Vokabular, das für die Ersetzung (Internalisierung) der Symbole aus der Empfängerontologie benutzt wird.

- $\mathcal{V}_i^2$: Vokabular, das für die Ersetzung (Internalisierung) der Symbole aus der Senderontologie benutzt wird. Es gilt $\mathcal{V}_i^1 \cap \mathcal{V}_i^2 = \emptyset$ und $\mathcal{V}_c \cap (\mathcal{V}_i^1 \cup \mathcal{V}_i^2) = \emptyset$.

- $\langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i^1 \rangle$: Empfängerontologie bestehend aus der Menge von Axiomen O_1, öffentlichem Vokabular $\mathcal{V}_c$ und internem Vokabular $\mathcal{V}_i^1$.[46]

- $\langle O_2, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i^2 \rangle$: Senderontologie bestehend aus der Menge von Axiomen O_2, öffentlichem Vokabular $\mathcal{V}_c$ und internem Vokabular $\mathcal{V}_i^2$.

- $T_1 = (O_1)_{TBox}$: TBox der Axiommenge der Empfängerontologie

- $T_2 = (O_2)_{TBox}$: TBox der Axiommenge der Senderontologie

- $Ab_1 = (O_1)_{ABox}$: ABox der Axiommenge der Empfängerontologie

- $Ab_2 = (O_2)_{ABox}$: ABox der Axiommenge der Senderontologie; im Gegensatz zu Goeb et al. soll hier angenommen werden, dass Ab_2 nur aus einem ABox-Axiom besteht – und zwar aus dem ABox-Axiom des Senders, das die Integration triggert.

- $S_{12} = \mathcal{V}_{KR}(O_1) \cap \mathcal{V}_{KR}(O_2)$: Die gemeinsame Menge an Konzept- und Rollensymbolen von O_1 und O_2

- $\sigma_1 \in \mathrm{AR}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i^1)$: Substitution für die Empfängerontologie mit Träger S_{12} aus der Menge aller injektiven Substitutionen, die Symbole aus $\mathcal{V}_c$ durch Symbole aus $\mathcal{V}_i^1$ ersetzen.[47]

- $\sigma_2 \in \mathrm{AR}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i^2)$: Substitution für die Senderontologie mit Träger S_{12}

- O_{dis}: Das Ergebnis der vollständigen Entkopplung der Empfänger- und Senderontologie.

- $O^+(S)$: Ergebnisontologie nach der ersten Phase des Algorithmus. S bezeichnet eine unter eventuell vorhandenen Alternativen gewählte Symbolmenge, von der $O^+(S)$ abhängt.

- O_{res}: Endresultat der Integration

[46] Der hier benutzte Ontologiebegriff wird in Abschnitt 3.1.1 genauer erläutert.

[47] Für die Definition von Substitutionen und von $\mathrm{AR}(\cdot, \cdot)$ vgl. Anhang A, Abschnitt A.2.2, S. 229.

Erste Phase des Algorithmus

In der ersten Phase des Algorithmus (Zeilen 1–24) werden die TBoxen des Senders und des Empfängers vollständig entkoppelt (Zeilen 1–6) und durch Einführung so genannter „triangles“ (Dreiecke) wieder zueinander in Beziehung gesetzt. Dabei wird ein „triangle“ zu einem Symbol $s \in \mathcal{V}_c$ durch die beiden Subsumptionsbeziehungen $\sigma_1(s) \sqsubseteq s$ und $\sigma_2(s) \sqsubseteq s$ beschrieben. Das alte Symbol s wird als Oberkonzept bzw. subsumierende Rolle der neu eingeführten Symbole $\sigma_1(s)$ und $\sigma_2(s)$ deklariert. Formal entspricht das der Bildung der Ontologie O_{dis}:

$$O_{dis} = (O_1)\sigma_1 \cup (O_2)\sigma_2 \cup \{\sigma_1(s) \sqsubseteq s, \sigma_2(s) \sqsubseteq s \mid s \in S_{12}\}$$

Die durch die „triangles“ eingeführten Beziehungen sind nicht als semantische Abbildungen zwischen den dissoziierten Symbolen des Senders $\sigma_1(s)$ und des Empfängers $\sigma_2(s)$ zu verstehen, da diese lediglich nebengeordnet werden, sondern jeweils als semantische Abbildungen zwischen den alten Symbolen s auf der einen und den internalisierten Symbolen $\sigma_1(s)$ bzw. $\sigma_2(s)$ auf der anderen Seite.

In einem weiterhin zur ersten Hauptphase gehörenden Teilschritt werden konsistenzerhaltende Rückübersetzungen betrachtet. Ziel ist es, möglichst viele Symbole in ihre ursprüngliche Form rückzuübersetzen. Der Algorithmus wählt beliebig (Zeile 19) eine maximale Menge von Symbolen aus, die konsistent rückübersetzt werden können. Formal lässt sich das durch eine Selektionsfunktion γ_1 rekonstruieren, die genau eine Menge X mit

$$X \in \{s \sqsubseteq \sigma_1(s), s \sqsubseteq \sigma_2(s) \mid s \in S_{12}\} \top O_{dis}$$

auswählt. Es sei

$$S_X = \{s \in S_{12} \mid s \sqsubseteq \sigma_1(s), s \sqsubseteq \sigma_2(s) \in X\}$$

die Menge der Symbole, für die eine Rückübersetzung ins alte Vokabular erfolgt. Dann bezeichnet $S = S_{12} \setminus S_X$ die Menge aller Symbole des gemeinsamen Vokabulars, die nicht konsistent rückübersetzt werden können. Bezeichnen σ_1^S, σ_2^S die Redukte von σ_1, σ_2 auf S, lässt sich das Ergebnis der ersten Hauptphase des Algorithmus beschreiben durch

$$O^+(S) = (O_1)\sigma_1^S \cup (O_2)\sigma_2^S \cup \{\sigma_1^S(s) \sqsubseteq s, \sigma_2^S(s) \sqsubseteq s \mid s \in S\}$$

Zweite Phase des Algorithmus

In der zweiten Hauptphase des Algorithmus (Zeilen 25–60) werden weitere Möglichkeiten gesucht, neue Symbole konsistenzerhaltend wieder zurück in die alten Symbole zu überführen. Dafür wird für jedes einzelne Symbol, das nicht bereits zurückübersetzt worden ist, in einer temporär gewählten Teilmenge der integrierten

TBoxen eine Rückübersetzung vorgenommen und auf Konsistenz überprüft (Zeilen 20–38). Es gilt hierbei zu beachten, dass implizit eine beliebige Reihenfolge der Symbole bestimmt wird, für die die weiteren Unterprozeduren (zur Konsistenzüberprüfung) aufgerufen werden. Diese Wahl der Reihenfolge kann das Ergebnis der Integration beeinflussen. Unter den für ein Symbol auf Konsistenz getesteten Teilmengen wird wieder (Zeile 40) eine maximal konsistente Teilmenge ausgesucht und die entsprechende Ersetzung in der vorläufig integrierten TBox vorgenommen (Zeilen 41–43).[48] In den folgenden Codezeilen 44–60 werden weitere Rückübersetzungen realisiert. Leider motivieren oder erläutern Goeb und Kollegen diese Unterprozedur nicht anhand ihres Hauptbeispiels, was umso bedauerlicher ist, da die Codezeilen 48 und 52 einen Fehler zu enthalten scheinen.[49]

Formal lassen sich die Ersetzungen der zweiten Hauptphase durch nichtuniforme Substitutionen modellieren. Der folgende Abschnitt stellt die nötigen Konzepte bereit, um die resultierende Menge von Ontologieaxiomen O_{res} formal zu beschreiben. Die Menge Σ_1^S enthält alle Substitutionen, die eventuell weniger Symbole aus S als σ_1^S ins neue Vokabular übersetzen.

$$\Sigma_1^S = \{\sigma : S \longrightarrow \sigma_1^S(S) \cup S \mid \forall s \in S : \sigma(s) = s \text{ oder } \sigma(s) = \sigma_1^S(s)\}$$

Die Menge der *Namensvarianten* von $\alpha \in O_1$ bzgl. Σ_1^S sei

$$\Sigma_1^S(\alpha) = \{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in \Sigma_1^S\}$$

Entsprechend werden Σ_2^S und $\Sigma_2^S(\alpha)$ für $\alpha \in O_2$ definiert. Für die Menge Σ_1^S lässt sich eine zweistellige Relation $<$ definieren, mit der sich formal fassen lässt, dass eine Substitution σ weniger Symbole aus S echt betrifft als eine andere Substitution σ'. In diesem Fall wird auch davon gesprochen werden, dass σ stärker ist als σ'.

$$\begin{array}{lll} \sigma < \sigma' & \text{gdw.:} & \text{Für alle } s \in S \text{ gilt: Wenn } \sigma'(s) \in S, \text{ dann } \sigma(s) \in S, \\ & & \text{und es existiert ein } s \in S, \text{ so dass } \sigma'(s) \neq \sigma(s). \end{array}$$

Direkt aus der Definition folgt, dass $(\Sigma_1^S, <)$ ein Verband ist, dessen kleinstes Element unter $<$ die Identitätsfunktion id_S und dessen größtes Element σ_1^S ist. Entsprechendes gilt für $(\Sigma_2^S, <)$.

Die aus der zweiten Hauptphase des Algorithmus resultierende Ontologie O_{res} lässt sich mittels der oben definierten Konzepte wie folgt darstellen. Es gibt

[48]Leider geht aus dem Algorithmus nicht immer (insbesondere in den Zeilen 41–43) eindeutig hervor, wo genau welche Ersetzung stattfindet. Dass sich die Ersetzungen in den Zeilen 41–43 auch auf die TBox beziehen, wird auf die auch im Haupttext (S. 110–111) genannte Parallelität mit den Zeilen 20–24 zurückgeführt.

[49]Statt „successful“ muss es jeweils „unsuccessful“ heißen.

- Symbolmengen $S_1, S_2 \subseteq S$;
- Substitutionen $\tau_{Ab_1} \in \Sigma_1^{S_1}$ sowie $\tau_{Ab_2} \in \Sigma_2^{S_2}$ mit $\tau_{Ab_1}(s) \notin S$ für alle $s \in S_1$ und $\tau_{Ab_2} \notin S$ für alle $s \in S_2$;
- Partitionen der TBoxen $T_1 = \biguplus_{1 \leq i \leq k} T_{1i}$ und $T_2 = \biguplus_{1 \leq i \leq l} T_{2i}$;
- (nicht zwingend eindeutig bestimmte) Substitutionen $\tau_{11}, \ldots, \tau_{1k} \in \Sigma_1^{S_1}$ mit $\forall 1 \leq i \leq k : \tau_{1i} \leq \tau_{Ab_1}$
- (nicht zwingend eindeutig bestimmte) Substitutionen $\tau_{21}, \ldots, \tau_{2l} \in \Sigma_1^{S_1}$ mit $\forall 1 \leq i \leq l : \tau_{2i} \leq \tau_{Ab_2}$;

so dass sich das Ergebnis der Integration O_{res} schreiben lässt als

$$\begin{aligned} O_{res} \quad = \quad & (Ab_1)\tau_{Ab_1} \cup (Ab_2)\tau_{Ab_2} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq k} T_{1i}\tau_{1i} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq l} T_{2i}\tau_{2i} \cup \\ & \{\tau_{Ab_1}(s) \sqsubseteq s \mid s \in S_1\} \cup \{\tau_{Ab_2}(s) \sqsubseteq s \mid s \in S_2\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Die in Gleichung (2.9) gegebene Darstellung von O_{res} besagt, dass jeder Satz $\alpha \in O_1$ der Empfängerontologie in einer Namensvariante bzgl. $\Sigma_1^{S_1}$ im Endresultat enthalten ist. Entsprechend ist jedes $\alpha \in O_2$ der Senderontologie in einer Namensvariante bzgl. $\Sigma_2^{S_2}$ im Endresultat enthalten. Außerdem bedeutet $(Ab_1)\tau_{Ab_1} \subseteq O_{res}$, dass die ABox des Empfängers als Ganzes durch uniforme Substitutionen in das Endresultat überführt wird. Entsprechend bedeutet $(Ab_2)\tau_{Ab_2} \subseteq O_{res}$, dass die ABox des Senders als ganzes durch uniforme Substitutionen in das Endresultat überführt wird. Man beachte aber, dass im Allgemeinen nicht garantiert werden kann, dass die Substitutionsvarianten der Empfänger- oder Senderontologie in O_{res} enthalten ist. Für die Integration von Ontologien, die sich in der Praxis bewährt haben und daher konserviert werden sollten, ist der Algorithmus von Goeb und Kollegen (Goeb et al., 2007) aus diesem Grunde nicht geeignet.

Da der Integrationsoperator von Goeb und Kollegen zwei Wissensbasen integriert, kann er darauf hin geprüft werden, welche der für Wissensbasen formulierten Postulate (MR 1)–(MR 8) (S. 33) er erfüllt.

Beobachtung 2.32. *Der von Goeb und Kollegen (Goeb et al., 2007) implizit definierte Operator erfüllt das Postulat (MR 4). Er erfüllt nicht (MR 1)–(MR 3), (MR 5)–(MR 6).*

Beweis. Siehe S. 247.

3

Reinterpretation: das formale Modell

In diesem Kapitel wird der formale Rahmen für eine Methode der semantischen Integration abgesteckt, die für die Integration zweier Ontologien mit verwandten aber eventuell konfligierenden Terminologien intendiert ist. Für die Formalisierung haben sich die Techniken der Belief-Revision bewährt. Die semantische Integration zweier Ontologien wird durch einen zweistelligen Operator modelliert, der zwei Ontologien auf eine resultierende Ontologie (und zusätzlich eine Menge von semantischen Abbildungen) abbildet. In den Abschnitten 3.2 und 3.3 werden verschiedene Typen von Integrationsoperatoren definiert und analysiert, die auf der Reinterpretation von ambigen Symbolen der öffentlichen Sprache basieren.

Während in der semantischen Integration verschiedene Formen von konkreten semantischen Integrationsmethoden beschrieben sind, bleibt die begründete Forderung nach einer unabhängigen axiomatischen Spezifikation von Adäquatheitskriterien für ein bestimmtes Integrationsszenario zumeist unerfüllt. Auch hier bewährt sich der in der Belief-Revision in Form von Postulaten gewählte Ansatz zur axiomatischen Spezifikation von Adäquatheitskriterien. Abschnitt 3.1 entwickelt, ausgehend vom Basissatz der AGM-Postulate, eine Menge von Integrationspostulaten, die als Kriterien für die adäquate Integration von Ontologien mit verwandten Terminologien genutzt werden können.

3.1 Postulate für Ontologieintegration

Durch eine formale Repräsentation von Adäquatheitskriterien für die Integration von Ontologien lassen sich die Eigenschaften, die Methoden/Operatoren zur Integration haben sollen, eindeutig und exakt spezifizieren. Darüber hinaus bietet die postulatsbasierte Spezifikation die Möglichkeit, verschiedene Integrationsmethoden miteinander zu vergleichen. Ausgehend von dem Basissatz an AGM-Postulaten werden in diesem Abschnitt zwei (miteinander inkompatible) Mengen von Postulaten beschrieben, die ein adäquates Verhalten von zweistelligen Operatoren in dem hier intendierten Integrationsszenario spezifizieren sollen.

3.1.1 Ontologien und Integrationsszenarien

Der in dieser Arbeit verwendete Begriff einer Ontologie lehnt sich an die übliche (algebraische) Formalisierung durch ein Tupel $\langle O, Sig \rangle$ an; O steht hierbei für eine Menge von Axiomen über einem Vokabular bzw. – genauer – eine Signatur Sig, in der auch die Stelligkeit der Symbole beschrieben ist[1]. Dieser Ontologiebegriff wird dadurch erweitert, dass die Signatur zusätzlich in interne und öffentliche Symbole aufgeteilt wird.

Ontologien $\mathcal{O}$ werden in dieser Arbeit durch ein Tripel $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ repräsentiert. Das erste Argument O ist die Menge der Ontologieaxiome. Sie besteht aus einer endlichen Menge von Sätzen in einer logischen Sprache, die zur Beschreibung von Individuen, Konzepten und Relationen geeignet ist. In dieser Arbeit benutze ich Beschreibungslogiken für die Repräsentation von Ontologien (s. Anhang A, Abschnitt A.2 für einen Überblick). Das zweite und dritte Argument sind Vokabulare von nichtlogischen Symbolen der zu Grunde liegenden logischen Sprache. $\mathcal{V}_c$ beschreibt das öffentliche Vokabular, in dem Inhalte der Ontologie $\mathcal{O}$ nach außen kommuniziert und Inhalte fremder Ontologien importiert werden können. $\mathcal{V}_i$ ist das interne Vokabular, das nicht für die Kommunikation, sondern nur für interne Repräsentationen bestimmt ist. Für welche Zwecke genau das interne Vokabular $\mathcal{V}_i$ genutzt wird, soll nicht durch die hier gewählte Definition einer Ontologie eingeschränkt werden. Im folgenden Abschnitt wird eine konkrete Verwendung des internen Vokabulars als Mittel zur Ambiguitätsauflösung durch Namensraumauftrennung vorgestellt. Das interne Vokabular wird als hinreichend reichhaltig vorausgesetzt. Da die Menge der Ontologieaxiome endlich ist, gilt $\mathcal{V}_i$ schon dann als reichhaltig, wenn es unendlich ist.

Einige der AGM-Postulate können ohne größere Änderung auch als Rationalitätspostulate für Ontologie-Integrationsoperatoren verwendet werden. Andere Postulate (wie das Konsistenzpostulat) erfordern eine stärkere Adaption an das

[1] Vgl. Kalfoglou und Schorlemmer (2005), Grau et al. (2008).

Szenario zur semantischen Integration zweier Ontologien. Schließlich wird auch eine Ergänzung um weitere Postulate nötig, die das Mittel der Namensraumauftrennung in Form von Substitutionen[2] explizit einbeziehen. Die unten formulierten Postulate stellen nur einen minimalen Satz an Adäquatheitskriterien dar, der an ein bestimmtes unten zusammengefasstes Integrationsszenario ausgerichtet ist. Weitere Postulate, die Relevanz- und Minimalitätsaspekte sowie das Verhalten unter iterierter Integration betreffen, werden in den folgenden Kapiteln 5 bzw. 6 dieser Arbeit behandelt.

Das intendierte Szenario zur Integration zweier Ontologien, für das die Postulate Adäquatheitskriterien spezifizieren sollen, lässt sich wie folgt beschreiben: Ein Agent, auch *Empfänger* genannt, möchte eine Ontologie über derselben Domäne $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i' \rangle$ in seine Ontologie $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ integrieren. Die zweite Ontologie $\mathcal{O}_2$ wird auch die *triggernde Ontologie* oder einfach *Trigger* genannt. Der Träger der zweiten Ontologie wird auch der *Sender* genannt. $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ sind beide gut entwickelte und hinreichend erprobte Ontologien, die entweder gar nicht geändert oder zumindest in einer reproduzierbaren Variante im Integrationsresultat konserviert werden sollen. Die Terminologien der beiden Ontologien werden als verwandt vorausgesetzt. Beide Ontologien enthalten Symbole eines gemeinsamen öffentlichen Vokabulars $\mathcal{V}_c$ von nichtlogischen Symbolen, kurz $\mathcal{V}(O_1 \cup O_2) \subseteq \mathcal{V}_c$. O_1 kann Symbole aus einem zu $\mathcal{V}_c$ disjunkten, internen Vokabular $\mathcal{V}_i$ enthalten. Es wird angenommen, dass dem Träger der ersten Ontologie für die Integration nur der öffentliche Teil $O_2' = O_2 \cap \text{Satz}(\mathcal{V}_c)$ der zweiten Ontologie zugeschickt wird. Es wird daher angenommen, dass $\mathcal{V}(O_2) \subseteq \mathcal{V}_c$ ist bzw. gleich $\mathcal{V}_i' = \emptyset$ gesetzt ist.

Da nichtlogische Symbole aus dem öffentlichen Vokabular $\mathcal{V}_c$ in den beiden Ontologien in unterschiedlicher Weise axiomatisch spezifiziert sein können, kann es zu *Ambiguitätskonflikten in der öffentlichen Sprache* kommen, die durch die Integration aufzulösen sind. In den Postulaten wird die Ambiguität in der öffentlichen Sprache als der einzige Konfliktfall angesehen, der durch die spezifizierten Integrationsoperatoren zu behandeln ist. Das in der semantischen Integration benutzte Mittel der Namensraumauftrennung wird in den Postulaten wie auch in den folgenden Definitionen der reinterpretationsbasierten Integrationsoperatoren durch die Klasse der Substitutionen in der Klasse $\text{AR}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$ formalisiert, der Menge aller injektiven Substitutionen von Symbolen $\mathcal{V}_c$ auf Symbole in $\mathcal{V}_i$.

Definition 3.1. Gegeben seien disjunkte Vokabulare $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$, $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \emptyset$, die den Kategorien $X \supseteq \mathcal{V}$ und $X' \supseteq \mathcal{V}'$ an wohlgeformten Zeichenketten zugeordnet sind. Die Menge der *Substitutionen zur Ambiguitätsauflösung* $\text{AR}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ ist die Menge aller injektiven Substitutionen $\sigma : (\mathcal{V} \cup \mathcal{V}') \longrightarrow (X \cup X')$, die jedes Symbol $s \in \mathcal{V}$

[2] Vgl. Anhang A, Abschnitt A.2.2.

entweder auf sich oder auf ein Symbol aus $\mathcal{V}'$ abbilden und alle Symbole $s \in \mathcal{V}'$ auf sich selbst abbilden.[3]

Das intendierte Szenario wird hier wie auch im Folgenden immer als ein Szenario zur Integration von Ontologien beschrieben. In dieser Verwendung des Terms „Integration" oder „Ontologieintegration" weiche ich von der Terminologie gemäß der Klassifikation von Flouris und Kollegen (Flouris et al., 2008) ab. Gemäß Flouris und Kollegen ist das in dieser Arbeit vorausgesetzte Szenario eher als Mischung (Verschmelzung) von Ontologien („ontology merge") zu verstehen, da die Domänen der beiden Ontologien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ als stark überlappend oder identisch vorausgesetzt werden.[4] Wenn im Folgenden von Integrationsoperatoren gesprochen wird, so sind diese entsprechend als Operatoren zu verstehen, die eine Mischung im Sinne von Flouris und Kollegen verwirklichen.

3.1.2 Integrationspostulate

Die folgenden Postulate sollen zweistellige Operatoren $\circ$ spezifizieren, die terminologieabhängige Inkompatibilitäten zwischen zwei Ontologien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ auflösen. Wie auch im Falle der Belief-Revision wird die Redeweise benutzt, dass ein Operator $\circ$ ein Postulat P erfüllt, wenn P für alle Ontologien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, die weiteren gegebenenfalls in P beschriebenen Bedingungen gehorchen müssen, wahr ist. Anders als bei Özçep (2008) werden die Postulate nicht in der an Qi und Kollegen (Qi et al., 2006) orientierten Form mittels des Modellbegriffs, sondern in der AGM-typischen Art mittels eines Folgerungsoperators Cn formuliert. Da die erste Ontologie interne Symbole enthalten kann, liegt der Formulierung der Postulate der Folgerungsoperator $\mathrm{Cn} = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i}$ zu Grunde, mit dem alle Folgerungen bzgl. des Gesamtvokabulars von $\mathcal{O}_1$, d.h. $\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i$, berechnet werden. Für alle Postulate sind $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und $\mathcal{O}_1' = \langle O_1', \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ (Empfänger-)Ontologien, die als linkes Argument des Operators $\circ$ fungieren können, und $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \emptyset \rangle$ sowie $\mathcal{O}_2 = \langle O_2', \mathcal{V}_c, \emptyset \rangle$ (Sender-)Ontologien, die als rechtes Argument fungieren können. Abkürzend wird statt $\mathrm{Cn}(O) = \mathrm{Cn}(O')$ einfach $O \equiv O'$ geschrieben.

Die Postulate sind alle für zwei Ontologien $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \emptyset \rangle$ formuliert. Die Ontologieintegrationsoperatoren $\circ$ selber jedoch operieren auf den zu Grunde liegenden Mengen von Ontologieaxiomen O_1, O_2. Die resultierende Menge von Ontologieaxiomen $O_1 \circ O_2$ wird einer Ontologie $\mathcal{O}_{res} = \langle O_1 \circ O_2, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ zugeordnet, die dasselbe öffentliche Vokabular wie die ursprünglichen Ontologien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ und das interne Vokabular der ersten Ontologie $\mathcal{O}_1$ enthält. Diese Tatsachen werden in den Postulaten nicht mehr explizit erwähnt.

[3] Aus der Definition folgt für $\sigma \in \mathrm{AR}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$, dass $\sigma[\mathcal{V} \cup \mathcal{V}'] \subseteq \mathcal{V} \cup \mathcal{V}'$. Vgl. in Anhang A Abschnitt A.2.2.

[4] Siehe hierzu auch die Besprechung in Abschnitt 2.3.

Da Ontologien zur Konzeptualisierung einer (Anwendungs-)Domäne konzipiert sind, sollte die rein syntaktische Repräsentation von Ontologien nicht zu semantischen Unterschieden in der Integration führen. Das Integrationsresultat bzgl. $\circ$ soll also nur von semantischen Eigenschaften der Input-Ontologien abhängen. Die Bedingung (+) beschreibt einen Teil der Forderung nach Syntaxunabhängigkeit in Form der Extensionalität bzgl. des linken Arguments von $\circ$.

(+) Wenn $O_1 \equiv O_1'$, dann auch $O_1 \circ O_2 \equiv O_1' \circ O_2$. (Linksextensionalität)

Da in dieser Arbeit die Menge der internen Symbole als wesentliche Komponente einer Ontologie verstanden wird, bietet sich eine schwächere Form von Linksextensionalität an. Für diese Variante, (Reint 1a), wird neben der logischen Äquivalenz der linken Argumente zusätzlich die Identität der verwendeten internen Symbole gefordert. Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, soll die Äquivalenz der resultierenden Mengen von Ontologieaxiomen sicher gestellt sein.

(Reint 1a) Wenn $O_1 \equiv O_1'$ und $\mathcal{V}(O_1) \cap \mathcal{V}_i = \mathcal{V}(O_1') \cap \mathcal{V}_i$ gelten, dann gilt auch $O_1 \circ O_2 \equiv O_1' \circ O_2$. (Reint-Linksextensionalität)

Entsprechend lässt sich die Syntaxunabhängigkeit der Integrationsoperatoren $\circ$ bzgl. des rechten Arguments formulieren. Da vorausgesetzt wurde, dass die Mengen von Ontologieaxiomen O_2 bzw. O_2' nur öffentliche Symbole enthalten, ist im Gegensatz zur Linksextensionalität keine abschwächende Formulierung der Rechtsextensionalität nötig.

(Reint 1b) Wenn $O_2 \equiv O_2'$, dann auch $O_1 \circ O_2 \equiv O_1 \circ O_2'$.
(Reint-Rechtsextensionalität)

Die Syntaxunabhängigkeit der Operatoren wird implizit auch in den folgenden mit # gekennzeichneten Postulaten eingefordert, indem die Spezifikationen jeweils bzgl. des logischen Abschlusses mit dem Folgerungsoperator Cn formuliert werden. Neben den mit # gekennzeichneten Postulaten, die eine syntaxunabhängige Spezifikation der Ontologieintegrationsoperatoren $\circ$ realisieren, werden im Folgenden auch syntaxsensitive, von der Belief-Base-Revision motivierte Varianten angegeben. Sofern zwei Varianten von Postulaten angegeben sind, ist die syntaxunabhängige Variante durch ein # als Superskript gekennzeichnet, die syntaxsensitive bekommt kein Superskript. Existiert nur eine Variante, bekommt sie kein Superskript. Die Begründung der Postulate wird jeweils, sofern eine Unterscheidung vorliegt, nur für die syntaxunabhängige (mit # gekennzeichnete) Variante gegeben, da hier das Verhalten von Operatoren zur Integration von Ontologien, deren syntaktische Repräsentation irrelevant sein sollte, spezifiziert werden. Die andere stärkere Variante wird aufgeführt, da sie von den Reinterpretationsoperatoren, die im folgenden Abschnitt definiert sind, erfüllt werden.

Falls zwei Ontologien kompatibel sind, sollen die synergetischen Effekte beider Ontologien genutzt werden, um die Bedeutungen der Symbole in der öffentlichen

Sprache $\mathcal{V}_c$ näher einzugrenzen. Sind z.B. O_1 und O_2 miteinander kompatibel und gilt bzgl. O_1, dass ein Konzept K einem anderen Konzept L_1 untergeordnet ist, in O_2 das Konzept K einem Konzept L_2 untergeordnet ist, dann wird in der gemeinsamen Menge $O_1 \cup O_2$ eine Verschärfung des Konzepts K durch die Oberabschätzung mit $L_1 \sqcap L_2$ gelten, $O_1 \cup O_2 \models K \sqsubseteq (L_1 \sqcap L_2)$. Im Falle der Kompatibilität soll die Integration durch die Bildung einer Menge erfolgen, die mit der Vereinigung der beiden Mengen von Ontologieaxiomen äquivalent ist.

(Reint$^\#$ 2) Wenn $O_1 \cup O_2$ konsistent ist (d.h. $\bot \notin \mathrm{Cn}(O_1 \cup O_2)$ gilt), dann ist $O_1 \circ O_2 \equiv O_1 \cup O_2$. (Reint$^\#$-Vakuität)

Das Postulat (Reint 2) fordert die Gleichheit des Integrationsresultats mit $O_1 \cup O_2$ statt wie im Falle von (Reint$^\#$ 2) nur die Äquivalenz.

(Reint 2) Wenn $O_1 \cup O_2$ konsistent ist (d.h. $\bot \notin \mathrm{Cn}(O_1 \cup O_2)$ gilt), dann ist $O_1 \circ O_2 = O_1 \cup O_2$. (Reint-Vakuität)

Das mit (Reint$^\#$ 2) verwandte Inklusionspostulat fordert, dass das Integrationsresultat im Abschluss der Vereinigung von O_1 und O_2 enthalten sein muss. Wenn $O_1 \cup O_2$ inkonsistent ist, ist die Bedingung trivialerweise erfüllt. Ist $O_1 \cup O_2$ konsistent, dann folgt das Postulat bereits aus der Vakuität. Ich führe das Postulat dennoch auf, da eine stärkere Variante des Inklusionspostulats (Reint 3) nicht aus der Vakuität gefolgert werden kann. Das Postulat (Reint 3) fordert, dass die Einschränkung des Integrationsresultats auf das öffentliche Vokabular und die internen Symbole, die bereits in O_1 enthalten sind, eine Untermenge von $O_1 \cup O_2$ ist.

(Reint$^\#$ 3) $O_1 \circ O_2 \subseteq \mathrm{Cn}(O_1 \cup O_2)$ (Reint$^\#$-Inklusion)

(Reint 3) $(O_1 \circ O_2) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O_1)) \subseteq O_1 \cup O_2$ (Reint-Inklusion)

Terminologische Konflikte zwischen den Ontologien des intendierten Integrationsszenarios entstehen durch die Nutzung eines öffentlichen Vokabulars $\mathcal{V}_c$. Eine Auflösung der Konflikte sollte möglichst die ursprünglichen Terminologien und die hierin geltenden Beziehungen wie auch die im öffentlichen Vokabular geltenden Beziehungen konservieren, da sonst keine echte Kommunikation (Integration) bzgl. der öffentlichen Sprache erfolgen würde. Das Monotoniepostulat (Reint$^\#$ 4a) erzwingt die Konservierung der Ontologieaxiome O_1, das Erfolgspostulat (success) (Reint$^\#$ 4b) erzwingt die Konservierung der Ontologieaxiome O_2 – jeweils modulo des Abschlusses bzgl. des Folgerungsoperators Cn. Die stärkeren Varianten erfordern jeweils die Konservierung der ursprünglichen Menge von Ontologieaxiomen O_1 bzw. O_2 direkt im Integrationsresultat.

(Reint$^\#$ 4a) $O_1 \subseteq \mathrm{Cn}(O_1 \circ O_2)$ (Reint$^\#$-Monotonie)

(Reint 4a) $O_1 \subseteq O_1 \circ O_2$ (Reint-Monotonie)

(Reint$^{\#}$ 4b) $O_2 \subseteq \mathrm{Cn}(O_1 \circ O_2)$ (Reint$^{\#}$-Erfolg)

(Reint 4b) $O_2 \subseteq O_1 \circ O_2$ (Reint-Erfolg)

Die beiden Postulate (Reint$^{\#}$ 4a) und (Reint$^{\#}$ 4b) (bzw. (Reint 4a) und (Reint 4b)) können nicht durch einen Operator $\circ$ erfüllt werden, sofern das Ergebnis der Integration eine konsistente Ontologie sein soll. Ein Operator, der ein konsistentes Resultat liefern soll, muss zur Elimination von Teilen der ersten oder zweiten Ontologie führen. Daher sind diese Postulate nicht als Prinzipien zu verstehen, die alle Operatoren zur semantischen Integration erfüllen sollten; vielmehr legt die Inkompatibilität der Postulate (Reint$^{\#}$ 4a) und (Reint$^{\#}$ 4b) die Definition von zwei Typen von Operatoren nahe (s. die Typ-1- und Typ-2-Operatoren im folgenden Abschnitt 3.2).

In dem intendierten Integrationsszenario werden die zu integrierenden Ontologien als hinreichend erprobt und gut entwickelt vorausgesetzt. Daher gibt es einen guten Grund, auf der Konservierung und Rekonstruierbarkeit beider Ontologien zu bestehen. Die Konservierungspostulate (Reint$^{\#}$ 5a) und (Reint$^{\#}$ 5b) fordern, dass Substitutionsvarianten der ersten bzw. zweiten Ontologie im Abschluss des Integrationsresultats erhalten bleiben. Die stärkeren Varianten fordern die Konservierung direkt im Integrationsresultat.

(Reint$^{\#}$ 5a) Es gibt eine Substitution σ_1, so dass $O_1\sigma_1 \subseteq \mathrm{Cn}(O_1 \circ O_2)$.
(Reint$^{\#}$-Linkskonservierung)

(Reint 5a) Es gibt eine Substitution σ_1, so dass $O_1\sigma_1 \subseteq O_1 \circ O_2$.
(Reint-Linkskonservierung)

(Reint$^{\#}$ 5b) Es gibt eine Substitution σ_2, so dass $O_2\sigma \subseteq \mathrm{Cn}(O_1 \circ O_2)$.
(Reint$^{\#}$-Rechtskonservierung)

(Reint 5b) Es gibt eine Substitution σ_2, so dass $O_2\sigma_2 \subseteq O_1 \circ O_2$.
(Reint-Rechtskonservierung)

Postulat (Reint$^{\#}$ 5a) verallgemeinert das Monotoniepostultat (Reint$^{\#}$ 4a) – wie sich durch Wahl der Identitätsfunktion für σ_1 sehen lässt. Postulat (Reint$^{\#}$ 5b) verallgemeinert das Erfolgspostulat (Reint$^{\#}$ 4b). Obwohl es keine Operatoren gibt, die die Konsistenz des Integrationsresultats (Postulat (Reint 7)) gewährleisten und sowohl (Reint$^{\#}$ 4a) als auch (Reint$^{\#}$ 4b) erfüllen, lassen sich zwei verschiedene Klassen von Operatoren definieren, die das Paar von Postulaten (Reint$^{\#}$ 4a) und (Reint$^{\#}$ 5b) bzw. das Paar von Postulaten (Reint$^{\#}$ 4b) und (Reint$^{\#}$ 5a) erfüllen. An diesen Postulaten werden die unterschiedlichen Ziele, die man mit den Operatoren zur semantischen Integration auf der einen und den Belief-Revisionsoperatoren sowie Belief-Updateoperatoren auf der anderen Seite verfolgt, deutlich. Belief-Revision behebt Konflikte, die auf vorher erworbener Falschinformation zurückzuführen sind, Belief-Update Konflikte, die auf veraltete Information zurückzuführen sind. Dabei wird in beiden Fällen zwar der Trigger O_2 vollständig integriert – allerdings auf Kosten eines Verlusts von O_1. Mit der auf Reinterpretation basierenden semantischen Integration hingegen werden Konflikte behoben, die auf unterschiedliche Terminologien zurückzuführen sind. In diesen Fällen ist eine (nicht rekonstruierbare) Elimination von Teilen der integrierten Ontologien nicht gestattet.

Die Postulate (Reint$^{\#}$ 6a) und (Reint$^{\#}$ 6b) sind weitere Verallgemeinerungen der Monotonie- und Erfolgspostulate. Sie fordern die Rekonstruierbarkeit der ursprünglichen Ontologien aus dem Abschluss des Integrationsresultats. (Reint$^{\#}$ 6a) fordert die Existenz einer Substitution σ_1, so dass O_1 im Abschluss der Substitutionsvariante des Integrationsresultats unter σ_1 enthalten ist. Entsprechend fordert (Reint$^{\#}$ 6b) die Existenz einer Substitution σ_2, so dass O_2 im (Abschluss) der Substitutionsvariante des Integrationsresultats unter σ_2 enthalten ist. Die stärkeren Varianten (Reint 6a) und (Reint 6b) erzwingen die Rekonstruierbarkeit direkt aus dem Integrationsresultat.

(Reint$^{\#}$ 6a) Es gibt eine Substitution σ_1, so dass $O_1 \subseteq \text{Cn}((O_1 \circ O_2)\sigma_1)$.
(Reint$^{\#}$-Linksrekonstruierbarkeit)

(Reint 6a) Es gibt eine Substitution σ_1, so dass $O_1 \subseteq (O_1 \circ O_2)\sigma_1$.
(Reint-Linksrekonstruierbarkeit)

(Reint$^{\#}$ 6b) Es gibt eine Substitution σ_2, so dass $O_2 \subseteq \text{Cn}((O_1 \circ O_2)\sigma_2)$.
(Reint$^{\#}$-Rechtsrekonstruierbarkeit)

(Reint 6b) Es gibt eine Substitution σ_2, so dass $O_2 \subseteq (O_1 \circ O_2)\sigma_2$.
(Reint-Rechtsrekonstruierbarkeit)

Falls ein Operator beide Konservierungspostulate (Reint$^{\#}$ 5a) und (Reint$^{\#}$ 5b) erfüllt, gilt für alle integrierbaren Mengen von Ontologieaxiomen O_1, O_2, dass Substitutionen σ_1 und σ_2 existieren, so dass $O_1\sigma_1 \cup O_2\sigma_2 \subseteq \text{Cn}(O_1 \circ O_2)$ gilt. Daher ist die Existenz von Substitutionen σ_1, σ_2, so dass $O_1\sigma_1 \cup O_2\sigma_2$ konsistent ist, eine notwendige Bedingung für die Konsistenz des Integrationsresultats $O_1 \circ O_2$. Diese Bedingung drückt aus, dass es keine vom Vokabular unabhängigen Konflikte zwischen den Ontologien gibt. Die folgende Definition hält diese Bedingung unter dem Terminus *Reinterpretationskompatibilität* fest.

Definition 3.2. Seien $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i' \rangle$ zwei Ontologien mit $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_i' = \emptyset$. Dann heißen O_1 und O_2 *reinterpretationskompatibel*, kurz $\text{rekomp}(O_1, O_2)$, genau dann, wenn es Substitutionen $\sigma_1 \in \text{AR}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$ und $\sigma_2 \in \text{AR}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i')$ gibt, so dass $O_1\sigma_1 \cup O_2\sigma_2$ konsistent ist.

Das schwache Konsistenzpostulat (Reint 7) erklärt Reinterpretationskompatibilität zu einer hinreichenden Bedingung für die Konsistenz des Integrationsresultats.

(Reint 7) Falls O_1 und O_2 reinterpretationskompatibel sind, ist $O_1 \circ O_2$ konsistent. (Reint-Konsistenz)

Bemerkung 2. Reinterpretationskompatibilität fordert die Existenz von Substitutionen, mit denen eine konsistente Entkopplung von Ontologien erfolgt. In der Literatur zur semantischen Integration wird neben der Konsistenz von Ontologien auch die Eigenschaft der Kohärenz einer Ontologie diskutiert. Eine Menge von Ontologieaxiomen O ist *kohärent* genau dann, wenn sie kein benanntes, leeres Konzept enthält, d.h. wenn kein Konzeptsymbol K existiert, so dass $O \models K \sqsubseteq \bot$ (Flouris et al., 2006). Zwei reinterpretationskompatible Ontologien können (nach eventueller Entkopplung durch Substitutionen) zu einer konsistenten, inkohärenten Ontologie führen; z.B. gilt für $O_1 = \{K \sqsubseteq L\}$, $O_2 = \{K \sqsubseteq \neg L\}$, dass $O_1 \cup O_2$ konsistent, aber nicht kohärent ist, da $O_1 \cup O_2 \models K \sqsubseteq \bot$.

Parallel zum Konsistenzpostulat (Reint 7) lassen sich Kohärenzpostulate formulieren, die statt der Konsistenzeigenschaft die Kohärenzeigenschaft benutzen (Flouris et al., 2006, Postulat (O+3*)). Ich werde den Kohärenzaspekt im Folgenden vollständig ausblenden.

Falls zwei Mengen von Ontologieaxiomen reinterpretationskompatibel sind, sind beide Mengen jeweils konsistent. Da in der semantischen Integration in den meisten der betrachteten Fälle die zu integrierenden Ontologien konsistent sind, werden in dieser Arbeit auch nur Integrationspostulate formuliert, die das Verhalten von Operatoren für konsistente Ontologien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ spezifizieren.

Das Postulat (Reint 7) ist eine abgeschwächte Variante des AGM-Konsistenzpostulats (AGM-R 5) (S. 20), das die Konsistenz des Revisionsresultats fordert, wenn der Trigger (O_2) nicht kontradiktorisch ist. (Reint 7) ist auch schwächer als das Konsistenzpostulat (AGM-R' 5),[5] das Katsuno und Mendelzon (1991) für Belief-Update-Operatoren und Delgrande und Schaub (2003) für ihre (reinterpretationsbasierten) Revisionsoperatoren einfordern; (AGM-R' 5) gemäß ist das Resultat bereits dann konsistent, wenn O_1 und O_2 konsistent sind. Da die Argumente der Revisionsoperatoren von Delgrande und Schaub (2003) nur aussagenlogische Wissensbasen O_1 und O_2 sind, wird die Reinterpretationskompatibilität nicht thematisiert. Aussagenlogische Wissensbasen sind genau dann reinterpretationskompatibel, wenn sie jeweils konsistent sind.

Reinterpretationskompatibilität zweier Ontologien bedeutet im Wesentlichen, dass die Ontologien keine unterschiedlichen Anzahlrestriktionen über die Elemente

[5]Siehe diese Arbeit, S. 55.

ihrer Domäne treffen. Diese Aussage wird in Beobachtung 3.3 formalisiert. Den hierfür benötigten Begriff der Anzahlkompatibilität hält Gleichung (3.1) fest. Zwei Mengen O_1, O_2 sind anzahlkompatibel, wenn es Modelle $\mathcal{I}_1$ von O_1 und $\mathcal{I}_2$ von O_2 gibt, deren Domänen gleichmächtig sind.

$$\begin{aligned} \text{anzkomp}(O_1, O_2) \quad \text{gdw.:} \quad & \text{Es gibt Modelle } \mathcal{I}_1 \models O_1 \text{ und } \mathcal{I}_2 \models O_2, \\ & \text{so dass } |\Delta^{\mathcal{I}_1}| = |\Delta^{\mathcal{I}_2}|. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Beobachtung 3.3. *Seien $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}'_i \rangle$ zwei Ontologien mit $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}'_i = \emptyset$. Dann gilt:*

$$\text{rekomp}(O_1, O_2) \quad \textit{gdw.} \quad \text{anzkomp}(O_1, O_2).$$

Beweis. Siehe S. 248.

Bemerkung 3. Die Beobachtung 3.3 gilt unabhängig davon, ob die Logik, in der die Mengen O_1 und O_2 formuliert sind, die Interpolationseigenschaft erfüllt. Die mit Beobachtung 3.3 berührte Fragestellung hängt jedoch eng zusammen mit der, die im Zusammenhang mit der Interpolation und dem Konsistenzlemma von Robinson („Joint consistency lemma“ oder einfach „Robinson’s consistency lemma“) erörtert wird. Seien zwei Mengen von Ontologieaxiomen O_1 und O_2 über einer Logik gegeben, die die Interpolationseigenschaft hat. Dann gilt: Wenn $O_1 \cup O_2 \models \bot$, dann gibt es einen Satz γ, so dass $\mathcal{V}(\gamma) \subseteq \mathcal{V}(O_1) \cap \mathcal{V}(O_2)$ und $O_1 \models \gamma$ und $O_2 \models \neg\gamma$. (Beweis: Aus $O_1 \cup O_2 \models \bot$ folgt $O_1 \models \neg \bigwedge O_2$. Damit gibt es ein γ mit $O_1 \models \gamma$ und $\gamma \models \neg \bigwedge O_2$ und $\mathcal{V}(\gamma) \subseteq \mathcal{V}(O_1) \cap \mathcal{V}(O_2)$. $\gamma \models \neg \bigwedge O_2$ gilt jedoch genau dann, wenn $O_2 \models \neg\gamma$ gilt.) Insbesondere folgt für Ontologien O_1 und O_2 über Logiken mit Interpolationseigenschaft, dass, wenn O_1 und O_2 keine gemeinsamen nichtlogischen Symbole enthalten, es dann einen Interpolanten γ geben muss, der nur aus logischen Symbolen besteht. Das, worin sich solche O_1 und O_2 prinzipiell widersprechen können, wird durch die Menge der Sätze beschrieben, die über den rein logischen Symbolen gebildet sind. Für die Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität ist dies die Menge aller Sätze, die mithilfe von Junktoren, Quantoren und der Identität (dem einzigen logischen Prädikatsymbol) gebildet werden können, kurz die reine Theorie der Identität („Pure Theory of Equality“). Mithilfe der Quantorenelimination (Poizat, 2000, S. 60) lässt sich zeigen, dass sich in dieser Theorie nur Anzahlrestriktionen formulieren lassen.

Wie das folgende Beispiel zeigt, gibt es tatsächlich ausdrucksmächtige, aber weiterhin entscheidbare Beschreibungslogiken, in denen Restriktionen über die Anzahl der Elemente in der Domäne formuliert werden können. Daher ist der Fall, dass zwei Ontologien nicht reinterpretationskompatibel sind, durch die Postulate (wie oben geschehen) abzudecken.

Beispiel 3.4. In der Beschreibungslogik $\mathcal{ALCNIO}$, die $\mathcal{ALC}$ um Anzahlrestriktionen, Inversenbildung für Rollen und Nominalia erweitert[6] und für die Konzepterfüllbarkeit NExpTime-vollständig ist, lässt sich folgende Menge von Ontologieaxiomen O_1 formulieren:[7]

$$O_1 = \{(\leq R\ k_1)(a), \top \sqsubseteq \exists R^-.\{a\}\}$$

O_1 besagt, dass es höchstens k_1 Gegenstände in der Domäne gibt, zu denen a in R-Relation steht und dass alle Gegenstände der Domäne von a über die R-Relation erreichbar sind. Insbesondere folgt aus O_1, dass es höchstens k_1 Gegenstände gibt. Die Menge von Ontologieaxiomen

$$O_2 = \{(\geq S\ k_2)(b)\}$$

besagt, dass es mindestens k_2 Gegenstände gibt, die zu b in S-Relation stehen. Insbesondere folgt aus O_2, dass es mindestens k_2 Gegenstände gibt. Werden k_1, k_2 derart gewählt, dass $k_2 > k_1$, ergibt sich ein Widerspruch zwischen O_1 und O_2, der sich nicht durch Reinterpretation der Symbole R, S, a, b auflösen lässt. (Man beachte, dass k_1, k_2 Metavariable sind und daher nicht als reinterpretierbare Symbole der Objektsprache fungieren können.)

Um die Unterscheidung zwischen den mit # markierten und unmarkierten Varianten der Integrationspostulate zu motivieren, wurde bereits vorweggenommen, dass die Reinterpretationsoperatoren, die im folgenden Abschnitt definiert werden, sogar die stärkeren, unmarkierten Varianten erfüllen. Diese Varianten sind von der Belief-Base-Revision motiviert und berechnungstechnisch einfacher zu testen: Z.B. ist der Test, ob $O_2 \subseteq O_1 \circ O_2$ (Test auf (Reint 4b)) einfacher als ein Test auf $O_2 \subseteq \mathrm{Cn}(O_1 \circ O_2)$ (Test auf (Reint$^{\#}$ 4b)). Obwohl auch die im folgenden Abschnitt definierten Reinterpretationsoperatoren für endliche Wissensbasen (genauer Ontologien) formuliert sind, unterscheiden sie sich von Belief-Base-Operatoren, die das Inklusionspostulat (MR 3) (S. 33) erfüllen, durch die Tatsache, dass sie syntaxunabhängig sind: Bis auf die Operatoren $\oplus_i^{\mathrm{expl}}$ für $i \in \{1, 2\}$ erfüllen alle Reinterpretationsoperatoren die Extensionalitätspostulate (Reint 1a) und (Reint 1b) (Beobachtung 3.13 und 3.28). Damit vereinigen Reinterpretationsoperatoren zwei positive Eigenschaften aus der Belief-Base-Revision und der Belief-Revision von Belief-Sets: Sie operieren auf endlichen Mengen, sind aber dennoch syntaxunabhängig. Mit diesen Eigenschaften sind die Reinterpretationsoperatoren eher mit Knowledge-Base-Operatoren gemäß Dalal (1988) oder Delgrande und Schaub (2003) als mit Belief-Base-Operatoren vergleichbar.[8]

[6]Vgl. Tabelle A.1, S. 227 in Anhang A.

[7]Das Beispiel ist eine leichte Modifikation eines Beispiels von Tobies (Tobies, 2000, S. 211).

[8]Siehe auch die Besprechung in den Abschnitten 2.1 und 2.4.

3.2 Reinterpretation für triggernde Literale

Die Postulate des vorangehenden Abschnitts spezifizieren Klassen von 2-stelligen Operatoren, mit denen eine adäquate Integration von zwei Ontologien mit verwandten Terminologien ermöglicht werden soll. In diesem und dem folgenden Abschnitt werden konkrete Klassen von Operatoren definiert, die die Auflösung von Ambiguitätskonflikten durch Reinterpretation von nichtlogischen Symbolen bewerkstelligen. Über die Postulate hinausgehend liefern die Operatoren außerdem Hypothesen zu semantischen Beziehungen der disambiguierten Konzepte (Rollen und Individuen) in Form von Brückenaxiomen.

Für die Darstellung der auf (uniformer) Reinterpretation beruhenden Operatoren wird zunächst vorausgesetzt, dass die triggernde Ontologie aus einem konzeptbasierten Literal besteht, d.h. die Form $K(a)$ bzw. $\neg K(a)$ hat; dabei ist K ein Konzeptsymbol und a eine Konstante. Diese Einschränkung ermöglicht die Definition von Reinterpretationsoperatoren mit einer übersichtlichen Struktur, anhand der die Grundidee der Reinterpretation verdeutlicht werden kann. In dem folgenden Abschnitt wird diese Einschränkung aufgehoben.

3.2.1 Motivation und Definition

Wie auch in der Formulierung der Postulate steht im Folgenden $\circ$ für einen zweistelligen Operator, der als linkes Argument eine Menge von Ontologieaxiomen (eine endliche Menge von Sätzen in einer hinreichend ausdrucksmächtigen Logik) enthält. Da in diesem Abschnitt die triggernde Ontologie nur aus einem konzeptbasierten Literal bestehen soll, wird die Mengenschreibweise unterdrückt und als zweites Argument gleich ein Literal der Form $\hat{K}(a)$ vorausgesetzt, wobei $\hat{K}$ für ein Konzeptliteral, d.h. K oder $\neg K$, steht. Allen Reinterpretationsoperatoren liegt das gleiche Prinzip der uniformen Reinterpretation von Symbolen zu Grunde, die für einen Ambiguitätskonflikt verantwortlich gemacht werden können. Sind die Empfängerontologie $\mathcal{O}$ und der Trigger α kompatibel, dann wird im Sinne des Postulats (Reint 2) (S. 68) nur eine Vereinigung von Empfängerontologie und Trigger verwirklicht. Im anderen Falle wird die Inkonsistenz zwischen Empfängerontologie und Trigger auf die Ambiguität eines gemeinsam verwendeten Symbols in der Empfängerontologie und der Senderontologie zurückgeführt. In dem hier vorausgesetzten Fall eines triggernden Literals $\hat{K}(a)$ kann nur die Mehrdeutigkeit des Konzeptsymbols K oder der Konstanten a für einen Konflikt verantwortlich sein. Da im Folgenden nur die Reinterpretation von Konzeptsymbolen betrachtet wird,[9]

[9]Diese Beschränkung wird für Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien aufgehoben. Der Grund für die Einschränkung ist, dass sich für disambiguierte Konstanten nicht wie im Falle von Konzepten geeignete nichttriviale Hypothesen über die semantische Beziehung formulieren lassen.

muss also die unterschiedliche Verwendung des Konzeptsymbols K für den Konflikt verantwortlich sein. Für die Disambiguierung des Konzeptsymbols wird ein neues Symbol K' aus dem internen Vokabular $\mathcal{V}_i$ der Empfängerontologie verwendet. Reinterpretationsoperatoren des Typs 1 ($\circ_1$) verwenden das interne Symbol, um das ursprüngliche K-Konzept des Senders zu repräsentieren. Das Symbol K wird weiterhin zur Denotation des Empfänger-K-Konzepts benutzt. In diesem Fall soll auch die Redeweise verwendet werden, dass Typ-1-Operatoren das Konzept-Symbol des Senders *reinterpretieren*. Die Typ-1-Operatoren halten damit an der eigenen Terminologie fest. Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 ($\circ_2$) verwenden das interne Symbol, um das K-Konzept des Empfängers zu internalisieren, d.h. durch K' zu repräsentieren, während das K-Konzept des Senders übernommen wird. Hier wird analog die Redeweise verwendet, dass Typ-2-Operatoren das eigene Konzeptsymbol *reinterpretieren*. Mit Typ-2-Operatoren erfolgt eine Adaption an die Terminologie des Senders.

Da der Sender des Triggers keine Angaben darüber macht, in welcher Beziehung seine Konzepte zu den Konzepten des Empfängers stehen, müssen Annahmen über die semantische Beziehung der disambiguierten Konzepte K und K' getroffen werden. Die schwachen Operatoren (Definition 3.6) realisieren die Annahmen durch Subsumptionsbeziehungen $K \sqsubseteq K'$ (Alle Ks sind K's) bzw. $K' \sqsubseteq K$, die in Anlehnung an die Redeweise von Dou et al. (2003) als Brückenaxiome bezeichnet werden. Die selektionsbasierten Reinterpretationsoperatoren und die starken Operatoren (Definition 3.7) fügen weitere Brückenaxiome hinzu, die stärkere Beziehungen zwischen den disambiguierten Konzepten postulieren.

Das allen Reinterpretationsoperatoren zu Grunde liegende Konstruktionsprinzip lässt sich schematisch durch einen zweischrittigen Prozess zusammenfassen, einer Disambiguierung von Symbolen, die für den Konflikt verantwortlich gemacht werden, gefolgt von der Bildung von Hypothesen zu den verschiedenen Bedeutungen der disambiguierten Denotate der im Konflikt involvierten Symbole.

$$\boxed{\text{Disambiguierung}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Hypothesen zu semantischen Beziehungen}}$$

Abbildung 3.1: Generelle Struktur der Reinterpretation

In jeder der folgenden Definitionen wird ein Disambiguierungsschema $\Phi(\cdot,\cdot)$ (Definition 3.5) vorausgesetzt, das die eindeutige Auswahl der zur Disambiguierung benutzten internen Symbole ermöglicht. Dieses basiert auf einer Menge von Substitutionen zur Ambiguitätsauflösung, $\mathrm{AR}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$.

Sind Mengen von nichtlogischen Symbolen S, S' gegeben, so ist $\sigma = \Phi(S, S')$ eine Substitution, die Φ zur Disambiguierung auswählt. Dabei ist $S = \mathrm{supp}(\sigma)$ der Träger („support") von σ, d.h. die Menge der Symbole, die durch σ nicht auf sich selbst abgebildet werden, und S' eine Menge von internen Symbolen, die σ nicht zur Disambiguierung benutzen darf, $\sigma[\mathcal{V}] \cap S' = \emptyset$.

Definition 3.5. Gegeben seien Vokabulare $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ mit $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \emptyset$. Die Klasse der *Funktionen zur eindeutigen Ambiguitätsauflösung* $\mathrm{Ear}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ear}(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \quad = \quad & \{\Phi \in \mathrm{Pot}(\mathcal{V}) \times \mathrm{Pot}(\mathcal{V}') \longrightarrow \mathrm{AR}(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \mid \Phi \text{ ist eine Funktion,} \\ & \text{so dass für alle } \langle S, S' \rangle \subseteq \mathrm{Pot}(\mathcal{V}) \times \mathrm{Pot}(\mathcal{V}') \text{ gilt:} \\ & \text{Ist } \sigma = \Phi(S, S'), \text{ dann } \mathrm{supp}(\sigma) = S \text{ und } \sigma[\mathcal{V}] \cap S' = \emptyset\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

$\Phi \in \mathrm{Ear}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ wird auch *Disambiguierungsschema* genannt.

Für triggernde konzeptbasierte Literale ist die Festlegung von Φ nur für solche Symbolmengen $S = \{K\}$ relevant, die aus genau einem Konzeptsymbol K bestehen. Für S' wird die Menge der internen Symbole gewählt, die bereits in der Empfängerontologie benutzt werden. Ist O die Menge der Ontologieaxiome der Empfängerontologie $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und hat der Trigger α die Form $\alpha = \hat{K}(a)$, so wird (wie bisher) abkürzend $K' = \sigma(K)$ geschrieben. K' wird im Folgenden auch das durch Φ festgelegte interne Konzeptsymbol genannt. Dabei ist $\sigma = \Phi(\{K\}, \mathcal{V}(O) \cap \mathcal{V}_i)$ eine geeignete Substitution, die die Disambiguierung durch nicht bereits in O verwendete Symbole verwirklicht. Diese Auswahl von Substitutionen σ stellt sicher, dass die Semantik der internen Symbole nicht durch die Integration verändert wird.

Die schwachen Operatoren $\otimes_i$ (Definition 3.6) setzen einfach strukturierte Subsumptionsbeziehungen zwischen den disambiguierten Konzepten K und K' an. Die ersten beiden Fälle beschreiben die Definition der Typ-1-Operatoren für den Fall eines positiven bzw. negativen triggernden Literals $K(a)$ bzw. $\neg K(a)$. Falls $K(a)$ nicht mit O konsistent ist, wird dies darauf zurückgeführt, dass das K-Konzept des Senders weiter ist als das K-Konzept des Empfängers. Da Typ-1-Operatoren das K-Konzept des Senders internalisieren, führt dies zur Aufnahme der Hypothese $K \sqsubseteq K'$ in das Integrationsergebnis $O \otimes_1 K(a)$. Ist der Trigger ein negatives Literal $\neg K(a)$ und sind wieder O und $\neg K(a)$ inkompatibel, wird dies darauf zurückgeführt, dass das K-Konzept des Senders enger ist als das K-Konzept des Empfängers, so dass das Brückenaxiom $K' \sqsubseteq K$ in das Integrationsergebnis $O \otimes_1 \neg K(a)$ aufgenommen wird. Für Typ-2-Operatoren gelten ähnliche Aussagen, wobei die Rollen von K und K' vertauscht sind. Typ-2-Operatoren internalisieren das K-Konzept des Empfängers, was unter anderem zu einer uniformen Ersetzung aller Vorkommnisse von K in der Empfängerontologie führt und in der Substitutionsvariante $O_{[K/K']}$ resultiert. Die Integrationsergebnisse von Typ-1- und

Typ-2-Operatoren sind im Falle von Inkonsistenz tatsächlich strukturell ähnlich; die Anwendung der Substitution $[K/K', K'/K]$ (Vertauschen der Rollen von K und K') überführt das eine Integrationsresultat in das andere Integrationsresultat: Falls $O \cup \{\alpha\}$ inkonsistent ist, gilt $O \otimes_2 \alpha = (O \otimes_1 \alpha)_{[K/K', K'/K]}$.

Definition 3.6. Gegeben seien eine Ontologie $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$, ein Disambiguierungsschema $\Phi \in \mathrm{Ear}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$, ein Konzeptsymbol $K \in \mathcal{V}_c$ und eine Konstante $a \in \mathcal{V}_c$ sowie das durch Φ festgelegte interne Konzeptsymbol $K' \in \mathcal{V}_i$. Die *schwachen Reinterpretationsoperatoren des Typs 1 und 2* ($\otimes_1 = \otimes_1^\Phi$ und $\otimes_2 = \otimes_2^\Phi$) werden für konzeptbasierte Literale definiert durch

$$
\begin{aligned}
O \otimes_1 K(a) &= \begin{cases} O \cup \{K(a)\} & \text{falls } O \cup \{K(a)\} \text{ konsistent ist,} \\ O \cup \{K'(a), K \sqsubseteq K'\} & \text{sonst} \end{cases} \\
O \otimes_1 \neg K(a) &= \begin{cases} O \cup \{\neg K(a)\} & \text{falls } O \cup \{\neg K(a)\} \text{ konsistent ist,} \\ O \cup \{\neg K'(a), K' \sqsubseteq K\} & \text{sonst} \end{cases} \\
O \otimes_2 K(a) &= \begin{cases} O \cup \{K(a)\} & \text{falls } O \cup \{K(a)\} \text{ konsistent ist,} \\ O_{[K/K']} \cup \{K(a), K' \sqsubseteq K\} & \text{sonst} \end{cases} \\
O \otimes_2 \neg K(a) &= \begin{cases} O \cup \{\neg K(a)\} & \text{falls } O \cup \{\neg K(a)\} \text{ konsistent ist,} \\ O_{[K/K']} \cup \{\neg K(a), K \sqsubseteq K'\} & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die schwachen Operatoren $\otimes_i$ bilden das untere Extrem der in diesem Abschnitt definierten Reinterpretationsoperatoren. Die in $\otimes_i$ benutzten Brückenaxiome erfassen jeweils nur eine Unter- oder eine Oberabschätzung des neuen Symbols K'. Die erstmals von Özçep (2006) definierten starken Operatoren $\odot_i$, die das obere Extrem der Reinterpretationsoperatoren für triggernde konzeptbasierte Literale bilden, erweitern die semantischen Hypothesen der schwachen Operatoren um eine Abschätzung in der jeweils anderen Richtung. Das hierfür zusätzlich verwendete Brückenaxiom benutzt den Begriff eines spezifischsten Konzepts $\mathrm{msc}_O(a)$ einer Konstante a bzgl. einer Menge von Ontologieaxiomen O (vgl. Anhang A, Definition A.17, S. 236). Ist z.B. $K(a)$ mit O inkompatibel, so gilt für $\odot_1$ wie auch für die schwachen Typ-1-Operatoren $\otimes_1$, dass das Senderkonzept K' weiter ist als das Empfängerkonzept K, dass also K' durch K nach unten abgeschätzt wird. Zusätzlich wird das Senderkonzept K' nach oben abgeschätzt. Die Inkompatibilität zwischen den beiden Konzepten K und K' wird als ein Ausnahmefall bzgl. O verstanden, der durch das Individuum a exemplifiziert wird. Das spezifischste Konzept msc_O charakterisiert das Individuum a auf konzeptueller Ebene. Die Ausnahmesituation kann daher wie folgt beschrieben werden: Ein Individuum d, das unter das K'-Konzept fällt, fällt auch unter das K-Konzept oder d ist konzeptuell ähnlich zum Individuum a in dem Sinne, das es (bzgl. O) dessen spezifischstes Konzept erfüllt. In beschreibungslogischer Notation lautet dies: $K' \sqsubseteq K \sqcup \mathrm{msc}_O(a)$

oder äquivalent $K' \sqcap \neg\, \mathrm{msc}_O(a) \sqsubseteq K$. In der dritten äquivalenten Formulierung $K' \sqcap \neg K \sqsubseteq \mathrm{msc}_O(a)$ besagt das Brückenaxiom, dass sich K und K' nur bzgl. solcher Individuen unterscheiden, die konzeptuell nicht von a unterschieden werden können (da sie dessen spezifischstes Konzept erfüllen).

Definition 3.7. Gegeben seien eine Ontologie $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$, ein Disambiguierungsschema $\Phi \in \mathrm{Ear}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$, ein Konzeptsymbol $K \in \mathcal{V}_c$ und eine Konstante $a \in \mathcal{V}_c$ sowie das durch Φ festgelegte interne Konzeptsymbol $K' \in \mathcal{V}_i$. Es wird vorausgesetzt, dass $\mathrm{msc}_O(a)$ existiert. Die *starken Reinterpretationsoperatoren des Typs 1 und 2* ($\odot_1 = \odot_1^\Phi$ und $\odot_2 = \odot_2^\Phi$) werden für konzeptbasierte Literale definiert durch

$$
\begin{aligned}
O \odot_1 K(a) &= \begin{cases} O \cup \{K(a)\} & \text{falls } O \cup \{K(a)\} \text{ konsistent ist,} \\ O \cup \{K'(a), K \sqsubseteq K', K' \sqsubseteq K \sqcup \mathrm{msc}_O(a)\} & \text{sonst} \end{cases} \\
O \odot_1 \neg K(a) &= \begin{cases} O \cup \{\neg K(a)\} & \text{falls } O \cup \{\neg K(a)\} \text{ konsistent ist,} \\ O \cup \{\neg K'(a), K' \sqsubseteq K, K \sqsubseteq K' \sqcup \mathrm{msc}_O(a)\} & \text{sonst} \end{cases} \\
O \odot_2 K(a) &= \begin{cases} O \cup \{K(a)\} & \text{falls } O \cup \{K(a)\} \text{ konsistent ist,} \\ O_{[K/K']} \cup \{K(a), K' \sqsubseteq K, K \sqsubseteq K' \sqcup \mathrm{msc}_{O_{[K/K']}}(a)\} & \text{sonst} \end{cases} \\
O \odot_2 \neg K(a) &= \begin{cases} O \cup \{\neg K(a)\} & \text{falls } O \cup \{\neg K(a)\} \text{ konsistent ist,} \\ O_{[K/K']} \cup \{\neg K(a), K \sqsubseteq K', K' \sqsubseteq K \sqcup \mathrm{msc}_{O_{[K/K']}}(a)\} & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

In der obigen Motivation für die Definition der starken Operatoren wurde die Inkompatibilität als *Ausnahmefall* verstanden und ein dazu entsprechendes Brückenaxiom, das auf das spezifischste Konzept zurückgreift, realisiert. Diese Redeweise soll die Parallelität mit dem Ansatz von Qi und Kollegen (Qi et al., 2006) verdeutlichen (s. diese Arbeit, Abschnitt 2.3.4). Ist in der Logik, in der die Ontologien repräsentiert werden, die Bildung von Nominalia gestattet, lässt sich das spezifischste Konzept einer Konstanten a durch das Nominal $\{a\}$ repräsentieren. In $O \odot_1 K(a)$ etwa kommt das Brückenaxiom $K \sqsubseteq K' \sqcup \mathrm{msc}_O(a)$ vor, das sich mittels Nominalschreibweise äquivalent zu $K \sqsubseteq K' \sqcup \{a\}$ und weiter zu $K \sqcap \neg\{a\} \sqsubseteq K'$ umformen lässt. Dieses Axiom hat die mittels der Ausnahmeliste $\{a\}$ spezifizierte Form eines abgeschwächten TBox-Axioms im Sinne von Qi und Kollegen. Das Brückenaxiome $K \sqsubseteq K' \sqcup \{a\}$ (wie auch das Brückenaxiom $K' \sqsubseteq K$) ist eine logische Abschwächung der Äquivalenzbeziehung $K \equiv K'$. Reinterpretation kann daher auch als eine Verfeinerung (sogar Revision) von anfänglich getroffenen Hypothesen verstanden werden, in der inkompatible Hypothesen durch eine Teilmenge von schwächeren Hypothesen ersetzt werden. In Abschnitt 4.2 wird dieser Sachverhalt genauer analysiert.

Dieser Gemeinsamkeit stehen allerdings folgende Unterschiede zwischen dem Reinterpretationsansatz und dem Ansatz von Qi und Kollegen (Qi et al., 2006) gegenüber:

- Der Reinterpretationsansatz beinhaltet die Abschwächung von atomaren Konzepten und (nur) implizit eine kompositionale Abschwächung von komplexen Konzepten; der Ansatz von Qi und Kollegen hingegen beinhaltet eine Abschwächung von ganzen TBox-Axiomen und A-Box-Axiomen und implizit eine nichtkompositionale Abschwächung von komplexen Konzepten.

- Der Reinterpretationsansatz ist uniform in dem Sinne, dass alle Vorkommnisse eines Symbols reinterpretiert werden, wohingegen Qi und Kollegen auch eine partielle Auflösung von Konflikten gestatten. Dies führt dazu, dass Reinterpretationsoperatoren die Konservierung und Rekonstruierbarkeit beider Ontologien gestatten, die Operatoren von Qi und Kollegen hingegen nicht (vgl. die folgenden Beobachtungen 3.13 und 3.31).

- Der Reinterpretationsansatz ist lokal in dem Sinne, dass nur die Reinterpretation solcher Symbole gestattet wird, die im Trigger vorkommen; Qi und Kollegen hingegen erlauben auch die Änderung von Sätzen (und den dort enthalten Konzepten), in denen Symbole vorkommen, die nicht im Trigger enthalten sind.

- Der hier entwickelte Reinterpretationsansatz ist unabhängig von der syntaktischen Repräsentation der Empfängerontologie, für die Operatoren von Qi und Kollegen gilt das nicht (vgl. die folgenden Beobachtungen 3.13 und 3.31).

Ein einfaches Beispiel aus einem Web-Service-Szenario des Semantic Web soll die Funktionsweise der Reinterpretationsoperatoren sowie die Unterschiede zwischen der starken und schwachen Variante am Beispiel der Typ-2-Operatoren $\otimes_2$ und $\odot_2$ veranschaulichen.

Beispiel 3.8. In einem Onlinebuchhandel, der auf eine Menge von Ontologieaxiomen O_2 zugreift, soll ein Softwareagent, der auf eine von O_2 verschiedene Menge von Ontologieaxiomen O_1 zugreift, ein billiges Buch zur Thermodynamik kaufen. Hierzu sendet der Softwareagent eine Anfrage an den Onlinebuchhandel, ein billiges Buch im Format $\mathit{Billig}(a)$, wobei a ein Platzhalter für den Bezeichner eines Buches ist, zu benennen.

Gemäß O_1 gilt etwas genau dann als billig, wenn es weniger als 5 Euro kostet. Dass ein Buch nicht zugleich einen weichen und harten Einband haben kann, wird durch das TBox-Axiom $\mathit{SoftC} \sqsubseteq \neg \mathit{HardC}$ spezifiziert. Die korrekte Ordnung der Preise (alles was weniger als 5 Euro kostet, kostet auch weniger als 8 Euro) ist ebenfalls in O_1 spezifiziert. Der Kaufagent hat zusätzlich Weltwissen über vier Bücher zur Thermodynamik. Das Buch th_1 hat einen Preis zwischen 5 und 8 Euro, die Bücher th_3 und th_4 kosten mehr als 5 Euro und das Buch th_2 kostet weniger als 5 Euro. th_1 ist ein Hardcoverbuch, th_4 ein Softcoverbuch; für th_2 und th_3 ist die Beschaffenheit des Einbands nicht bekannt.

$$\begin{aligned} O_1 \;=\; & \{\mathit{Billig} \doteq \mathit{KostetWA\_5}, \\ & \mathit{SoftC} \sqsubseteq \neg \mathit{HardC}, \mathit{KostetWA\_5} \sqsubseteq \mathit{KostetWA\_8}, \\ & \neg \mathit{KostetWA\_5}(th_1), \mathit{KostetWA\_8}(th_1), \mathit{HardC}(th_1), \\ & \mathit{KostetWA\_5}(th_2), \neg \mathit{KostetWA\_5}(th_3), \\ & \neg \mathit{KostetWA\_5}(th_4), \mathit{SoftC}(th_4)\} \end{aligned}$$

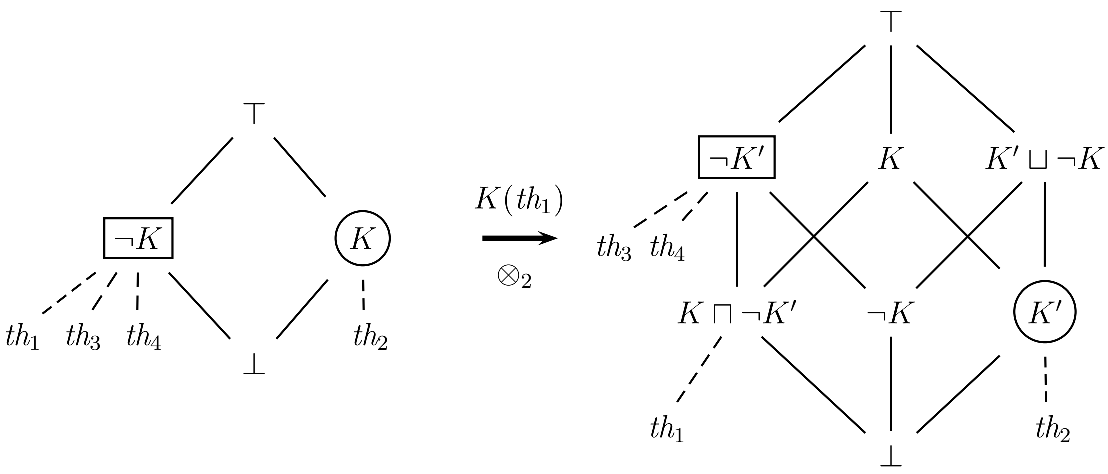
Die Ontologie des Onlinebuchhandels O_2 bemisst den Wert eines Buches nicht allein anhand des monetären Wertes, sondern in Abhängigkeit vom Einbandtyp. Ein Buch gilt in O_2 als billig, wenn es weniger als 5 Euro kostet oder wenn es ein Hardcoverbuch ist, das weniger als 8 Euro kostet. Damit haben O_2 und O_1 unterschiedliche Konzepte davon, wann ein Buch billig ist, so dass ein Fall von interontologischer Ambiguität in der öffentlichen Sprache gegeben ist. In der Menge von Ontologieaxiomen O_2 ist durch ABox-Axiome spezifiziert, dass das Buch th_1 einen harten Einband hat und weniger als 8 Euro kostet, so dass gemäß O_2 th_1 als billig anzusehen ist. Diese Information verschickt der Onlinebuchhandel in Form des Literals $\mathit{Billig}(th_1)$ an den Kaufagenten.

$$\begin{aligned} O_2 \;=\; & \{\mathit{Billig} \doteq \mathit{KostetWA\_5} \sqcup (\mathit{HardC} \sqcap \mathit{KostetWA\_8}), \\ & \mathit{SoftC} \sqsubseteq \neg \mathit{HardC}, \mathit{KostetWA\_5} \sqsubseteq \mathit{KostetWA\_8}, \\ & \mathit{KostetWA\_8}(th_1), \mathit{HardC}(th_1)\} \\ \alpha \;=\; & \mathit{Billig}(th_1) \end{aligned}$$

Die Ambiguität von Billig führt zu der Inkonsistenz von $O_1 \cup \{\alpha\}$. Falls der Kaufagent den Trigger α mittels des schwachen Operators des Typs $2 \otimes_2$ integriert, ergibt sich folgendes Integrationsresultat:

$$\begin{aligned} O_1 \otimes_2 \alpha \;=\; & \{\mathit{Billig}' \doteq \mathit{KostetWA\_5}, \\ & \mathit{SoftC} \sqsubseteq \neg \mathit{HardC}, \mathit{KostetWA\_5} \sqsubseteq \mathit{KostetWA\_8}, \\ & \neg \mathit{KostetWA\_5}(th_1), \mathit{KostetWA\_8}(th_1), \mathit{HardC}(th_1), \\ & \mathit{KostetWA\_5}(th_2), \neg \mathit{KostetWA\_5}(th_3), \\ & \neg \mathit{KostetWA\_5}(th_4), \mathit{SoftC}(th_4), \\ & \mathit{Billig}(th_1), \mathit{Billig}' \sqsubseteq \mathit{Billig}\} \end{aligned}$$

In Abbildung 3.2 wird der Integrationsprozess anhand der induzierten Konzeptverbände für das in der Reinterpretation involvierte Konzeptsymbol $K = Billig$ und $K' = Billig'$ veranschaulicht. Zudem sind mit gestrichelten Linien die in den Ontologien geltenden Instanzbeziehungen angegeben.



$$O_1 \models \neg K(th_1) \wedge \neg K(th_3) \wedge \neg K(th_4) \wedge K(th_2)$$

$$O_1 \otimes_2 K(th_1) \models K(th_1) \wedge K(th_2) \qquad \not\models \neg K(th_3), \neg K(th_4)$$

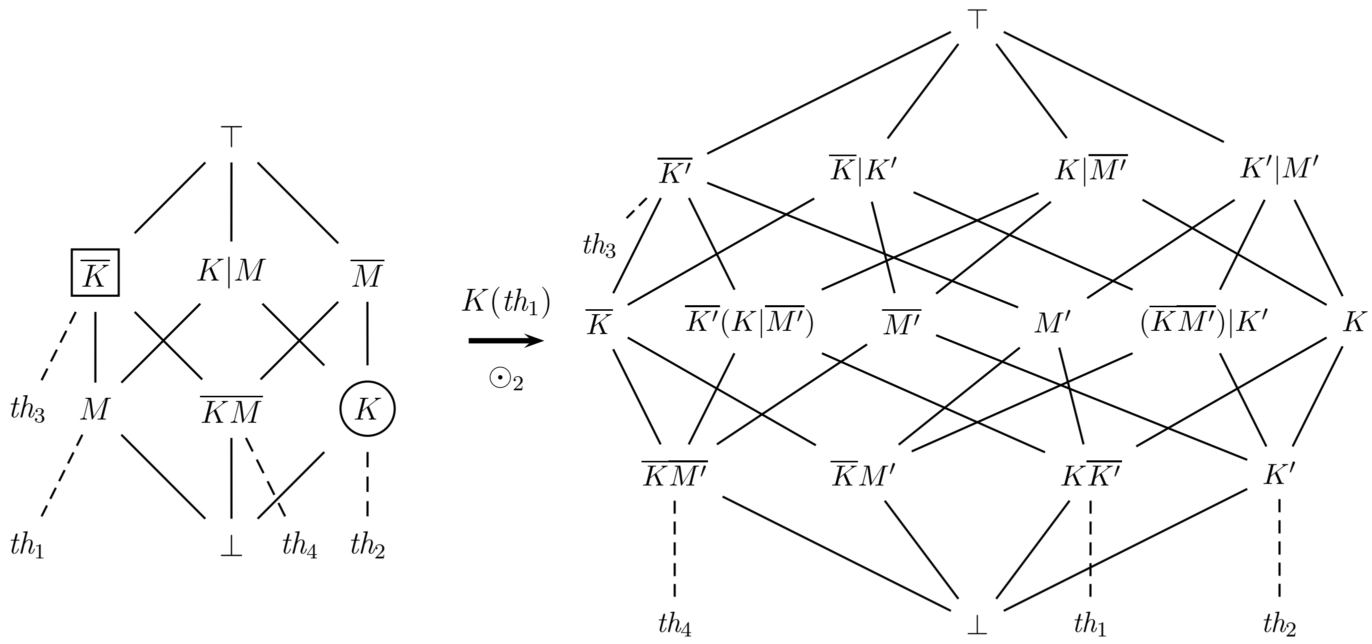
Abbildung 3.2: Konzeptverbände zu den Ontologien O_1 und $O_1 \otimes_2 Billig(th_1) = O_1 \otimes_2 K(th_1)$ von Beispiel 3.8. Das Konzeptsymbol *Billig* wird der Übersichtlichkeit wegen durch K repräsentiert. Die gestrichelten Linien stehen für Instanzbeziehungen von Individuen zu Konzepten.

Der Operator $\otimes_2$ setzt das Brückenaxiom $Billig' \sqsubseteq Billig$ als Hypothese zur semantischen Beziehung zwischen den disambiguierten Konzepten *Billig'* und *Billig* an. Dieses besagt, dass das Billig-Konzept des Senders *Billig* weiter ist als das Billig-Konzept des Empfängers *Billig'*. Die Kennzeichnung „schwach" für die Operatoren $\otimes_i$ lässt sich ebenfalls anhand dieses Beispiels demonstrieren. Einige der in der Empfängerontologie geltenden Sätze sind nicht mehr in der ursprünglichen Form im Integrationsresultat enthalten, obwohl sie nicht für den Konflikt verantwortlich gemacht werden können. Zum Beispiel wird das Literal $Billig(th_2)$, welches aus O_1 folgt, im Integrationsresultat $O_1 \otimes_2 \alpha$ konserviert, $O_1 \otimes_2 \alpha \models Billig(th_2)$; doch anders verhält es sich für die Konsequenzen $\neg Billig(th_3)$ und $\neg Billig(th_4)$ von O_1, die nicht mehr aus $O_1 \otimes_2 \alpha$ gefolgert werden können. Diese Asymmetrie zwischen der Konservierung von konzeptbasierten Literalen mit gleichem Negationspräfix auf der einen und konzeptbasierten Literalen mit verschiedenem Negationspräfix bzgl. des Triggers auf der anderen Seite, wird formal in der Proposition 3.17.2 bzw. 3.17.3 des folgenden Abschnitts beschrieben.

Falls der Kaufagent einen starken Typ-2-Operator zur Integration benutzt, kann das Integrationsergebnis äquivalent wie folgt beschrieben werden.

$$\begin{aligned} O_1 \odot_2 \alpha \quad \equiv \quad & O_1 \otimes_2 \alpha \cup \\ & \{\mathit{Billig} \sqsubseteq \mathit{Billig}' \sqcup (\neg \mathit{KostetWA\_5} \sqcap \mathit{KostetWA\_8} \sqcap \mathit{HardC})\} \end{aligned}$$

In diesem Fall rekonstruiert der Kaufagent das Billigkonzept des Onlinebuchhandels, indem er annimmt, etwas werde nur dann als billig angesehen, wenn es weniger als 5 Euro kostet oder zwischen 5 und 8 Euro kostet und ein Hardcoverbuch ist. Abbildung 3.3 veranschaulicht die Beziehungen zwischen den Konzepten in O_1 bzw. den Konzepten in $O_1 \odot_2 \alpha$ durch die Konzeptverbände, die $K = \mathit{Billig}$ und das spezifischste Konzept M von th_1 bzgl. O_1 erzeugen, bzw. durch den Konzeptverband, den K, K' und $M' = M_{[K/K']}$ bzgl. $O_1 \odot_2 \alpha$ erzeugen. Sowohl aus O_2 als auch aus $O_1 \odot_2 \alpha$ lässt sich $\mathit{Billig} \sqsubseteq \mathit{KostetWA\_5} \sqcup (\mathit{KostetWA\_8} \sqcap \mathit{HardC})$ folgern. Wie im Falle der Integration mit $\otimes_2$ wird das negative Literal $\neg \mathit{Billig}(th_3)$ nicht konserviert, $O_1 \odot_2 \alpha \not\models \neg \mathit{Billig}(th_3)$. Anderseits wird jedoch das negative Literal $\neg \mathit{Billig}(th_4)$ konserviert, $O_1 \odot_2 \alpha \models \neg \mathit{Billig}(th_4)$. Der Unterschied zwischen th_3 und th_4 rührt daher, dass von th_4 bekannt ist, dass es einen weichen Einband hat und damit konzeptuell nicht mit th_1 verwandt ist; und th_1 ist die einzige Ausnahme, die den Unterschied zwischen den verschiedenen Lesarten von *Billig* bezeugen kann. Für th_3 (und auch für th_2) hingegen ist der Einbandtyp nicht bekannt und daher die konzeptuelle Ähnlichkeit mit th_1 nicht auszuschließen (vgl. Proposition 3.17.4).



$$
\begin{aligned}
O_1 \quad &\models \quad \neg K(th_1) \wedge \neg K(th_3) \wedge \\
& \quad \neg K(th_4) \wedge K(th_2)
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
O_1 \odot_2 K(th_1) \quad &\models \quad K(th_1) \wedge K(th_2) \wedge \neg K(th_4) \\
&\not\models \quad \neg K(th_3)
\end{aligned}
$$

Abbildung 3.3: Konzeptverbände zu O_1 und zu $O_1 \odot_2 \mathit{Billig}(th_1) = O_1 \odot_2 K(th_1)$ von Beispiel 3.8. Das Konzeptsymbol *Billig* wird der Übersichtlichkeit wegen durch K repräsentiert. M bezeichnet das spezifischste Konzept von a in O_1, $M = \mathrm{msc}_{O_1}(a) = \neg \mathit{KostetWA\_5} \sqcap \mathit{KostetWA\_8} \sqcap \neg \mathit{Billig} \sqcap \mathit{HardC}$ und $M' = M_{[K/K']}$ die Substitutionsvariante im Integrationsresultat. Statt $K_1 \sqcap K_2$ wird einfach K_1K_2, statt $\neg K$ $\overline{K}$ und statt $K_1 \sqcup K_2$ kürzer $K_1|K_2$ geschrieben. Die gestrichelten Linien stehen für Instanzbeziehungen von Individuen zu Konzepten.

Zwischen den starken und schwachen Operatoren lassen sich weitere Reinterpretationsoperatoren definieren, indem in der Definition der starken Operatoren statt des spezifischsten Konzepts für die Konstante des triggernde Literals eine beliebige Konzeptbeschreibung $C \in \text{Konz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i)$[10] gewählt wird, das die Bedingung $O \models C(a)$ erfüllt. Diese Bedingung garantiert die Konsistenz des Integrationsresultats. Ich nenne C auch das *Differenzkonzept* oder *Ausnahmenkonzept* (zu a), da es konzeptuell den Unterschied zwischen den disambiguierten Konzepten K und K' beschreibt. Die Auswahl des Konzepts C erfolgt ähnlich wie für die Partial-Meet-Operatoren von AGM durch eine Selektionsfunktion sel (s. Anhang A, Definition A.39, S. 246) die auf einer Menge von potentiellen Brückenaxiomen agiert. Anders als in Definition A.39 darf sel nichtleere Mengen von Brückenaxiomen auf die leere Menge abbilden.

Definition 3.9. Gegeben seien eine Ontologie $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$, ein Disambiguierungsschema $\Phi \in \text{Ear}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$, ein Konzeptsymbol $K \in \mathcal{V}_c$ und eine Konstante $a \in \mathcal{V}_c$ sowie das durch Φ festgelegte interne Konzeptsymbol $K' \in \mathcal{V}_i$. Es sei $\alpha = K(a)$ oder $\alpha = \neg K(a)$. Die *Oberabschätzungen von α und K' bzgl. O*, kurz $\text{oa}_i(O, \alpha, K')$, und die *Reinterpretationsoperatoren für triggernde konzeptbasierte Literale vom Typ 1 und Typ 2, die auf der Selektionsfunktion* sel *basieren*, kurz $\oplus_1^{\text{sel}} = \oplus_1^{\text{sel},\Phi}$ und $\oplus_2^{\text{sel}} = \oplus_2^{\text{sel},\Phi}$, werden wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
\text{oa}_1(O, K(a), K') &= \{K' \sqsubseteq K \sqcup C \mid C \in \text{Konz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i), O \models C(a) \text{ und} \\
&\qquad K' \notin \mathcal{V}(C)\} \\
\text{oa}_1(O, \neg K(a), K') &= \{K \sqsubseteq K' \sqcup C \mid C \in \text{Konz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i), O \models C(a) \text{ und} \\
&\qquad K' \notin \mathcal{V}(C)\} \\
\text{oa}_2(O, K(a), K') &= \{K \sqsubseteq K' \sqcup C \mid C \in \text{Konz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i), O_{[K/K']} \models C(a) \text{ und} \\
&\qquad K \notin \mathcal{V}(C)\} \\
\text{oa}_2(O, \neg K(a), K') &= \{K' \sqsubseteq K \sqcup C \mid C \in \text{Konz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i), O_{[K/K']} \models C(a) \text{ und} \\
&\qquad K \notin \mathcal{V}(C)\} \\
O \oplus_i^{\text{sel}} \alpha &= \begin{cases} O \cup \{\alpha\} & \text{falls } O \cup \{\alpha\} \text{ konsistent ist} \\ O \otimes_i \alpha \cup \text{sel}(\text{oa}_i(O, \alpha, K')) & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Wenn die Menge der durch die Selektionsfunktion sel ausgewählten Konzepte C durch ein einzelnes Konzept M repräsentierbar ist, dann lässt sich der Effekt der selektionsbasierten Operatoren durch das Konzeptverband veranschaulichen, das M, K und K' erzeugen. Da der Konzeptverband alle Selektionsfunktionen abdecken soll, werden keine weiteren Voraussetzungen für M getroffen. Es ergibt sich der umfangreiche Konzeptverband in Abbildung 3.4, der aus $2^5 = 32$ Konzepten besteht.

[10]Vgl. Anhang A, Definition A.4, S. 225.

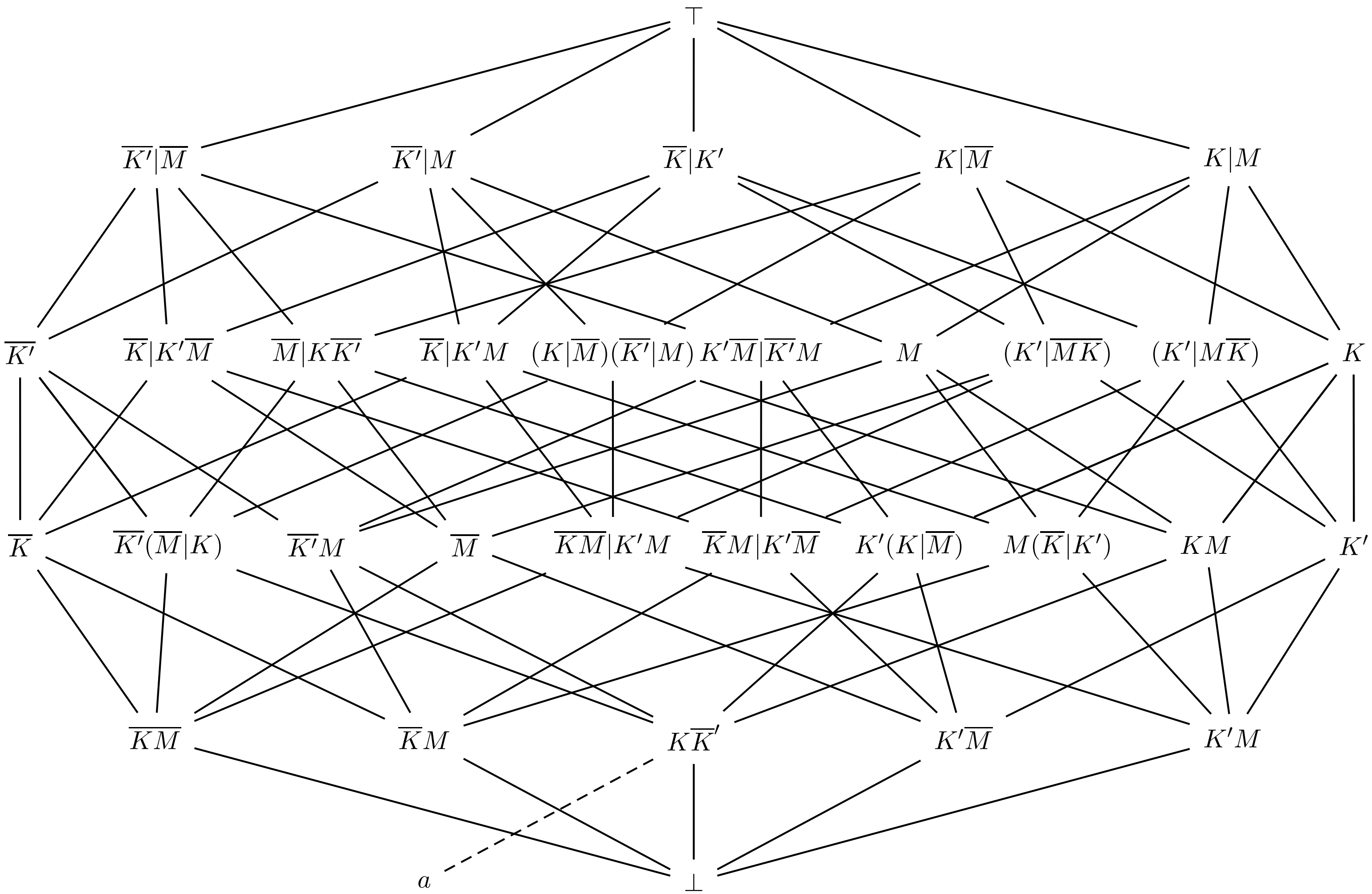


Abbildung 3.4: Konzeptverband für $O \oplus_2^{\text{sel}} K(a)$. Vorausgesetzt wird, dass $O \models \neg K(a)$ und die Menge aller durch sel gewählten Konzepte C mit $O_{[K/K']} \models C(a)$ durch eine Konzeptbeschreibung M repräsentierbar ist. Der Übersichtlichkeit wegen wird statt $K_1 \sqcap K_2$ einfach $K_1 K_2$, statt $\neg K$ $\overline{K}$ und statt $K_1 \sqcup K_2$ kürzer $K_1|K_2$ geschrieben.

Eine spezielle syntaxbasierte Form von Oberabschätzungen und darauf basierende Reinterpretationsoperatoren $\oplus_i^{\mathrm{expl}}$ definieren Eschenbach und Özçep (2009) zum Zweck von Stabilitätsbetrachtungen (s. diese Arbeit, Abschnitt 6.4). Das Differenzkonzept C muss in $\oplus_i^{\mathrm{expl}}$ die stärkere Bedingung erfüllen, dass in O explizit das ABox-Axiom $C(a)$ steht.

Definition 3.10. Gegeben seien eine Ontologie $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$, ein Disambiguierungsschema $\Phi \in \mathrm{Ear}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$, ein Konzeptsymbol $K \in \mathcal{V}_c$ und eine Konstante $a \in \mathcal{V}_c$ sowie das durch Φ festgelegte interne Konzeptsymbol $K' \in \mathcal{V}_i$. Es sei $\alpha = K(a)$ oder $\alpha = \neg K(a)$. Die *auf expliziten Konzeptassertionen basierenden Oberabschätzungen von α und K' bzgl. O*, kurz $\mathrm{oa}_{i,\mathrm{expl}}(O, K(a), K')$, und die *Reinterpretationsoperatoren für triggernde konzeptbasierte Literale vom Typ 1 und Typ 2, die auf der Selektionsfunktion* sel *für explizite Konzeptassertionen basieren*, kurz $\oplus_1^{\mathrm{expl}} = \oplus_1^{\mathrm{expl},\Phi}$ und $\oplus_2^{\mathrm{expl}} = \oplus_2^{\mathrm{expl},\Phi}$, werden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\mathrm{oa}_{1,\mathrm{expl}}(O, K(a), K') &= \{K' \sqsubseteq K \sqcup C \mid C \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i), C(a) \in O\} \\
\mathrm{oa}_{1,\mathrm{expl}}(O, \neg K(a), K') &= \{K \sqsubseteq K' \sqcup C \mid C \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i), C(a) \in O\} \\
\mathrm{oa}_{2,\mathrm{expl}}(O, K(a), K') &= \{K \sqsubseteq K' \sqcup C \mid C \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i), C(a) \in O_{[K/K']}\} \\
\mathrm{oa}_{2,\mathrm{expl}}(O, \neg K(a), K') &= \{K' \sqsubseteq K \sqcup C \mid C \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i), C(a) \in O_{[K/K']}\} \\
O \oplus_i^{\mathrm{expl}} \alpha &= \begin{cases} O \cup \{\alpha\} & \text{falls } O \cup \{\alpha\} \text{ konsistent ist,} \\ O \otimes_i \alpha \cup \mathrm{oa}_{i,\mathrm{expl}}(O, \alpha, K') & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dass die Definition von $\oplus_i^{\mathrm{expl}}$ syntaxabhängig ist, führt dazu, dass $\oplus_i^{\mathrm{expl}}$ nicht die Linksextensionalität erfüllt.

Beispiel 3.11. Es seien

$$\begin{aligned}
O &= \{\exists R.\top \sqsubseteq L, R(a,b), \neg K(a)\} \\
O' &= \{\exists R.\top \sqsubseteq L, R(a,b), \neg K(a), L(a)\} \\
\alpha &= K(a)
\end{aligned}$$

Die Ergebnisse bzgl. Integration mit dem expliziten Operator vom Typ 1 $\oplus_1^{\mathrm{expl}}$ sind wie folgt:

$$\begin{aligned}
O \oplus_1^{\mathrm{expl}} \alpha &= O \cup \{K'(a), K \sqsubseteq K', K' \sqsubseteq K \sqcup \neg K\} \\
O' \oplus_1^{\mathrm{expl}} \alpha &= O' \cup \{K'(a), K \sqsubseteq K', K' \sqsubseteq K \sqcup \neg K, K' \sqsubseteq K \sqcup L\}
\end{aligned}$$

Folglich ist zwar $O \equiv O'$ und auch $\mathcal{V}(O) \cap \mathcal{V}_i = \mathcal{V}(O') \cap \mathcal{V}_i$, aber nicht wie von (Reint 1a) (S. 67) gefordert $O \oplus_1^{\mathrm{expl}} \alpha \equiv O' \oplus_1^{\mathrm{expl}} \alpha$.

Die schwachen und starken Reinterpretationsoperatoren sind semantisch betrachtet Grenzfälle der selektionsbasierten Reinterpretationsoperatoren. Wird sel so definiert, dass es die leere Menge oder eine Menge von tautologischen Brückenaxiomen wählt, dann ist $\oplus_i^{\text{sel}}$ ein zu $\otimes_i$ semantisch gleichwertiger Operator. Wird für sel die Identitätsfunktion eingesetzt (oder enthält es Brückenaxiome, die durch msc_O induziert werden), so ist $\oplus_i^{\text{sel}}$ semantisch gleichwertig mit den starken Operatoren $\odot_i$.

Die Ordnung der bisher definierten Reinterpretationsoperatoren bzgl. ihrer logischen Stärke hält Beobachtung 3.12 fest.

Beobachtung 3.12. *Gegeben sei eine Ontologie $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und α ein Trigger mit $\mathcal{V}(\alpha) \subseteq \mathcal{V}_c$. Für $\circ_i \in \{\otimes_i, \odot_i, \oplus_i^{\text{sel}}, \oplus_i^{\text{expl}}\}$ und $i \in \{1, 2\}$ gilt:*

1. $O \odot_i \alpha \models O \circ_i \alpha$
2. $O \circ_i \alpha \models O \otimes_i \alpha$

3.2.2 Eigenschaften der Operatoren für triggernde Literale

Erfüllung der Integrationspostulate

Aus den Definitionen der Reinterpretationsoperatoren folgen (unmittelbar) Aussagen über die Erfüllung der Integrationspostulate.

Beobachtung 3.13. *Es sei $\circ_i$ ein Reinterpretationsoperator vom Typ $i \in \{1, 2\}$, d.h. $\circ_i \in \{\odot_i, \otimes_i, \oplus_i^{\text{sel}}, \oplus_i^{\text{expl}}\}$. Dann gilt:*

1. *$\circ_1$ erfüllt (Reint 1b), (Reint 2), (Reint 3), (Reint 5a), (Reint 5b), (Reint 6a), (Reint 6b), (Reint 7) und (Reint 4a) (und damit auch alle korrespondierenden #-markierten Varianten der Postulate).*
2. *$\circ_2$ erfüllt (Reint 1b), (Reint 2), (Reint 3), (Reint 5a), (Reint 5b), (Reint 6a), (Reint 6b), (Reint 7) und (Reint 4b) (und damit auch alle korrespondierenden #-markierten Varianten der Postulate).*
3. *$\otimes_i, \odot_i, \oplus_i^{\text{sel}}$ erfüllen zusätzlich (Reint 1a).*

Beweis. Siehe S. 249.

Neben der Erfüllung der in Abschnitt 3.1 diskutierten Integrationspostulate lassen sich einfache Verallgemeinerungen für iterierte Anwendungen der Reinterpretationsoperatoren beweisen (Beobachtung 3.14). Ich führe Aussagen zur iterierten Integration, die die einschrittige Integration in offensichtlicher Weise verallgemeinern, bereits in diesem Abschnitt auf. Eine vertiefte Betrachtung der iterierten oder (auch) sequenziellen Integration erfolgt in Kapitel 6.

Für die iterierte Anwendung eines Operators wird eine endliche Folge von konzeptbasierten Literalen $A = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$, auch Triggerfolge- oder Triggersequenz genannt, vorausgesetzt. Die Integration von A in O bzgl. eines Operators $\circ$ wird mit $O \circ A$ bezeichnet und wir induktiv über die Länge von A definiert: Ist $|A| = 0$, so wird $O \circ A = O$ gesetzt und ist $|A| = |\langle A', \alpha_{n+1} \rangle|$, so wird $O \circ A = (O \circ A') \circ \alpha_{n+1}$ gesetzt. Die Menge aller Elemente in der Folge A wird mit $\tilde{A}$ bezeichnet.

Beobachtung 3.14. *Es sei $\circ$ ein Reinterpretationsoperator vom Typ 1 oder 2, d.h. $\circ \in \{\odot_i, \otimes_i, \oplus_i^{\text{sel}}, \oplus_i^{\text{expl}} \mid i \in \{1, 2\}\}$. Sei $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine Ontologie und A eine endliche Folge von konzeptbasierten Literalen mit $\mathcal{V}(\tilde{A}) \subseteq \mathcal{V}_c$. Dann gilt, dass $\circ$ folgende iterierte Varianten von (Reint 2), (Reint 3), (Reint 4a), (Reint 7) erfüllt:*

1. *$O \circ A = O \cup \tilde{A}$ gdw. $O \cup \tilde{A}$ konsistent ist.*
2. *$O \circ A \cap \text{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O)) \subseteq O \cup \tilde{A}$*
3. *$O \subseteq O \circ_1 A$*
4. *$O \circ A$ ist genau dann konsistent, wenn O konsistent ist.*

Konservativität

In der semantischen Integration von Ontologien kommt es durch die Namensraumauftrennung zu Erweiterungen des benutzten nichtlogischen Vokabulars. In verschiedenen Integrationsszenarien wird gefordert, dass sich die Vokabularerweiterung nur in einer nicht-kreativen, zurückhaltenden Weise im Integrationsergebnis niederschlägt; durch die Integration des alten Vokabulars soll die Menge der Sätze in der alten Sprache nicht geändert werden. Formal wird diese Forderung durch den Begriff der logischen Konservativität beschrieben.

Definition 3.15. (Monk, 1976, S.208) Seien $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ Vokabulare mit $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}'$ und O, O' Formelmengen in einer logischen Sprache, so dass $O \subseteq O'$ (oder schwächer $\text{Cn}(O) \subseteq \text{Cn}(O')$). O' ist eine *konservative Erweiterung von O* genau dann, wenn für alle Formeln $\beta \in \text{Satz}(\mathcal{V})$ gilt: $O \models \beta$ genau dann, wenn $O' \models \beta$.

Ein Beispiel für diesen Typ von Integrationsszenarien, in denen eine (logisch) konservative Erweiterung gefordert wird, ist das Szenario der Verfeinerung (*refinement*) einer Ontologie (Antoniou und Kehagias, 2000). Die Verfeinerung einer Ontologie ist der zur Abstraktion im Software-Engineering entgegengesetzte Prozess, bei dem eine Ontologie um neue Symbole erweitert wird, die neue, als relevant angesehene Konzepte und Rollen denotieren. Die Einführung der neuen Konzepte und Begriffe darf hierbei nicht dazu führen, dass die Konzeptualisierung der Domäne, die mit der Ausgangsontologie vorgenommen wurde, geändert wird.

Ein verwandtes Integrationsszenario, in dem (logische) Konservativität eine wichtige Rolle spielt, ist der modulare Import von Ontologien (Grau et al., 2008). Beim modularen Import werden in sich geschlossene und hinreichend mächtige Teile, kurz Module, einer fremden Ontologie $\mathcal{O}_2$ derart in eine vorhandene Ontologie $\mathcal{O}_1$ importiert, dass die semantischen Beziehungen in $\mathcal{O}_1$ nicht geändert werden.

In diesen Szenarien wird logische Konservativität als eine erstrebenswerte Eigenschaft angesehen, die insbesondere für Ontologien, die sich in der Praxis bewährt haben, angebracht ist. Auch in dem Integrationsszenario, das in dieser Arbeit behandelt wird, werden gut entwickelte Ontologien vorausgesetzt. Doch anders als in den beiden vorher genannten Integrationsszenarien sollen solche Formen von Integrationen nicht ausgeschlossen werden, die eine Weiterentwicklung der Ontologien bzgl. der öffentlichen Sprache ermöglichen. Nur wenn durch die Integration eine Adaption an die öffentliche Sprache erfolgt, kann für folgende Integrations- oder Kommunikationsprozesse eine Minimierung der Konflikte garantiert werden.

Typ-1-Operatoren für triggernde konzeptbasierte Literale, so zeigt sich, führen im Falle der Inkonsistenz zu konservativen Erweiterungen (Proposition 3.16). Dies hängt mit der Tatsache zusammen, dass Typ-1-Operatoren an der Terminologie der ursprünglichen Ontologie festhalten.

Proposition 3.16. *Sei O eine Menge von Ontologieaxiomen über $\mathcal{V}_c$, α ein konzeptbasiertes Literal und $\circ_1$ ein Reinterpretationsoperator des Typs 1 für triggernde konzeptbasierte Literale. Dann gilt: Wenn $O \cup \{\alpha\}$ inkonsistent ist, ist $O \circ_1 \alpha$ eine konservative Erweiterung von O.*

Beweis. Siehe S. 251.

Typ-2-Operatoren führen zu einer Adaption an die Terminologie des Senders. Aufgrund dieser Eigenschaft kann nicht und sollte Konservativität nicht gewährleistet werden. Wie Proposition 3.17 u.a. zeigt, führt aber die Adaption durch die Typ-2-Operatoren nicht zu einem vollständigen Verlust der Empfängerterminologie in der öffentliche Sprache. Nur für die konfligierenden Symbole und Beziehungen wird der Lesart des Senders Priorität gezollt. Alle anderen in der Empfängerontologie geltenden Beziehungen bleiben erhalten. So besagt Teil 3.17.1 von Proposition 3.17, dass Konservativität eingeschränkt auf alle Sätze β der öffentlichen Sprache, die nicht das konfligierende Konzeptsymbol K enthalten, gewährleistet ist.

Mit den restlichen Teilen von Proposition 3.17 werden die Beobachtungen von Beispiel 3.8 über die Konservierung von konzeptbasierten Literalen und die Asymmetrie zwischen starken und schwachen Operatoren verallgemeinert. Behauptung 3.17.2 drückt eine eingeschränkte Form von Konservativität für solche konzeptbasierte Literale aus, in denen das disambiguierte Symbol K mit demselben Negationspräfix wie im Trigger erscheint: Ist der Trigger ein positives Literal der Form $K(a)$, dann gilt Konservativität bzgl. aller positiven Literale der Form $K(c)$ – unter der Voraussetzung, dass c verschieden ist vom Individuum, das durch die Triggerkonstante a bezeichnet wird. Ist der Trigger ein negatives Literal $\neg K(a)$, dann gilt Konservativität bzgl. aller negativen Literale der Form $\neg K(c)$, vorausgesetzt wieder, dass c verschieden ist von a. Haben die Literale der Form $\hat{K}(c)$ ein zum Trigger entgegengesetztes Präfix, unterscheiden sich die Mengen der durch den schwachen bzw. starken Operator konservierten Literale. Gemäß 3.17.3 gilt, dass $\otimes_2$ überhaupt keine Literale konserviert, in denen das zum Konflikt führende Konzeptsymbol K mit entgegengesetztem Präfix erscheint. Im Gegensatz dazu gilt gemäß 3.17.4, dass die starken Typ-2-Operatoren $\odot_2$ auch solche Literale $\hat{K}(c)$ mit entgegengesetztem Präfix konservieren, für die nachweislich c bzgl. einer Eigenschaft von a verschieden ist. Behauptung 3.17.5 ist eine Verallgemeinerung der Behauptungen 3.17.3 und 3.17.4 auf die selektionsbasierten Operatoren vom Typ 2 $\oplus_2^{\text{sel}}$.

Proposition 3.17. *Sei $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine Ontologie, $K \in \mathcal{V}_c$ ein Konzeptsymbol und $a, c \in \mathcal{V}_c$ Konstanten mit der Eigenschaft, dass $\text{msc}_O(a)$ existiert und Φ ein Disambiguierungsschema, auf dem alle im Folgenden genannten Operatoren basieren. Sei $\alpha = K(a)$ und $\epsilon = K(c)$ oder $\alpha = \neg K(a)$ und $\epsilon = \neg K(c)$. Es bezeichne $K' \in \mathcal{V}_i \setminus \mathcal{V}(O)$ das durch Φ festgelegte interne Symbol. Weiter sei β ein Satz mit $\mathcal{V}(\beta) \subseteq (\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O)) \setminus \{K\}$. Schließlich sei* sel *eine Selektionsfunktion für Brückenaxiome und* $\widetilde{\text{sel}}$ *die zugehörige Funktion, die die Konzepte C selektiert:* $\widetilde{\text{sel}}(\text{oa}_1(O, \hat{K}(a), K')) = \{C \mid \hat{K}' \sqsubseteq \hat{K} \sqcup C \in \text{sel}(\text{oa}_1(O, \hat{K}(a), K'))\}$ *und* $\widetilde{\text{sel}}(\text{oa}_2(O, \hat{K}(a), K')) = \{C \mid \hat{K} \sqsubseteq \hat{K}' \sqcup C \in \text{sel}(\text{oa}_2(O, \hat{K}(a), K'))\}$.

Wenn $O \models \neg\alpha$, dann

1. $O \circ_2 \alpha \models \beta$ *gdw.* $O \models \beta$
2. $O \circ_2 \alpha \models \epsilon$ *gdw.* $O \cup \{a \neq c\} \models \epsilon$
3. $O \otimes_2 \alpha \not\models \neg\epsilon$
4. $O \odot_2 \alpha \models \neg\epsilon$ *gdw.* $O \models \neg\epsilon$ *und* $O \models \neg\, \text{msc}_O(a)(c)$
5. $O \oplus_2^{\text{sel}} \alpha \models \neg\epsilon$ *gdw.* $O \models \neg\epsilon$ *und* $O \models \neg \bigsqcap \widetilde{\text{sel}}(\text{oa}_2(O, \alpha, K'))_{[K'/K]}(c)$

Beweis. Siehe S. 251.

3.3 Reinterpretation für triggernde Ontologien

In diesem Abschnitt wird die Einschränkung, dass der Trigger einer Integration eine einfache Struktur (z.B. die einfache Struktur eines Literals der Form $K(a)$) hat, aufgegeben. Der Trigger darf eine (beliebig komplexe) Ontologie sein. Diese

Komplexität bringt es mit sich, dass die interontologische Ambiguität mehrerer Symbole für einen Konflikt verantwortlich sein kann. Daraus resultiert die Aufgabe, dass man sich für die Reinterpretation eines Symbols (einer Menge von Symbolen) und gegen die Reinterpretation eines anderen Symbols zu entscheiden hat. In der Belief-Revision wird diese Entscheidungsproblematik durch die Angabe von Selektionsfunktionen, die den Prozess der Entscheidung formalisieren, bewältigt. Auch für die Integration einer (Trigger-)Ontologie mittels Reinterpretation werden (genau zwei verschiedene) Selektionsfunktionen benutzt. Die darauf basierenden Reinterpretationsoperatoren sind im Superskript durch die Angabe der Selektionsfunktionen bzw. des Paares von Selektionsfunktionen $\overline{\gamma} = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ gekennzeichnet.

Neben der Ambiguität von Konzeptsymbolen können auch die Ambiguität von Rollensymbolen und Konstanten für die Entstehung von Konflikten zwischen zwei Ontologien verantwortlich gemacht werden. Enthält die Ontologie andere nichtlogische Symbole, wie z.B. dreistellige Prädikatsymbole, sollen auch die für die Reinterpretation zugänglich gemacht werden. Die zur Entkopplung der Ontologien benutzten Substitutionen σ sind weiterhin injektive Abbildungen aus einem öffentlichen Vokabular in ein internes Vokabular, $\sigma \in \mathrm{AR}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$; σ kann mehr als ein Symbol (möglicherweise unterschiedlichen Typs) in seiner Trägermenge enthalten.

3.3.1 Definition der Operatoren

Der Zweiphasen-Prozess von Abbildung 3.1 ist der Rahmen, in dem sich auch die Reinterpretation für triggernde Ontologien abspielt. Die erste Phase der Disambiguierung mittels Namensraumauftrennung muss nun verfeinert werden: Es ist zunächst festzustellen, bzgl. welcher Menge von Symbolen $S^{\#}$ eine Namensraumauftrennung erfolgen soll. Die zu integrierenden Ontologien werden bzgl. dieser Menge entkoppelt und schließlich durch Hypothesen zu den semantischen Beziehungen in Form von Brückenaxiomen wieder zueinander in Beziehung gesetzt (Abbildung 3.5).

Für die Integration zweier Ontologien $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \emptyset \rangle$ werden zunächst alle Symbolmengen S bestimmt, die in Konflikten involviert sind. Die Menge der inklusionsminimalen Symbolmengen S, deren Internalisierung mittels einer Substitution σ_S mit Träger S zu einer konsistenten Entkopplung führt, wird durch $\mathrm{MRS}(O_1, O_2)$ bezeichnet. Die Forderung nach der Inklusionsminimalität des Trägers legt fest, dass nur solche Mengen von Symbolen bestimmt werden, deren Symbole auch tatsächlich für einen Konflikt verantwortlich gemacht werden können. Ich benutze die schon in Abschnitt 2.4 verwendete Ordnung zwischen Substitutionen $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{AR}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$, gemäß der $\sigma_1 \leq \sigma_2$ genau dann gilt, wenn der Träger von σ_1 eine Teilmenge des Trägers von σ_2 ist, $\mathrm{supp}(\sigma_1) \subseteq \mathrm{supp}(\sigma_2)$.

$$\boxed{\text{In Konflikt involvierte Symbolmenge } S^{\#} \text{ bestimmen}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Ontologien bzgl. } S^{\#} \text{ entkoppeln}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Hypothesen zu semantischen Beziehungen}}$$

Abbildung 3.5: Struktur der Reinterpretation für triggernde Ontologien

Definition 3.18. Seien $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$, $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i' \rangle$ Ontologien. Die Menge der *minimalen Konfliktsymbolmengen (bzgl. $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$)* $\mathrm{MRS}(O_1, O_2)$ wird definiert durch:

$$\begin{aligned}\mathrm{MRS}(O_1, O_2) = \{S \subseteq \mathcal{V}_c \quad | \quad & \text{Es gibt eine Substitution } \sigma_S \in \mathrm{AR}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i'), \text{ so dass} \\ & \mathrm{supp}(\sigma_S) = S \text{ gilt, } O_1 \cup O_2\sigma_S \text{ konsistent ist und} \\ & \text{für alle } \sigma_{S'} \in \mathrm{AR}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i') \text{ mit } \sigma_{S'} < \sigma_S \\ & O_1 \cup O_2\sigma_{S'} \text{ nicht konsistent ist. } \}\end{aligned}$$

Für die Unterscheidung von Typ-1- und Typ-2-Operatoren ist festzulegen, in welcher der beiden Ontologien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ eine Internalisierung der Symbole S erfolgt, die für den Konflikt verantwortlich gemacht werden können. Für Typ-1-Operatoren erfolgt eine Internalisierung der Vorkommen von Symbolen von S in der Menge de Ontologieaxiome O_2 des Senders. Die resultierende konsistente Entkopplung hat dann die Form $O_1 \cup O_2\sigma_S$, für eine Substitution σ_S mit Träger S. Für Typ-2-Operatoren erfolgt eine Internalisierung der Vorkommen von Symbolen von S in der Menge der Ontologieaxiome O_1 des Empfängers. Die resultierende konsistente Entkopplung hat dann die Form $O_1\sigma_2 \cup O_2$, für eine Substitution σ_S mit Träger S. Für die Bestimmung der minimalen Konfliktsymbolmengen ist diese Tatsache jedoch unerheblich, da sich die Kommutativität von $\mathrm{MRS}(\cdot,\cdot)$ zeigen lässt, $\mathrm{MRS}(O_1, O_2) = \mathrm{MRS}(O_2, O_1)$ (Beobachtung 3.19.1). Wenn $O_1 \cup O_2$ konsistent ist, ist keine Entkopplung der Ontologien nötig, d.h., in diesem Falle ist nur die leere Menge $\emptyset$ in $\mathrm{MRS}(O_1, O_2)$ enthalten (Beobachtung 3.19.2). Sind O_1 und O_2 nicht reinterpretationskompatibel, dann gibt es keine Möglichkeit zur konsistenten Entkopplung (Beobachtung 3.19.3).

Beobachtung 3.19. *Seien $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$, $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i' \rangle$ Ontologien.*

1. $\mathrm{MRS}(O_1, O_2) = \mathrm{MRS}(O_2, O_1)$
2. $\mathrm{MRS}(O_1, O_2) = \{\emptyset\}$ *gdw.* $O_1 \cup O_2$ *konsistent ist.*

3. $\mathrm{MRS}(O_1, O_2) = \emptyset$ *gdw. nicht* $\mathrm{rekomp}(O_1, O_2)$.

Beispiel 3.20 zeigt, dass es bei triggernden Ontologien nötig sein kann, mehr als ein Symbol zu reinterpretieren.

Beispiel 3.20. Es ist ein Onlinebibliothekssystem zu konstruieren, das durch Integration einer (kleinen) Menge von Ontologieaxiomen O_2 in die Menge der Ontologieaxiome O_1 entstehen soll. In O_1 gelten nur solche Dinge als Aufsätze, die in einer Zeitschrift veröffentlicht worden sind; außerdem sind Zeitschriften verschieden von Proceedings und Aufsatzsammlungen. Wenn eine Veröffentlichung ein Buchtitel hat, dann wurde es in den Proceedings (einer Konferenz) veröffentlicht oder ist in einer Aufsatzsammlung enthalten. Dahinter steckt die Idee, dass der Buchtitel den Titel des Proceedingsbands oder des Aufsatzbands bezeichnet. Bücher sind verschieden von Aufsätzen und sind nicht in einem Proceedingsband oder einer Aufsatzsammlung veröffentlicht. Außerdem ist verzeichnet, dass *medXY* den Buchtitel „Proceedings of FOIS 2008“ hat. In O_2 wird ein anderer Begriff von Aufsatz und von Buchtitel benutzt. In O_2 sind nur solche Medien Aufsätze, die in einer Zeitschrift oder einem Proceedingsband oder einer Aufsatzsammlung veröffentlicht worden sind. Ein Buchtitel eines Mediums ist der Titel eines Mediums, das ein Buch ist. Ein Medium *medXY* ist als ein Aufsatz verzeichnet, der in den Proceedings der Konferenz FOIS 2008 erschienen ist. Das öffentliche Vokabular $\mathcal{V}_c$ bestehe aus allen nichtlogischen Symbolen in $O_1 \cup O_2$; $\mathcal{V}_i$ bestehe aus allen gestrichenen Varianten der Symbole in $\mathcal{V}(O_1)$.

$$
\begin{aligned}
O_1 \;=\; & \{\mathit{Aufsatz} \sqsubseteq \forall \mathit{veroeff}.\mathit{Zeitschr}, \mathit{Zeitschr} \sqsubseteq (\neg \mathit{Proc} \sqcap \neg \mathit{Samml}),\\
& \exists \mathit{Buchtitel}.\top \sqsubseteq \exists \mathit{veroeff}.(\mathit{Proc} \sqcup \mathit{Samml}),\\
& \mathit{Buch} \sqsubseteq \neg \mathit{Aufsatz} \sqcap \neg \exists \mathit{veroeff}.(\mathit{Proc} \sqcup \mathit{Samml}),\\
& \mathit{Buchtitel}(\mathit{medXY}, \text{„}\mathit{Proceedings\ of\ FOIS\ 2008}\text{“})\}\\
O_2 \;=\; & \{\mathit{Aufsatz} \sqsubseteq \forall \mathit{veroeff}.(\mathit{Zeitschr} \sqcup \mathit{Proc} \sqcup \mathit{Samml}), \exists \mathit{Buchtitel}.\top \sqsubseteq \mathit{Buch},\\
& \mathit{Aufsatz}(\mathit{medXY}), \mathit{veroeff}(\mathit{medXY}, \mathit{procFOIS08}), \mathit{Proc}(\mathit{procFOIS08})\}
\end{aligned}
$$

Die beiden Ontologien sind inkompatibel. Für die Konflikte verantwortlich sind die Ambiguität von *Buchtitel* und von *Aufsatz*, d.h. dass $\{\mathit{Aufsatz}, \mathit{Buchtitel}\} \in \mathrm{MRS}(O_1, O_2)$ eine minimale Konfliktsymbolmenge ist.

Mit welchen neuen Symbolen die konsistente Entkopplung der Ontologien erfolgt, ist für den Entkopplungsprozess selber unerheblich. Damit jedoch auch Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien syntaxunabhängig sind, soll die Auswahl der Substitution, die für die Entkopplung benutzt wird, eindeutig durch die Menge der in der Empfängerontologie vorkommenden internen Symbole bestimmt sein. Das hierzu verwendete technische Hilfsmittel ist wieder das eines Disambiguierungsschemas $\Phi \in \mathrm{Ear}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$ (Definition 3.5, S. 76).

Da es mehr als eine minimale Konfliktsymbolmenge $S^{\#}$ geben kann, ist die Menge der Symbole, bzgl. der entkoppelt werden soll, nicht eindeutig festgelegt. Es wird daher eine Selektionsfunktion[11], im Folgenden immer durch γ_1 bezeichnet, vorausgesetzt, die eine Teilmenge $\gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1, O_2))$ von $\mathrm{MRS}(O_1, O_2)$ auswählt. Da unter diesen Mengen in $\gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1, O_2))$ nicht weiter unterschieden wird, lässt sich die Menge der Symbole $S^{\#}$ durch die Vereinigung der ausgewählten minimalen Konfliktsymbolmengen festlegen: $S^{\#} = \bigcup \gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1, O_2))$. Die Vereinigung kann durchaus zu einer Menge $S^{\#}$ führen, die mehr Symbole disambiguiert, als für eine konsistente Entkopplung nötig wäre.

Die entkoppelten Ontologien werden wie auch im Fall der Reinterpretationsoperatoren für triggernde konzeptbasierte Literale durch Brückenaxiome zueinander in Beziehung gesetzt, indem für alle Symbole der vorher ausgewählten Symbolmenge $S^{\#}$ Hypothesen über die semantische Beziehung der beiden Lesarten getroffen wird. Da verschiedene Symbole für einen Konflikt verantwortlich gemacht werden können, ist eine Menge von Kandidatenbrückenaxiomen vorzugeben, aus denen eine Teilmenge ausgewählt wird, mit denen eine konsistenzerhaltende Kopplung der Ontologien möglich ist. Die Wahl der initialen Hypothesenmenge ist ein Parameter, mit dem sich verschieden starke Reinterpretationsoperatoren definieren lassen. In diesem Abschnitt stelle ich eine Verallgemeinerung der schwachen Reinterpretationsoperatoren $\otimes_i$ vor.[12] Die Mengen an potentiellen Brückenaxiomen für die schwachen Operatoren für triggernde konzeptbasierte Literale setzt sich aus Unter- und Oberabschätzungen für das neue Symbol $\sigma(s)$ zusammen, falls s und damit $\sigma(s)$ ein Konzept- oder Rollensymbol ist. Für Rollensymbole R_1, R_2 werden Rollenaxiome der Form $R_1 \sqsubseteq R_2$ als Unter- bzw. Oberabschätzung benutzt. Ich benutze dasselbe Symbol $\sqsubseteq$ wie für die Unterkonzeptbeziehung, da die Semantik ähnlich definiert ist. Für Konstanten können nur Identitäten $s \doteq \sigma(s)$ als Brückenaxiome angesetzt werden. Für eine Symbolmenge S bezeichnet S_{KR} die Menge der Konzept- und Rollensymbole, S_{Konst} die Menge der Konstanten in S.

Definition 3.21. Sei $\sigma \in \mathrm{AR}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$. Dann ist die Menge der *einfachen Unterabschätzungen* $\mathrm{UA}(\sigma)$, die Menge der *einfachen Oberabschätzungen* $\mathrm{OA}(\sigma)$ und die Menge aller *einfachen Abschätzungen* $\mathrm{BA}(\sigma)$ bzgl. σ definiert durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{UA}(\sigma) &= \{s \sqsubseteq \sigma(s) \mid s \in (\mathrm{supp}(\sigma))_{KR}\} \\
\mathrm{OA}(\sigma) &= \{\sigma(s) \sqsubseteq s \mid s \in \mathrm{supp}(\sigma)_{KR}\} \\
\mathrm{BA}(\sigma) &= \mathrm{UA}(\sigma) \cup \mathrm{OA}(\sigma) \cup \{s \doteq \sigma(s) \mid s \in (\mathrm{supp}(\sigma))_{Konst}\}
\end{aligned}$$

[11] Vgl. Anhang A, Definition A.39, S. 246.

[12] Starke Varianten von Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien werden in Kapitel 5 definiert.

Ist in der ersten Phase der Reinterpretation die Menge der Symbole $S^{\#}$ bestimmt worden, bzgl. der eine Entkopplung stattfinden soll, und steht fest, welcher Typ von Entkopplung angewandt wird, werden im zweiten Schritt durch geeignete Auswahl von Brückenaxiomen aus der Menge $\mathrm{BA}(\sigma)$, wobei σ eine Substitution mit Träger $S^{\#}$ ist, die disambiguierten Symbole aus $S^{\#}$ semantisch gekoppelt. Da in dem intendierten Integrationsszenario zwei verwandte Ontologien vorausgesetzt werden, ist eine möglichst große Anzahl von Brückenaxiomen in das Integrationsresultat aufzunehmen, die zu einer konsistenten Erweiterung führen. Wird z.B. eine Entkopplung des Typs 1 vorgenommen, sind die inklusionsmaximalen Teilmengen von $\mathrm{BA}(\sigma)$, die konsistent zu $O_1 \cup O_2\sigma$ hinzugefügt werden können, mögliche Kandidaten für das Integrationsresultat. Formal lässt sich diese Menge durch die duale Restmenge von $\mathrm{BA}(\sigma)$ modulo $O_1 \cup O_2\sigma$ fassen (s. Anhang A, Definition A.37, S. 245).

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{BA}(\sigma)\top(O_1 \cup O_2\sigma) & = & \{X \in \mathrm{BA}(\sigma) \mid O_1 \cup O_2\sigma \cup X \text{ ist konsistent und} \\ & & \text{für alle } X' \supset X \text{ ist } O_1 \cup O_2\sigma \cup X' \text{ nicht konsistent}\}\end{array}$$

Da auch hier mehr als eine inklusionsmaximale Menge von Brückenaxiomen vorliegen kann, wird durch eine Selektionsfunktion, im Folgenden immer mit γ_2 bezeichnet, eine Auswahl getroffen. Der Schnitt aller ausgewählten Mengen bildet damit schließlich die Menge der Brückenaxiome, die in das Integrationsresultat aufgenommen werden.

Die mit der Selektionsfunktion γ_2 getroffene Auswahl ist auch dann nicht redundant, wenn die Selektionsfunktion γ_1 genau eine Menge $X \in \gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1, O_2))$ von minimalen Konfliktsymbolmengen auswählt. Auch in diesem Fall kann die Menge möglicher maximaler Abschätzungen bzgl. der Symbolmenge X mehr als ein Element enthalten, wie das folgende Beispiel 3.22 zeigt.

Beispiel 3.22. Es seien

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{V}_c & = & \{R, K, a\} \\ \mathcal{V}_i & = & \{R', K', a'\} \\ O_1 & = & \{(\exists R.K \sqcup \exists R.\exists R.\neg K)(a)\} \\ O_2 & = & \{(\forall R.\neg K \sqcap \forall R.\forall R.K)(a)\} \\ \gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1, O_2)) & = & \{\{K\}\} \\ S^{\#} & = & \{K\}\end{array}$$

Die Menge möglicher maximaler Abschätzungen $\mathrm{BA}(\sigma)\top(O_1 \cup O_2\sigma)$ ergibt sich damit zu $\{\{K \sqsubseteq K'\}, \{K' \sqsubseteq K\}\}$, besteht also aus mindestens zwei Abschätzungsmengen, aus denen γ_2 zu wählen hat.

Mit dieser Begrifflichkeit lassen sich die schwachen Reinterpretationsoperatoren $\otimes_i^{\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle}$ des Typs $i \in \{1,2\}$ definieren.

Definition 3.23. Gegeben seien ein Disambiguierungsschema $\Phi \in \mathrm{Ear}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$, Selektionsfunktionen γ_1, γ_2, $\overline{\gamma} = \langle\gamma_1,\gamma_2\rangle$ und zwei Ontologien $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle$, $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \emptyset\rangle$. Es sei $S^{\#} = \bigcup \gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1,O_2)) = \bigcup \gamma_1(\mathrm{MRS}(O_2,O_1))$ und $\sigma = \Phi(S^{\#}, \mathcal{V}(O_1)\cap\mathcal{V}_i)$. Dann werden die *schwachen Reinterpretationsoperatoren des Typs 1* $\otimes_1^{\overline{\gamma}} = \otimes_1^{\overline{\gamma},\Phi}$ bzw. die *schwachen Reinterpretationsoperatoren des Typs 2* $\otimes_2^{\overline{\gamma}} = \otimes_2^{\overline{\gamma},\Phi}$ basierend auf Φ definiert durch

$$
\begin{aligned}
O_1 \otimes_1^{\overline{\gamma}} O_2 &= O_1 \cup O_2\sigma \cup \bigcap \gamma_2\big(\mathrm{BA}(\sigma)\top(O_1 \cup O_2\sigma)\big)\\
O_1 \otimes_2^{\overline{\gamma}} O_2 &= O_1\sigma \cup O_2 \cup \bigcap \gamma_2\big(\mathrm{BA}(\sigma)\top(O_1\sigma \cup O_2)\big)
\end{aligned}
$$

Unmittelbar aus den Definitionen folgt, dass Typ-1- und Typ-2-Operatoren durch Vertauschung der beiden Argumente in dem in Beobachtung 3.24 beschriebenen Sinne auseinander hervorgehen.

Beobachtung 3.24. *Gegeben seien die Selektionsfunktionen γ_1, γ_2, $\overline{\gamma} = \langle\gamma_1,\gamma_2\rangle$ sowie die Ontologien $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle$, $\mathcal{O}_1' = \langle O_1', \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle$, $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle$ und $\mathcal{O}_2' = \langle O_2', \mathcal{V}_c, \emptyset\rangle$ mit $O_1 = O_1'$ und $O_2 = O_2'$. Dann gilt $O_1 \otimes_1^{\overline{\gamma}} O_2' = O_2 \otimes_2^{\overline{\gamma}} O_1'$.*

Eine Selektionsfunktion γ_1 *bevorzugt* die Reinterpretation von Konzept- und Rollensymbolen, wenn gilt: Alle Mengen $X \in \gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1,O_2))$ enthalten nur Konzept- und Rollensymbole. (Dies setzt voraus, dass es Mengen X gibt, die nur Rollen- und Konzeptsymbole enthalten und für die $X \in \gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1,O_2))$ gilt.) Mit diesem Begriff lässt sich formulieren, inwiefern die schwachen Operatoren für triggernde Ontologien die schwachen Operatoren für triggernde konzeptbasierte Literale als Spezialfall enthalten.

Beobachtung 3.25. *Seien γ_1, γ_2 Selektionsfunktionen, $\overline{\gamma} = \langle\gamma_1,\gamma_2\rangle$, wobei γ_1 die Reinterpretation von Konzept- und Rollensymbolen bevorzugt, $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle$ eine Ontologie und α ein Literal, $\mathcal{V}(\alpha) \subseteq \mathcal{V}_c$. Dann gilt für $i \in \{1,2\}$: $O \otimes_i^{\overline{\gamma}} \{\alpha\} = O \otimes_i \alpha$.*

Da es mit den schwachen Operatoren $\otimes_i^{\overline{\gamma}}$ möglich ist, auch Konstanten zu reinterpretieren, lassen sich zusätzliche Szenarien von terminologischen Konflikten und deren Auflösung modellieren. Beispiel 3.26 demonstriert die Anwendung der Operatoren mit zwei unterschiedlichen Paaren von Selektionsfunktionen in einem Onlinebibliothekssystem-Szenario.

Beispiel 3.26. Wieder wird das Szenario zur Konstruktion eines Onlinebibliothekssystems vorausgesetzt, allerdings mit anderen Ontologien. Es ist O_2 mittels eines schwachen Typ-2-Operators $\otimes_2^{\overline{\gamma}}$ in O_1 zu integrieren. In O_2 ist nur der

Eintrag verzeichnet, dass ein Bibliotheksmedium *medXY* ein Aufsatz ist. In O_1 ist verzeichnet, dass alle Aufsätze in Zeitschriften veröffentlicht sind; dass Zeitschriften verschieden sind von Proceedings; und dass ein Medium *medXY* in *procVonFOIS08* veröffentlicht ist, welches ein Proceedingsband ist.

$$\begin{aligned} O_1 &= \{\mathit{Aufsatz} \sqsubseteq \forall \mathit{veroeff}.\mathit{Zeitschr}, \mathit{Zeitschr} \sqsubseteq \neg \mathit{Proc}, \\ &\quad \mathit{veroeff}(\mathit{medXY}, \mathit{procVonFOIS08}), \mathit{Proc}(\mathit{procVonFOIS08})\} \\ O_2 &= \{\mathit{Aufsatz}(\mathit{medXY})\} \end{aligned}$$

Die beiden Ontologien sind nicht kompatibel. Die Menge der minimalen Konfliktsymbolmengen $\mathrm{MRS}(O_1, O_2)$ enthält die Mengen $\{\mathit{medXY}\}$ und $\{\mathit{Aufsatz}\}$. Das bedeutet insbesondere, dass eine Reinterpretation der Konstanten *medXY* oder des Konzeptsymbols *Aufsatz* ausreichend ist, um den Konflikt aufzulösen.

Entscheidet man sich dafür, *medXY* zu reinterpretieren und führt dazu ein neues Symbol medXY' für das durch O_1 bezeichnete Medium ein, so heißt das, dass die Ambiguität der Konstanten *medXY* für den Konflikt verantwortlich gemacht wird. Diese Diagnose kann durch eine Selektionsfunktion γ_1^1 formalisiert werden, für die $\gamma_1^1(\mathrm{MRS}(O_2, O_1)) = \{\{\mathit{med}01\}\}$ gilt. Diese Wahl passt zu solchen Situationen, in denen *medXY* in O_1 eine Veröffentlichung im Proceedingsband von FOIS 2008 bezeichnet, während *medXY* in O_2 einen Folgeaufsatz in einer Zeitschrift bezeichnet. Da die schwachen Operatoren die disambiguierten Konstanten nicht miteinander in Beziehung setzen, gilt daher für alle Selektionsfunktionen γ_2^1 für Brückenaxiome:

$$O_1 \otimes_2^{\langle \gamma_1^1, \gamma_2^1 \rangle} O_2 = O_{1[\mathit{medXY}/\mathit{medXY}']} \cup \{\mathit{Aufsatz}(\mathit{medXY})\}$$

Die Entscheidung, das Konzeptsymbol *Aufsatz* zu reinterpretieren, passt zu solchen Situationen, in denen beide Ontologien zwar über dasselbe Medium *medXY* im Proceedingsband von FOIS 2008 sprechen, aber unterschiedlich weite Lesarten des Aufsatzterminus zu Grunde legen, von denen der in O_2 verwendete weiter ist. Die zugehörige Selektionsfunktion γ_1^2 hat die Eigenschaft, dass die Gleichheit $\gamma_1^2(\mathrm{MRS}(O_2, O_1)) = \{\{\mathit{Aufsatz}\}\}$ gilt. Die einzige maximale Menge von Brückenaxiomen ist $\{\mathit{Aufsatz}' \sqsubseteq \mathit{Aufsatz}\}$, so dass für alle Selektionsfunktionen γ_2^2 $\gamma_2^2(\{\{\mathit{Aufsatz}' \sqsubseteq \mathit{Aufsatz}\}\}) = \{\mathit{Aufsatz}' \sqsubseteq \mathit{Aufsatz}\}$ gilt. Das Integrationsresultat lautet dementsprechend:

$$O_1 \otimes_2^{\langle \gamma_1^2, \gamma_2^2 \rangle} O_2 \;=\; O_{1[\mathit{Aufsatz}/\mathit{Aufsatz}']} \cup \{\mathit{Aufsatz}' \sqsubseteq \mathit{Aufsatz}\} \cup \{\mathit{Aufsatz}(\mathit{medXY})\}$$

Die Aufteilung der Disambiguierung mittels zweier Selektionsfunktionen γ_1, γ_2 führt zu einer Klasse von Reinterpretationsoperatoren, bei denen schon im ersten Auswahlschritt (durch γ_1) eine Festlegung auf semantische Beziehungen erfolgt, die durch die folgende Auswahl durch γ_2 nicht mehr rückgängig gemacht werden kann. Wenn die Entkopplung bzgl. einer Menge $S^{\#}$ erfolgt, ist die Entkopplung bzgl. einer Obermenge $S^{\#\#}$ nicht dadurch (eindeutig) festgelegt, dass für alle zusätzlichen Symbole $s \in S^{\#\#} \setminus S^{\#}$ keine echte Entkopplung erfolgt: Sei σ eine Substitution mit Träger $S^{\#\#}$. Dann gilt im Allgemeinen nicht, dass sich für $s \in S^{\#\#} \setminus S^{\#}$ zeigen lässt: $\{s \sqsubseteq \sigma(s), \sigma(s) \sqsubseteq s\} \subseteq \bigcap(\mathrm{BA}(\sigma) \top (O_1 \cup O_2\sigma))$ für Konzept- und Rollensymbole s bzw. $\{s \doteq \sigma(s)\} \subseteq \bigcap(\mathrm{BA}(\sigma) \top (O_1 \cup O_2\sigma))$ für Konstanten s.

Beispiel 3.27. Betrachte die Mengen von Ontologieaxiomen

$$\begin{aligned} O_1 &= \{K_1(a), (\neg\exists R.K_1 \sqcup \exists R.K_2)(a)\} \\ O_2 &= \{\neg K_1(a), (\exists R.K_1 \sqcap \neg\exists R.K_2)(a)\} \end{aligned}$$

Es ist $\mathrm{MRS}(O_1, O_2) = \{\{a\}, \{K_1\}\}$; sei $\gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1, O_2)) = \{\{a\}, \{K_1\}\}$. Damit ist $S^{\#} = \{K_1, a\}$. Sei $S^{\#\#} = \{K_1, K_2, a\}$ und σ sei eine Substitution mit Träger $S^{\#\#}$ und abkürzend $s' = \sigma(s)$. Für das Konzeptsymbol $K_2 \in S^{\#\#} \setminus S^{\#}$ gilt nicht $\{K_2 \sqsubseteq K_2', K_2' \sqsubseteq K_2\} \subseteq \bigcap(\mathrm{BA}(\sigma) \top (O_1 \cup O_2\sigma))$. Denn z.B. ist die Menge $\{K_1' \sqsubseteq K_1, K_2' \sqsubseteq K_2, a = a'\} \in \mathrm{BA}(\sigma) \top (O_1 \cup O_2\sigma)$ eine Menge, in der $K_2 \sqsubseteq K_2'$ nicht enthalten ist. Der Grund ist, dass K_2 zwar in keiner minimalen Symbolmenge S enthalten ist, die zu einer konsistenten Entkopplung führt, dafür aber in einer minimalen Satzmenge, $\{(\neg\exists R.K_1 \sqcup \exists R.K_2)(a), (\exists R.K_1 \sqcap \neg\exists K_2)(a)\}$, vorkommt, die einen Widerspruch erzeugt.

In Abschnitt 4.2 zur Darstellung von Reinterpretation als Revision von Hypothesenmengen wird eine weitere Klasse von schwachen Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien definiert, die nur auf einer Selektionsfunktion γ_2 zur Auswahl von Brückenaxiomen beruht.

3.3.2 Eigenschaften der Operatoren für triggernde Ontologien

Ähnlich wie für die korrespondierenden Operatoren für triggernde konzeptbasierte Literale lassen sich unmittelbar aus den Definitionen folgende Aussagen über die Erfüllbarkeit der Integrationspostulate erschließen. Typ-1-Operatoren und Typ-2-Operatoren erfüllen die beiden vom Monotoniepostulat (Reint 4a) und vom Erfolgspostulat (Reint 4b) regierten Unterklassen von Integrationspostulaten, die in Abschnitt 3.1 für das intendierte Integrationsszenario diskutiert wurden.

Beobachtung 3.28. *Seien Selektionsfunktionen γ_1, γ_2, $\overline{\gamma} = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ gegeben. Dann gilt:*

1. *$\otimes_1^{\overline{\gamma}}$ erfüllt (Reint 1a), (Reint 1b), (Reint 2), (Reint 3), (Reint 5a), (Reint 5b), (Reint 6a), (Reint 6b), (Reint 7) und (Reint 4a) (und damit auch alle korrespondierenden #-markierten Varianten der Postulate).*

2. $\otimes_2^{\overline{7}}$ *erfüllt (Reint 1a), (Reint 1b), (Reint 2), (Reint 3), (Reint 5a), (Reint 5b), (Reint 6a), (Reint 6b), (Reint 7) und (Reint 4b) (und damit auch alle korrespondierenden #-markierten Varianten der Postulate).*

Was die in dieser Arbeit definierten Reinterpretationsoperatoren im Vergleich zu anderen, auf Belief-Revision basierenden Ansätzen zur Integration von Ontologien auszeichnet, ist die Konservierung (Postulate (Reint 5a), (Reint 5b)) und Rekonstruierbarkeit (Postulate (Reint 6a), (Reint 6b)) beider Ontologien im Integrationsresultat. Die Konservierung und Rekonstruierbarkeit der Ontologien ist ein Desiderat für das hier besprochene Integrationsszenario, gemäß dem beide Ontologien gut entwickelte Ontologien sind, die sich in der Praxis bewährt haben.

In Abschnitt 2.4 wurden bereits für die Operatoren von Delgrande und Schaub (2003) und von Goeb und Kollegen (Goeb et al., 2007) die erfüllten Postulate aus der Belief-Revision aufgelistet. Zu Teilen ergänzend, zu Teilen umformulierend benennen Beobachtung 3.29 bzw. 3.30 die (nicht) erfüllten Integrationspostulate.

Die hier definierten Reinterpretationsoperatoren (des Typs 2) sind konzeptionell den Revisionsoperatoren $\dot{+}$ und $\dot{+}_c$ von Delgrande und Schaub (2003) am nächsten (s. diese Arbeit, Definition 2.29). Dies spiegelt sich in der Erfüllung der Integrationspostulate wider (Beobachtung 3.29). Reinterpretationsoperatoren basieren ebenfalls auf einer Menge von Hypothesen, mit denen das Integrationsresultat bestimmt wird. Es gehen ebenfalls Selektionsfunktionen ein, mit denen maximale Mengen von Hypothesen ausgesucht werden. Es gibt jedoch einige wesentliche Unterschiede.

Delgrande und Schaub betrachten keine beschreibungslogischen, sondern aussagenlogische Wissensbasen. Entsprechend sind die dortigen Hypothesen lediglich Biimplikationen von Aussagensymbolen. Biimplikationen entsprechen zudem Konzeptäquivalenzen und nicht Subsumptionsbeziehungen. Dieser letztere Unterschied kann dadurch umgangen werden, dass in der Definition der Operatoren von Delgrande und Schaub statt der Biimplikationen einfache Implikationen $p \rightarrow p'$ verwendet werden, die eher Subsumptionsbeziehungen $C \sqsubseteq C'$ entsprechen. Wie ich in Abschnitt 4.2.3 anhand eines einfachen Beispiels zeige, führt diese Verallgemeinerung jedoch auch zu Operatoren, die nicht durch $\dot{+}, \dot{+}_c$ beschrieben werden können.

Das Ergebnis der Revision bei Delgrande und Schaub enthält keine internen Symbole. Diese werden nur innerhalb der Biimplikationen $p \leftrightarrow p'$ benutzt, die in die Definition ihrer Revisionsfunktionen $\dot{+}, \dot{+}_c$ eingehen. Aus diesem Grunde erfüllen $\dot{+}, \dot{+}_c$ nicht die Postulate zur Linkskonservierung (Reint$^{\#}$ 5a) und Linksrekonstruierbarkeit (Reint$^{\#}$ 6a).

Beobachtung 3.29. *Die Revisionsoperatoren* $\dot{+}, \dot{+}_c$ *von Delgrande und Schaub (2003) erfüllen die Postulate (Reint 1a), (Reint 1b), (Reint$^{\#}$ 2), (Reint$^{\#}$ 3),* *(Reint 4b), (Reint 5b), (Reint 6b) und (Reint 7) (und damit auch alle korrespondierenden #-markierten Varianten der Postulate), aber im Allgemeinen nicht (Reint# 5a), (Reint# 6a) (und folglich auch nicht die korrespondierenden unmarkierten Varianten).*

Da Delgrande und Schaub ihren Ansatz für aussagenlogische Wissensbasen definieren, können sie zeigen, dass ihre Operatoren ein stärkeres Konsistenzpostulat als das Postulat (Reint 7) erfüllen. Der Grund ist, dass Reinterpretationskompatibilität zwischen zwei aussagenlogischen Wissensbasen genau dann gilt, wenn beide Wissensbasen konsistent sind.

Der aus einem Algorithmus resultierende implizite Integrationsoperator von Goeb und Kollegen (Goeb et al., 2007) (s. diese Arbeit, Abschnitt 2.4.2) gestattet die nichtuniforme Reinterpretation von ambigen Symbolen des öffentlichen Vokabulars; d.h. manche Vorkommnisse eines ambigen Symbols in einer Ontologie werden durch neue Symbole ersetzt, andere bleiben in ihrer ursprünglichen Form erhalten. Diese Form der Reinterpretation führt dazu, dass nur Teile der Empfänger- und Senderontologie, aber keines der beiden integrierten Ontologien als Ganzes im Integrationsresultat konserviert werden und aus dem Integrationsresultat rekonstruiert werden können.

Im Unterschied zu dem hier entwickelten Reinterpretationsansatz findet keine Form von Terminologieadaption statt; Teile der Empfänger- und der Senderontologie, die für Konflikte verantwortlich sind, werden gleichermaßen internalisiert. Dabei ist durch eine differenzierte Namensgebung eindeutig zu rekonstruieren, welche Teile welcher Ontologie entstammen. Neben den öffentlichen Symbolen s, die an Konflikten beteiligt sind, werden somit ein internes Symbol für das s-Konzept des Empfängers und ein internes Symbol für das s-Konzepte des Senders eingeführt. Das öffentliche Symbol s steht für den kleinsten gemeinsamen Nenner des empfängerseitigen und des senderseitigen s-Konzepts.

Der Integrationsoperator von Goeb und Kollegen ist hochgradig syntaxsensitiv und daher ganz allgemein für die Integration von Ontologien (nicht nur in dem hier vorausgesetzten Integrationsszenario) ungeeignet.

Beobachtung 3.30. *Der (algorithmisch beschriebene) Integrationsoperator von Goeb und Kollegen (Goeb et al., 2007) erfüllt (Reint 2), (Reint 3) und (Reint 7), aber im Allgemeinen nicht (Reint 1a), (Reint 1b), (Reint# 4a), (Reint# 4b), (Reint# 5a), (Reint# 5b), (Reint# 6a) und (Reint# 6b) (und folglich auch nicht die korrespondierenden unmarkierten Varianten).*

Die Gemeinsamkeit des hier entwickelten Reinterpretationsansatzes mit dem Ansatz von Qi und Kollegen (Qi et al., 2006) (s. diese Arbeit, Abschnitt 2.3.4) besteht in der Nutzung des Abschwächungskonzepts und wurde bereits für die starken Operatoren für triggernde konzeptbasierte Literale $\odot_2$ diskutiert (s. S. 78). Die

Ansätze benutzen jedoch unterschiedliche Konzepte der Abschwächung; der hier entwickelte Reinterpretationsansatz beinhaltet die Abschwächung von atomaren Konzepten und implizit eine kompositionale Abschwächung von komplexen Konzepten; der Ansatz von Qi und Kollegen hingegen beinhaltet eine Abschwächung von ganzen TBox-Axiomen und ABox-Axiomen und nur implizit eine nichtkompositionale Abschwächung von komplexen Konzeptbeschreibungen, die sich nicht zwingend auf atomare Konzept überträgt.

Die auf Abschwächungen von Axiomen aufsetzenden Revisionsoperatoren $\circ_w$, $\circ_{rw}$ von Qi und Kollegen können nur die Konservierung (und Rekonstruierbarkeit) der zweiten Ontologie garantieren, nicht jedoch die der ersten Ontologie. Zudem sind die Operatoren $\circ_w, \circ_{rw}$ von der syntaktischen Form, in der die erste Ontologie repräsentiert ist, abhängig und daher ebenfalls für die Integration von Ontologien ungeeignet.

Beobachtung 3.31. *Die Operator $\circ_w$ bzw. der Operator $\circ_{rw}$ von Qi und Kollegen (Qi et al., 2006) erfüllt (Reint 1b), (Reint 2), (Reint$^{\#}$ 3), (Reint 4b), (Reint 5b), (Reint 6b) und (Reint 7), aber im Allgemeinen nicht (Reint$^{\#}$ 1a), (Reint$^{\#}$ 5a) und (Reint$^{\#}$ 6a) (und folglich auch nicht die korrespondierenden unmarkierten Varianten).*

Die Konfliktauflösung durch $\circ_w, \circ_{rw}$ ist nicht terminologieorientiert: ihre Anwendung kann zur Abschwächung auch solcher Sätze in der Empfängerontologie führen, in denen kein Symbol enthalten ist, das in einen Konflikt involviert ist. Daher erfüllen $\circ_w, \circ_{rw}$ wie auch die Operatoren von Delgrande und Schaub ein stärkeres Konsistenzpostulat, das nicht auf die Bedingung der Reinterpretationskompatibilität zurückgreift.

4 Vokabular und Hypothesenrevision

Kernstück der Reinterpretation ist die Anpassung von Hypothesen über semantische Beziehungen zwischen Symbolen der Empfänger- und Senderontologie. Für die schwachen Reinterpretationsoperatoren $\otimes_i^{\overline{\gamma}}$ bilden Brückenaxiome der Form $s \sqsubseteq s'$ bzw. $s' \sqsubseteq s$ die Menge an Hypothesen zur semantischen Beziehung zwischen s und s'. Der Empfänger startet mit einer solchen Menge von Hypothesen und verändert diese Menge mittels $\otimes_i^{\overline{\gamma}}$ derart, dass sie mit den zu integrierenden Anteilen der Senderontologie kompatibel ist. Die Empfänger- und die Senderontologie bilden die Basis, auf deren Grundlage die Hypothesen angepasst werden; die Ontologien werden nicht verändert, allenfalls durch Substitution in einen anderen Namensraum übertragen.

Die Beobachtung, dass es eigentlich Hypothesen über semantische Beziehungen sind, die angepasst/geändert werden, lässt sich formal genau erfassen: Reinterpretationsoperatoren lassen sich darstellen als klassische Revisionsoperatoren, die als linkes Argument eine initiale Menge von Hypothesen erhalten. Durch geeignete Wahl der initialen Menge von Hypothesen ist es möglich, verschiedene Reinterpretationsoperatoren als Revision von Hypothesenmengen darzustellen. In Abschnitt 4.2 wird die Darstellbarkeit als klassische Revision von Hypothesen für die schwachen Operatoren $\otimes_i^{\overline{\gamma}}$, für die starken Operatoren $\odot_i$ für triggernde (konzeptbasierte) Literale und für die Operatoren $\dot{+}, \dot{+}_c$ von Delgrande und Schaub (2003) bewiesen. Das Konstruktionsschema für die Darstellbarkeit als Revision von Hypothesen ist in allen Fällen ähnlich. Gegeben sind ein Reinterpretationsoperator $\circ_i$ des Typs $i \in \{1, 2\}$, eine Menge O_1 von Axiomen der Empfängerontologie, eine Menge O_2 von Axiomen der Senderontologie und eine Substitution σ. In den

Darstellbarkeitsaussagen werden eine Menge von Brückenaxiomen BA, ein klassischer Revisionsoperator $*$ und ein Abschlussoperator Abl definiert, so dass sich die Reinterpretationsoperatoren bezogen auf den Abschlussoperator Abl äquivalent darstellen lassen als $*$-Revision der Brückenaxiome BA mit den entkoppelten Ontologien.

$$\begin{aligned}\mathrm{Abl}(O_1 \circ_1 O_2) &= \mathrm{Abl}(\mathrm{BA} * (O_1 \cup O_2\sigma))\\ \mathrm{Abl}(O_1 \circ_2 O_2) &= \mathrm{Abl}(\mathrm{BA} * (O_1\sigma \cup O_2))\end{aligned}$$

Da die Brückenaxiome Hypothesen über semantische Beziehungen sind, enthalten sie neben den Symbolen der öffentlichen Sprache auch solche Symbole, die für die interne Repräsentation von Konzepten, Rollen und Individuen der Empfänger- bzw. Senderontologie benutzt werden. Die dadurch bedingte Vokabulardynamik der Reinterpretationsoperatoren ist der klassischen Belief-Revision fremd: Klassische Belief-Revisionsoperatoren überführen Satzmengen eines Vokabulars in andere Satzmengen desselben Vokabulars. Um den Bezug zu klassischen Belief-Revisionsoperatoren wieder herzustellen, kann eine Einschränkung der Reinterpretationsoperatoren $\circ$ auf die öffentliche Sprache vorgenommen werden. Im folgenden Abschnitt 4.1 wird gezeigt, wie diese Einschränkung im Detail aussieht und welche Eigenschaften die resultierenden Operatoren $\circ^{\mathcal{V}_c}$ haben.

4.1 Das Vokabular in der Reinterpretation

4.1.1 Der Interfaceanteil von Reinterpretationsoperatoren

Im Verlauf der Reinterpretation werden in die Ontologie des Empfängers neue Symbole eingeführt, die als nichtöffentliche oder interne Symbole verstanden werden können. Die Symbole der ursprünglichen Empfängerontologie sind öffentlich; sie bilden die Schnittstelle, über die – aus der Perspektive des Empfängers gesprochen – mit anderen Agenten kommuniziert wird. Die durch die Einführung neuer Symbole bedingte Vokabulardynamik ist ein wesentliches Merkmal der Reinterpretationsoperatoren, die sie von den klassischen Revisionsoperatoren unterscheidet. Schränkt man die Reinterpretationsoperatoren auf die öffentliche Sprache (Interfacesprache) ein, ergeben sich Operatoren, die mit klassischen Belief-Revisionsoperatoren verglichen und deren Verhalten durch klassische Postulate beschrieben werden können.

In Abschnitt 3.1 wurden die klassischen Revisionspostulate auf das Integrationsszenario angepasst. Deutlich wird die Anpassung am Inklusionspostulat, das sich in der adaptierten Form (Reint 3) explizit auf das öffentliche Vokabular $\mathcal{V}_c$ bezieht: $(O_1 \circ O_2) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O_1)) \subseteq O_1 \cup O_2$ (vgl. S. 68). In diesem Abschnitt

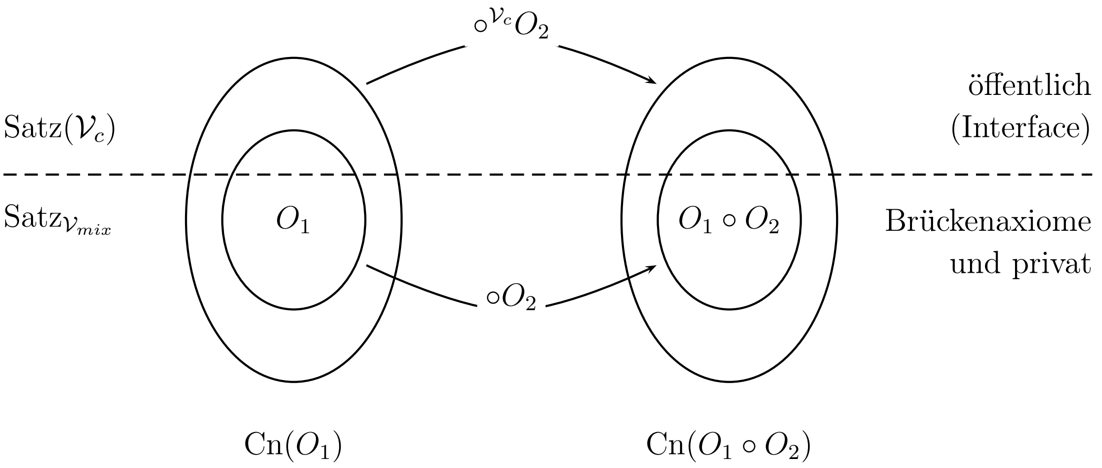


Abbildung 4.1: Partitionierung von Reinterpretationsoperatoren

werden die Belief-Revisionstechniken auf eine andere Weise auf das Integrationsszenario angepasst. Zu jedem Reinterpretationsoperator lässt sich ein neuer Operator, der Interfaceoperator $\circ^{\mathcal{V}_c}$, definieren. Dieser ist insofern ein „klassischer“ Operator, als er Mengen von Ontologieaxiomen über dem öffentlichen Vokabular auf Mengen von Ontologieaxiomen (wieder) über dem öffentlichen Vokabular abbildet. Die Eigenschaften von $\circ^{\mathcal{V}_c}$ lassen sich dadurch bestimmen, dass man $\circ^{\mathcal{V}_c}$ auf die Erfüllung klassischer Belief-Revisionspostulate prüft. Z.B. kann jetzt $\circ^{\mathcal{V}_c}$ darauf hin getestet werden, ob es das klassische Inklusionspostulat und nicht nur die adaptierte Variante erfüllt.

Die Einführung neuer Symbole induziert eine Partitionierung der Axiome der Empfängerontologie und des Resultats, die Abbildung 4.1 veranschaulicht. Ausgangspunkt für die Partitionierung sind ein zweistelliger Reinterpretationsoperator $\circ$, disjunkte Vokabulare $\mathcal{V}_c$ (öffentliches Vokabular) und $\mathcal{V}_i$ (nichtöffentliches Vokabular der Empfängerontologie) sowie zwei Ontologien $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i' \rangle$. Da Empfänger und Sender in der öffentlichen Sprache $\mathcal{V}_c$ kommunizieren, ist die Menge der internen Symbole vom Sender, $\mathcal{V}_i'$, für das Integrationsszenario irrelevant und kann – wie auch auch bisher geschehen – der Einfachheit halber auf die leere Menge gesetzt werden, $\mathcal{V}_i' = \emptyset$.

Die in der Empfängerontologie geltenden Interfacesätze lassen sich durch die Menge $\mathrm{Cn}(O_1) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$ beschreiben und die im Integrationsresultat geltenden Interfacesätze durch die Menge $\mathrm{Cn}(O_1 \circ O_2) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$.[1] In der Abbildung 4.1

[1]Um die in einer Ontologie geltenden Interfacesätze zu beschreiben, ist es nicht ausreichend, $O \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$ zu betrachten, weil $O \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$ nicht die Menge der aus O folgerbaren Interfacesätze

entsprechen die Interfaceanteile den über der gestrichelten Linie liegenden Abschnitten der äußeren Ellipsen. Die Ellipsenabschnitte unter der gestrichelten Linie stellen den Anteil der Ontologieabschlüsse dar, die aus Sätzen mit mindestens einem internen Symbol bestehen, $\mathrm{Satz}_{\mathcal{V}_{mix}} = \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i) \setminus \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$. Die Sätze in $\mathrm{Satz}_{\mathcal{V}_{mix}}$ enthalten die Brückenaxiome und die rein im internen Vokabular formulierten Sätze.

Da im Folgenden die obige Konstruktion der Abschlussbildung und anschließendem Schnitt mit der Menge aller Sätze eines Teilvokabulars $\mathcal{V}$ häufiger verwendet wird, kürze ich die Konstruktion durch einen Operator $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}}$ ab.

Definition 4.1. Cn bezeichne einen klassischen Folgerungsoperator über dem Vokabular $\mathcal{V} \cup \mathcal{V}'$. Sei O eine aussagenlogische Satzmenge (oder ein Satz) mit $\mathcal{V}(O) \subseteq \mathcal{V} \cup \mathcal{V}'$. Dann sei

$$\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}}(O) = \mathrm{Cn}(O) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$$

Die Satzmenge $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}}(O)$ enthält alle aus O folgenden Aussagen, deren nichtlogische Symbole in $\mathcal{V}$ enthalten sind. Man beachte, dass $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}}$ kein Folgerungsoperator gemäß Definition 2.1 (S. 16) ist, da er z.B. nicht die Inklusionseigenschaft erfüllt.

Die Änderung in der Menge an Interfacesätzen, welche der Reinterpretationsoperator $\circ$ induziert, ist als Abbildung von $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1)$ auf $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1 \circ O_2)$ darstellbar. Diese Abbildung soll durch einen Operator $\circ^{\mathcal{V}_c}$ repräsentiert werden. Bei fest vorgegebenem O_1 und beliebigem O_2 kann $\circ^{\mathcal{V}_c}$ als ein Operator für $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}$ verstanden werden, der definiert wird über:

$$\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1) \circ^{\mathcal{V}_c} O_2 = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1 \circ O_2) \tag{4.1}$$

Da der Reintepretationsoperator $\circ^{\mathcal{V}_c}$ von O_1 abhängt, müsste er korrekterweise mit $\circ^{\mathcal{V}_c}_{O_1}$ bezeichnet werden. Der Übersichtlichkeit wegen werde ich weiterhin $\circ^{\mathcal{V}_c}$ verwenden.

Die Abhängigkeit des Operators $\circ^{\mathcal{V}_c}$ von O_1 hat insbesondere zur Folge, dass iterierbare Reinterpretationsoperatoren $\circ$ nicht zwingend einen iterierbaren Operator $\circ^{\mathcal{V}_c}$ induzieren. Sei $A = \langle \alpha_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ eine Sequenz von (konzeptbasierten) Literalen oder Ontologien, die in O zu integrieren sind, und sei $O^i = O \circ A^i$ das Resultat der Integration des i-Präfixes A^i. Dann ist im Allgemeinen für jeden Revisionsschritt von O^i nach $O^{i+1} = O \circ \alpha_{i+1}$ ein neuer Interfaceoperator $\circ^{\mathcal{V}_c}_{O^i}$ für die Ontologie O_i zu definieren.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, einem Reinterpretationsoperator $\circ$ eindeutig einen iterierbaren Operator $\circ^{\mathcal{V}_c}$ zuzuordnen, ist die Invarianz

axiomatisiert. Ist z.B. für $K \in \mathcal{V}_c, K' \in \mathcal{V}_i$ die Menge der empfängerseitigen Ontologieaxiome durch $O_1 = \{(K \sqcap K')(a)\}$ gegeben, dann ist $K(a)$ ein aus O_1 folgender Interfacesatz, der nicht in $O_1 \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c) = \emptyset$ vorkommt.

der Interfaceanteile von Ontologien unter dem Reinterpretationsoperator $\circ$: Wenn die $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}$-Abschlüsse zweier Mengen O und O' gleich sind, $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O')$, dann sind auch die $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}$-Abschlüsse der Integrationsresultate mit demselben Literal α gleich, $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1 \circ \alpha) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O' \circ \alpha)$. Genau dann, wenn diese Beziehung gilt, liefert Gleichung 4.1 eine korrekte Definition eines Interfaceoperators, der auf beliebige (Interface-Abschlüsse von) Mengen von Ontologienaxiomen $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O)$ als linkem Argument angewandt werden kann.

Für die schwachen, aussagenlogischen Operatoren (über triggernde Literale) $\otimes_i$ gilt die Invarianz der Interfaceanteile. Sie besagt, dass die Dynamik des Interfaceanteils der schwachen Operatoren unabhängig ist von den Sätzen, die auch mit dem internen Symbolen formulierbar sind.

Beobachtung 4.2. *Für aussagenlogische schwache Operatoren $\otimes_i$, Ontologien $\langle O, \mathcal{V}_i, \mathcal{V}_c\rangle$ und $\langle O', \mathcal{V}_i, \mathcal{V}_c\rangle$ sowie aussagenlogische Literale α gilt:*
Wenn $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O')$, dann gilt auch $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O \otimes_i \alpha) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O' \otimes_i \alpha)$.

Beweis. Siehe S. 255.

Für die iterierbaren, starken Operatoren $\circ = \odot_i$ ist die Invarianz der Interfaceanteile nicht erfüllt, wie das folgende Gegenbeispiel veranschaulicht. Der Grund ist, dass die internen Symbole im spezifischsten Konzept vorkommen können.

Beispiel 4.3. Es seien $\mathcal{V}_c = \{a, b, K\}$ und $\mathcal{V}_i = \{L', K'\}$. Die Mengen von Ontologieaxiomen O_1 und O_1' unterscheiden sich nur bezüglich des internen Vokabulars, also gilt $\mathrm{Cn}(O_1) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c) = \mathrm{Cn}(O_1') \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$. Da in O_1 die spezifischsten Konzepte von a und b kompatibel, in O_1' jedoch inkompatibel sind, führt das zu unterschiedlichen Interfaceanteilen des Integrationsresultats bzgl. $\odot_2$.

$$\begin{array}{rcl} O_1 & = & \{L'(b), L'(a), \neg K(a), \neg K(b)\} \\ O_1' & = & \{\neg L'(b), L'(a), \neg K(a), \neg K(b)\} \\ O_1 \odot_2 K(a) & \not\models & \neg K(b) \\ O_1' \odot_2 K(a) & \models & \neg K(b) \end{array}$$

Um die Eigenschaften der Operatoren $\circ^{\mathcal{V}_c}$ durch klassische Postulate zu charakterisieren, ist die folgende Beobachtung über den Operator $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}}$ nützlich. Gemäß Beobachtung 4.4 ist die Menge $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}}(O) = \mathrm{Cn}(O) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$ bzgl. des zu ihrem Namensraum $\mathcal{V}$ gehörenden klassischen Tarskischen Folgerungsoperators $\mathrm{Cn}_{\mathcal{V}} : \mathrm{Pot}(\mathrm{Satz}(\mathcal{V})) \longrightarrow \mathrm{Pot}(\mathrm{Satz}(\mathcal{V}))$ abgeschlossen.

Beobachtung 4.4. *Sei $\mathrm{Cn} = \mathrm{Cn}_{\mathcal{V}\cup\mathcal{V}'}$ der klassische aussagenlogische Folgerungsoperator für das Vokabular $\mathcal{V} \cup \mathcal{V}'$, $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}} = \mathrm{Cn}(O) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$ und sei $\mathrm{Cn}_{\mathcal{V}}$ der klassische aussagenlogische Folgerungsoperator für das Vokabular $\mathcal{V}$. Dann gilt für alle Satzmengen $O \subseteq \mathrm{Satz}(\mathcal{V} \cup \mathcal{V}')$:*

$$\mathrm{Cn}_{\mathcal{V}}(\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}}(O)) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}}(O)$$

Beweis. Siehe S. 256.

Aus der Beobachtung 4.4 folgt, dass die Einschränkungen der logischen Abschlüsse der Ontologie O_1 und $O_1 \circ O_2$ auf die öffentliche Sprache Belief-Sets über dem Interfacesprachraum sind und aus diesem Grunde $\circ^{\mathcal{V}_c}$ als Belief-Set-Operator verstanden werden muss, der darauf getestet werden kann, welche der AGM-Postulate er erfüllt.

Da Typ-1-Operatoren die Terminologie der Empfängerontologie $\mathcal{O}_1$ beibehalten (es wird das Monotoniepostulat, nicht jedoch das Erfolgspostulat erfüllt), führt die Reinterpretation zu einer monotonen Erweiterung der Menge aller Sätze in der Interfacesprache: $O \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c) \subseteq (O \circ A) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$. Für Typ-2-Operatoren ergibt sich, da sie nicht das Monotoniepostulat erfüllen, ein nicht-monotones Verhalten. Daher werden die Einschränkungen $\circ_2^{\mathcal{V}_c}$ der Typ-2-Operatoren auf die Interfacesprache mit den klassischen Belief-Revisionsoperatoren, die das Erfolgspostulat, aber nicht das Monotoniepostulat erfüllen, verglichen.

Die folgende Beobachtung hält fest, welche der auf multiple Revision adaptierten AGM-Postulate (S. 33) von $\otimes_2^{\mathcal{V}_c}$ erfüllt werden.

Beobachtung 4.5. *Seien $\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i$ ein öffentliches bzw. privates Vokabular, $\Phi \in \mathrm{Ear}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$ ein Disambiguierungsschema, $\overline{\gamma} = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ ein Paar von Selektionsfunktionen und $\otimes_2 = \otimes_2^{\Phi,\overline{\gamma}}$ ein schwacher aussagenlogischer oder prädikatenlogischer Reinterpretationsoperator des Typs 2 bzgl. Φ und $\overline{\gamma}$. Dann erfüllt $\otimes_2^{\mathcal{V}_c}$ die Postulate (MR 1)–(MR 4) und (MR 6), aber im Allgemeinen nicht (MR 5), (MR 7) und (MR 8).*
Ist $\otimes_2^{\mathcal{V}_c}$ ein aussagenlogischer Operator, dann erfüllt er folgende Abschwächung des Konsistenzpostulats: Wenn $B_1 \otimes_2^{\mathcal{V}_c} B_2 \vdash_{\mathrm{Cn}} \perp$, dann $B_1 \vdash_{\mathrm{Cn}} \perp$ oder $B_2 \vdash_{\mathrm{Cn}} \perp$. Ist $\otimes_2^{\mathcal{V}_c}$ ein prädikatenlogischer Operator, dann erfüllt er das abgeschwächte Konsistenzpostulat (Reint 7) (S. 71).

Beweis. Siehe S. 256.

In den Beobachtungen 4.2 und 4.5 bleiben die Reinterpretationsoperatoren, die als Argumente beschreibungslogische Ontologien erhalten, bewusst unerwähnt. Der Grund ist, dass $\circ^{\mathcal{V}_c}$ für beschreibungslogische Ontologien im Allgemeinen nicht als Revisionsoperator verstanden werden kann. Wegen der eingeschränkten Ausdrucksmächtigkeit von Beschreibungslogiken haben die internen Symbole eine tragende Rolle und können im Reinterpretationsprozess nicht vernachlässigt werden. Zur Illustration sei angenommen, dass die Ontologien in der Beschreibungslogik $\mathcal{ALC}$ repräsentiert sind.[2] Der Operator $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\cdot)$ bildet unter dieser Voraussetzung den Abschluss bzgl. aller in $\mathcal{ALC}$ formulierbaren TBox- und ABox-Axiome. Es sei eine Menge von Ontologieaxiomen $O_1 = \{K(c')\}$ gegeben, die aus einem einzigen

[2] Vgl. Tabelle A.1, S. 227 in Anhang A.

ABox-Axiom $K(c')$ besteht. Dabei ist c' eine Konstante aus dem internen Vokabular $\mathcal{V}_i$. Der Trigger sei $O_2 = \{K \sqsubseteq \bot\}$. Er besagt, dass das Konzept K leer ist. O_1 und O_2 sind widersprüchlich, daher wird z.B. die Anwendung des schwachen Reinterpretationsoperators für triggernde Ontologien $\otimes_2^{\overline{\gamma}}$ als resultierende Menge von Ontologieaxiomen eine zu $O_{res} = \{K'(c'), K \sqsubseteq \bot\}$ äquivalente Menge ergeben. Für den Interfaceoperator $(\otimes_2^{\overline{\gamma}})^{\mathcal{V}_c}$ gilt damit folgende Zuordnung:

$$\langle \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(K(c')), \{K \sqsubseteq \bot\}\rangle \mapsto \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\{K'(c'), K \sqsubseteq \bot\})$$

Die Menge $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(K(c'))$ enthält jedoch keinen Widerspruch zu $\{K \sqsubseteq \bot\}$, da sich der prädikatenlogische Satz $\exists x K(x)$, der aus $K(c')$ folgt, nicht in $\mathcal{ALC}$ formulieren lässt. Daher müsste $(\otimes_2^{\overline{\gamma}})^{\mathcal{V}_c}$ als Revisionsoperator, der das Postulat zur Vakuität erfüllt, die Zuordnung

$$\langle \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(K(c')), \{K \sqsubseteq \bot\}\rangle \mapsto \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(K(c')) \cup \{K \sqsubseteq \bot\}$$

oder – wenn das Resultat abgeschlossen sein soll – die Zuordnung

$$\langle \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(K(c')), \{K \sqsubseteq \bot\}\rangle \mapsto \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(K(c')) \cup \{K \sqsubseteq \bot\})$$

liefern.

4.1.2 Endliche Repräsentation der Interfacesätze

Der vorhergehende Abschnitt hat die Dynamik in der Menge der Interfacesätze (Sätze über dem öffentlichen Vokabular $\mathcal{V}_c$) durch einen Operator $\circ^{\mathcal{V}_c}$ beschrieben, der sich explizit auf einen Reinterpretationsoperator $\circ$ und eine Menge O_1 bezieht, in der interne Symbole vorkommen können. Aufgrund dieser Bezüge ist $\circ^{\mathcal{V}_c}$ kein Operator, der rein auf der Interfaceebene operiert. Gewünscht ist daher eine neue Beschreibung von $\circ^{\mathcal{V}_c}$, die als linkes Argument eine Ontologie erhält, welche keine Bezüge zu internen Symbolen enthält. Der in der Definition von $\circ^{\mathcal{V}_c}$ vorgenommene Bezug zu den internen Symbolen kann dahingehend reduziert werden, dass die endliche Repräsentierbarkeit aller vom Reinterpretationsresultat ableitbaren Interfacesätze durch einen einzelnen Interfacesatz gezeigt wird. Tatsächlich lässt sich zeigen, dass für jede endliche aussagenlogische Satzmenge O mit $\mathcal{V}(O) \subseteq \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i$ ein Satz α existiert, der keine internen Symbole enthält und alle folgerbaren Sätze aus O im öffentlichen Vokabular $\mathcal{V}_c$ impliziert. In Formeln: Es gibt ein α mit $\mathcal{V}(\alpha) \subseteq \mathcal{V}_c$, so dass $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\alpha)$. Dieser Sachverhalt zeigt, dass für aussagenlogische Wissensbasen keine internen Symbolen benutzt werden müssen, um die Änderung der Interfacesätze zu beschreiben. Für prädikatenlogische (und wie bereits gesehen für beschreibungslogische) Wissensbasen ist eine endliche Repräsentation nicht möglich.

Endliche Repräsentation für aussagenlogische Formeln

In diesem Abschnitt wird die endliche Repräsentation für aussagenlogische Formeln formuliert und bewiesen. Anschließend wird gezeigt, dass eine entsprechende Repräsentation für prädikatenlogische Wissensbasen nicht möglich ist. Für die Aussagenlogik werden zwei Operatoren θ_S und θ'_S definiert, die beide einem Satz α einen neuen Satz zuordnen, welcher alle Sätze axiomatisiert, die aus α folgen und keines der Symbole aus S enthalten. Während θ_S eine Umformung des Arguments in DNF erfordert, kommt θ'_S ohne eine vorgeschaltete Umformung in disjunktive Normalform (DNF)[3] aus und ist daher auch, falls die zu Grunde liegende Symbolmenge S klein ist, berechnungstechnisch günstiger. Außerdem werde ich in Abschnitt 4.2 den θ'_S-Operator zum Vergleich mit dem Ansatz von Delgrande und Schaub (2003) verwenden.

Definition 4.6. Sei α eine aussagenlogische Formel, DNF(α) eine zu α äquivalente Formel in Klauseldarstellung und S eine beliebige Symbolmenge. Dann entsteht $\theta_S(\alpha)$ aus DNF(α), indem in DNF(α) in allen dualen Klauseln alle Vorkommnisse von Symbolen aus S durch die logische Konstante $\top$ ersetzt werden.

Das folgende Beispiel illustriert die Definition an einem einfachen Beispiel.

Beispiel 4.7. Sei $\alpha = (p \wedge q) \vee (r \wedge s)$. α ist bereits in DNF. Daher sind nur noch die Symbole in S zu eliminieren und es ergeben sich z.B.

$$\begin{aligned}
\theta_{\{s\}}(\alpha) &= (p \wedge q) \vee (r \wedge \top) \equiv (p \wedge q) \vee r \\
\theta_{\{s,r\}}(\alpha) &= (p \wedge q) \vee (\top \wedge \top) \equiv \top \\
\theta_{\{p,r\}}(\alpha) &= (\top \wedge q) \vee (\top \wedge s) \equiv q \vee s
\end{aligned}$$

Die Definition von θ'_S beruht auf der Ersetzung von Symbolen S durch Wahrheitswertbelegungen[4]. Für eine Menge S von Aussagensymbolen bezeichne

$$\mathrm{Int}(S) = \{\mathcal{I} \mid \mathcal{I} : S \longrightarrow \{0,1\}\}$$

die Menge aller Belegungen (Interpretationen) von Aussagensymbolen aus S mit einem der Werte 0 oder 1. Sei α eine aussagenlogische Formel. Ist eine Belegung $\mathcal{I} \in \mathrm{Int}(S)$ gegeben, so wird eine neue Formel $\alpha_{\mathcal{I}}$ wie folgt definiert: Für alle Vorkommnisse von $p \in S$ in α wird $\top$ eingesetzt, falls $p^{\mathcal{I}} = \mathcal{I}(p) = 1$, ansonsten wird $\perp$ für alle Vorkommnisse von p eingesetzt.

Beispiel 4.8. Ist $\alpha = (p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ und die Symbolmenge $S = \{p, r\}$ sowie die Belegung $\mathcal{I} \in \mathrm{Int}(S)$ mit $\mathcal{I} : p \mapsto 1$, $\mathcal{I} : r \mapsto 0$ gegeben, dann ist $\alpha_{\mathcal{I}} = (\top \wedge q) \vee (\perp \wedge s)$.

[3] Vgl. Anhang A, Definition A.23, S. 239.
[4] Vgl. Anhang A, S. 231.

Für eine Symbolmenge S und eine Formel α resultiert die Anwendung von θ'_S in einer neuen Formel $\theta'_S(\alpha)$, die als Disjunktion über alle $\alpha_{\mathcal{I}}$ mit Wahrheitswertbelegung $\mathcal{I} \in \mathrm{Int}(S)$ definiert wird.

Definition 4.9. Es sei α eine aussagenlogische Formel und $S \subseteq \mathcal{V}(\alpha)$. Dann werde definiert

$$\theta'_S : \alpha \mapsto \bigvee_{\mathcal{I} \in \mathrm{Int}(S)} \alpha_{\mathcal{I}}$$

Für beliebige Symbolmengen S wird $\theta'_S(\alpha) = \theta'_{\mathcal{V}(\alpha) \cap S}(\alpha)$ gesetzt.

Für die Operatoren θ_S und θ'_S gilt folgende Beziehung.

Beobachtung 4.10.

$$\alpha \models \theta_S(\alpha) \text{ und } \alpha \models \theta'_S(\alpha)$$

Beweis. Siehe S. 258.

Die wichtige Eigenschaft der Repräsentierbarkeit, die mittels der Operatoren θ_S, θ'_S gezeigt werden kann, ist in der folgenden Beobachtung 4.11 festgehalten. Sie zeigt, wie man zu einer aussagenlogischen Formel α eine neue Formel konstruiert, die genau dieselben aussagenlogischen Formeln bzgl. der Menge $\mathcal{V} \setminus S$ von Aussagensymbolen impliziert und zusätzlich keines der Aussagensymbole aus S enthält.

Beobachtung 4.11. *Sei $\mathcal{V}$ eine Menge von Aussagensymbolen und $S \subseteq \mathcal{V}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{V}$. Dann gilt für alle aussagenlogischen Formeln α über $\mathcal{V}$ und $\tilde{\theta}_S \in \{\theta_S, \theta'_S\}$:*

$$\mathrm{Cn}^{\mathcal{V} \setminus S}(\alpha) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V} \setminus S}(\tilde{\theta}_S(\alpha))$$

Beweis. Siehe S. 258.

Aus den Beobachtungen 4.10 und 4.11 folgt insbesondere, dass $\theta_S(\alpha)$ und $\theta'_S(\alpha)$ logisch äquivalent sind.

Korollar 4.12. $\theta_S(\alpha) \equiv \theta'_S(\alpha)$.

Beweis. Siehe S. 259.

Wegen Beobachtung 4.11 eignet sich der Operator $\tilde{\theta}_S$ ($\tilde{\theta}_S \in \{\theta_S, \theta'_S\}$) dazu, die Dynamik in der Menge der öffentlichen Sätze im Verlauf einer Reinterpretation zu beschreiben. Gegeben seien ein zweistelliger Reinterpretationsoperator $\circ$, disjunkte Vokabulare $\mathcal{V}_c$ (öffentliches Vokabular) und $\mathcal{V}_i$ (nichtöffentliches Vokabular (der Empfängerontologie)) sowie zwei Ontologien $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und $\mathcal{O}_2 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}'_i \rangle$. Dann können die Menge der aus O_1 folgerbaren Interfacesätze durch den Interfacesatz $\theta_{\mathcal{V}_i}(O_1)$ und die Menge der aus dem Reinterpretationsresultat folgerbaren Interfacesätze durch $\theta_{\mathcal{V}_i}(O_1 \circ O_2)$ repräsentiert werden. Die

Einschränkung $\circ^{\mathcal{V}_c}$ des Reinterpretationsoperators auf die Interfacesprache lässt sich daher durch eine Funktion beschreiben, die den Satz $\theta_{\mathcal{V}_i}(O_1)$ auf den Satz $\theta_{\mathcal{V}_i}(O_1 \circ O_2)$ abbildet.

Keine endliche Repräsentierbarkeit für Prädikatenlogik

Die endliche Repräsentierbarkeit für prädikatenlogische Formeln gilt nicht. Das zeigt folgendes Beispiel:

Beispiel 4.13. Sei $\alpha = \forall x \forall y \big((P'(y) \vee Q(x)) \wedge (\neg P'(f(y)) \vee Q(y))\big)$, $P' \in \mathcal{V}_i$. Die Menge $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\alpha)$ enthält u.a. die unendliche Menge $\{\forall x (Q(f^n(x)) \vee \neg Q(x)) \mid n \geq 1\}$ und ist daher nicht durch einen Satz über $\mathcal{V}_c$ axiomatisierbar.

4.1.3 Das Vokabular in der Belief-Revision

Wie die vorangegangenen Abschnitte gezeigt haben, lassen sich aus Reinterpretationsoperatoren $\circ$ Teiloperatoren $\circ^{\mathcal{V}}$ definieren, die nur die Änderung in der Menge an Sätzen Satz($\mathcal{V}$) bzgl. eines Vokabulars $\mathcal{V}$ beschreiben. Das Resultat ist ein Paar von Operatoren $\langle \circ, \circ^{\mathcal{V}} \rangle$, in dem die rechte Komponente $\circ^{\mathcal{V}}$ als Einschränkung von $\circ$ auf das Vokabular $\mathcal{V}$ verstanden werden kann. Ein ähnliches Paar von Operatoren findet sich in den Arbeiten zum Relevanzkriterium (Parikh, 1999; Chopra und Parikh, 2000; Chopra et al., 2001; Makinson und Kourousias, 2007).[5] Motiviert ist das Relevanzkriterium durch die Beobachtung, dass so genannte gedächtnislose Revisionsoperatoren definiert werden können, die zwar die AGM-Basispostulate erfüllen, aber zu viele Sätze des ursprünglichen Belief-Sets löschen. Der im Folgenden definierte Operator $*$ für Belief-Sets BS erfüllt die AGM-Basispostulate (AGM-R 1)–(AGM-R 6) ist jedoch hochgradig gedächtnislos, da er im interessierenden Inkonsistenzfall das Belief-Set BS vollständig löscht.

$$BS * \alpha = \begin{cases} \mathrm{Cn}(BS \cup \{\alpha\}) & \text{falls } BS \cup \{\alpha\} \text{ konsistent ist} \\ \mathrm{Cn}(\alpha) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Idee der relevanzsensitiven Revision ist es, alle für die Inkonsistenz irrelevanten Aussagen der ursprünglichen Wissensbasis anhand der in ihnen enthaltenen Symbole zu bestimmen und deren Konservierung im Revisionsresultat zu fordern. Die Definition der relevanzsensitiven Operatoren im Aufsatz von Parikh (1999) basiert auf der Idee, eine Revision nur für den Vokabularanteil durchzuführen, der für den Trigger relevant ist. Zur Beschreibung des Konstruktionsmusters seien ein Belief-Set BS und ein Satz α über einem Vokabular $\mathcal{V}$ gegeben. Im Konsistenzfall

[5] Eine ausführlichere Besprechung des Relevanzkriteriums werde ich im Kapitel 5 geben. In diesem Abschnitt wird nur der Vokabularaspekt herausgearbeitet.

wird die Wissensbasis mit der neuen Information expandiert und logisch abgeschlossen. Im Inkonsistenzfall wird zunächst das kleinste Vokabular $\mathcal{V}_\alpha$ gebildet, in dem sich der Trigger α formulieren lässt. (Es lässt sich zeigen, dass ein solches kleinstes Vokabular existiert.) Dieses Vokabular wird erweitert zu einem Vokabular $\mathcal{V}_\alpha^{BS}$, so dass BS aufgespalten werden kann durch $\{\mathcal{V}_\alpha^{BS}, \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_\alpha^{BS}\}$. D.h. BS wird aufgeteilt in zwei Mengen BS_1 und BS_2 über den Vokabularen $\mathcal{V}_\alpha^{BS}$ und $\mathcal{V}\setminus\mathcal{V}_\alpha^{BS}$, so dass BS äquivalent ist zur Vereinigung von BS_1 und BS_2, $BS = \mathrm{Cn}(BS_1 \cup BS_2)$. Dabei sind BS_1 und BS_2 bis auf logische Äquivalenz eindeutig bestimmt. BS_1 beschreibt den Anteil des ursprünglichen Belief-Sets, der für α relevant ist, und BS_2 beschreibt den Anteil von BS, der für α irrelevant ist. Vorausgesetzt wird ein nicht näher spezifizierter Operator $*^{\mathcal{V}_\alpha^{BS}}$, der auf Satzmengen über dem Vokabular $\mathcal{V}_\alpha^{BS}$ operiert. In dem relevanzsensitiven Revisionsoperator $*$ kann der Trigger α mittels $*^{\mathcal{V}_\alpha^{BS}}$ nur den Anteil BS_1 ändern; der Anteil BS_2 wird unverändert konserviert.

$$BS * \alpha = \mathrm{Cn}((BS_1 *^{\mathcal{V}_\alpha^{BS}} \alpha) \cup BS_2)$$

Der relevanzsensitive Revisionsoperator $*$ basiert per definitionem auf einem Operator, der nur die Änderung eines Teilvokabulars betrifft. Das resultierende Paar $\langle *, *^{\mathcal{V}_\alpha^{BS}} \rangle$ kann auch hier beschrieben werden als ein Paar von Operatoren, in dem die zweite Komponente eine Einschränkung der ersten auf ein Teilvokabular ($\mathcal{V}_\alpha^{BS}$) ist. Der Unterschied zu der Analyse im vorherigen Abschnitt ist allerdings die Konstruktionsrichtung: Während im Paar $\langle \circ, \circ^{\mathcal{V}_c} \rangle$ die zweite Komponente $\circ^{\mathcal{V}_c}$ über die erste Komponente $\circ$ definiert wird, wird im Paar $\langle *, *^{\mathcal{V}_\alpha^{BS}} \rangle$ die erste Komponente $*$ aus der zweiten Komponente $*^{\mathcal{V}_\alpha^{BS}}$ definiert.

4.2 Reinterpretation als Revision von Hypothesen

Die Definition der Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien stützt sich auf ein Paar von Selektionsfunktionen $\overline{\gamma} = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$. Die erste Komponente γ_1 wählt eine minimale Menge von Reinterpretationssymbolen aus $\mathrm{MRS}(O_1, O_2)$, die zur konsistenten Entkopplung der Ontologien benutzt wird. Die zweite Komponente γ_2 wählt inklusionsmaximale Mengen solcher Brückenaxiome über der durch γ_1 bestimmten Symbolmenge aus, die mit den entkoppelten Ontologien kompatibel sind. Der mit $\overline{\gamma}$ beschriebene zweischrittige Selektionsmechanismus in der Reinterpretation lässt sich – wie in diesem Abschnitt gezeigt wird – auf eine einschrittige Selektion zurückführen. Für die Reduktion der Reinterpretation von einem zweischrittigen Selektionsmechanismus zu einem einschrittigen Selektionsmechanismus wird die Perspektive auf die Objekte der Integration gewechselt. Es sind nicht eigentlich die Mengen von Ontologieaxiomen O_1, O_2 die Gegenstände eines durch Revision realisierten Änderungsprozesses, sondern die Menge an anfänglichen Brückenaxiomen zu einem gegebenen Paar von öffentlichem und internem Vokabular. In den Reinterpretationsoperatoren ist nicht die Menge von Axiomen der Empfängerontologie das linke Argument der Revision, sondern die Menge der Hypothesen über die semantische Beziehung zwischen den Symbolen der unterschiedlichen Ontologien. Auf eine prägnante Formel gebracht, lässt sich die neue Perspektive wie folgt beschreiben.

Reinterpretation = Revision von Hypothesen über semantische Beziehungen

Die folgenden Unterabschnitte geben eine formale Fundierung dieser Beziehung.

4.2.1 Schwache Operatoren als Revision von Hypothesen

In diesem Abschnitt wird eine neue Klasse von Reinterpretationsoperatoren $\times_i^\gamma$ ($i \in \{1, 2\}$) definiert, deren Konstruktion auf der Partial-Meet-Revision von Brückenaxiomen fußt. Wie sich im Folgenden zeigt, lassen sich die schwachen Reinterpretationsoperatoren $\otimes_i$ auf $\times_i^\gamma$ reduzieren, aber umgekehrt nicht $\times_i^\gamma$ auf $\otimes_i$ reduzieren.

Es wird wie bisher in dieser Arbeit ein öffentliches Vokabular $\mathcal{V}_c$ und ein davon disjunktes privates Vokabular $\mathcal{V}_i$ für den Empfänger vorausgesetzt. Ebenfalls vorausgesetzt wird ein Substitutionsschema $\Phi \in \mathrm{Ear}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$, das die Auswahl von Substitutionen zur Disambiguierung festlegt (siehe Gleichung (3.2), S. 76). Für eine Substitution $\sigma \in \mathrm{AR}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$ bezeichne

$$\begin{aligned} \mathrm{BA}(\sigma) &= \{s \sqsubseteq \sigma(s), \sigma(s) \sqsubseteq s \mid s \in (\mathrm{supp}(\sigma))_{KR}\} \cup \\ & \quad \{s = \sigma(s) \mid s \in (\mathrm{supp}(\sigma))_{Konst}\} \end{aligned} \tag{4.2}$$

die Menge aller einfachen Unter- und Oberabschätzungen von Symbolen s durch die zugehörige interne Variante $\sigma(s)$ (vgl. S. 94.). Die Menge $\mathrm{BA}(\sigma)$ wird als die Menge der vorläufigen semantischen Hypothesen über die Beziehung der Symbole in den beiden Ontologien genutzt. Im Verlauf der Integration der Ontologie $\mathcal{O}_2$ in die Ontologie $\mathcal{O}_1$ kann diese erste Hypothesenmenge $\mathrm{BA}(\sigma)$ mithilfe eines Revisionsoperators angepasst werden.

Für die Definition der hypothesenbasierten Operatoren ist zu berücksichtigen, dass die Empfängerontologie interne Symbole enthalten kann, mit denen die Hypothesen in $\mathrm{BA}(\sigma)$ nicht interferieren dürfen. Hierfür wird σ über das Substitutionsschema Φ definiert durch $\sigma = \sigma_{\mathcal{V}_c} = \Phi(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}(O_1) \cap \mathcal{V}_i)$; σ ist damit eine Substitution, die den Träger $\mathcal{V}_c$ hat und dessen Wertebereich keines der internen Symbole aus O_1 enthält.

Definition 4.14. Gegeben sei eine Ontologie $\langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$. Es sei $\sigma_{\mathcal{V}_c}$ eine Substitution mit $\sigma_{\mathcal{V}_c} = \Phi(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}(O_1) \cap \mathcal{V}_i)$. Es sei weiter γ_{O_1} (kurz γ) eine klassische Selektionsfunktion für $\mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})$ und $*_\gamma$ der auf γ basierende Partial-Meet-Revisionsoperator für $\mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})$. Dann werden für alle Ontologien $\langle O_2, \mathcal{V}_c, \emptyset \rangle$ die *schwachen hypothesenbasierten Reinterpretationsoperatoren für das Substitutionsschema* Φ *und die Selektionsfunktion* γ, $\times_i^\gamma$ ($i \in \{1,2\}$), wie folgt definiert.

$$\begin{aligned} O_1 \times_1^\gamma O_2 &= \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}) *_\gamma (O_1 \cup O_2\sigma_{\mathcal{V}_c}) \\ O_1 \times_2^\gamma O_2 &= \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}) *_\gamma (O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2) \end{aligned}$$

Bemerkung 4. Man beachte, dass die Selektionsfunktion $\gamma = \gamma_{O_1}$ gemäß Definition 4.14 für unterschiedliche Argumente O_1 unterschiedlich definiert sein darf. Diese Abhängigkeit der Selektionsfunktion γ vom erstem Argument ist konform mit der Definition der klassischen Partial-Meet-Revisionsoperatoren und passt zu dem intendierten asymmetrischen Integrationsszenario, gemäß dem die Hypothesen über die semantische Beziehung dem Empfänger (und nicht allgemein dem Empfänger und dem Sender) zugeschrieben werden.

Da nur Symbole im Schnitt der Vokabulare von O_1 und O_2 für Konflikte verantwortlich sein können, werden die Resultate der Operatoren $\times_i^\gamma$ für alle anderen Symbole s die Hypothesen über die Äquivalenz von s und $\sigma_{\mathcal{V}_c}(s)$ enthalten. Die Operatoren $\otimes_2$ sind wesentlich sparsamer bzgl. der Hypothesen. Die Rückführung der Operatoren $\otimes_2$ auf $\times_i^\gamma$ erfordert aus diesem Grunde einen Reduktionsoperator $\mathrm{Red}(\cdot)$, der die redundanten Symbole und die zugehörigen Äquivalenzen eliminiert. Die Entkopplung eines Rollen- oder Konzeptsymbols s durch eine Substitution σ gilt als *redundant in* O, wenn $O \models s \equiv \sigma(s)$. Die Entkopplung einer Konstanten s durch eine Substitution σ gilt als *redundant in* O, wenn $O \models s \doteq \sigma(s)$. Sei $G_O^\sigma \subseteq \mathcal{V}_c$ die Menge der bzgl. σ redundanten Symbole in O. Sei σ' definiert über $\sigma'(\sigma(s)) = s$ für alle $s \in G_O^\sigma \cap \mathcal{V}_c$. Dann wird der Reduktionsoperator definiert über

$$\mathrm{Red}(O,\sigma) = O\sigma' \setminus (\{s \sqsubseteq s \mid s \in (G_O^\sigma)_{CR}\} \cup \{s = s \mid s \in (G_O^\sigma)_c\})$$

Wenn aus dem Kontext hervorgeht, welche Substitution σ im Reduktionsoperator verwendet wird, soll statt $\mathrm{Red}(O,\sigma)$ kürzer $\mathrm{Red}(O)$ geschrieben werden. Zwei Mengen heißen *reduktionsäquivalent*, wenn deren Reduktionen identisch sind.

Proposition 4.15 zeigt, dass zu einem Operator $\otimes_i^{\overline{\gamma}}$ eine Selektionsfunktion γ derart definiert werden kann, dass $\otimes_i^{\overline{\gamma}}$ und $\times_i^\gamma$ nach Bereinigung um redundante Symbole identische Ergebnisse liefern, $\mathrm{Red}(O_1 \otimes_i^{\overline{\gamma}} O_2) = \mathrm{Red}(O_1 \times_i^\gamma O_2)$.

Proposition 4.15. *Gegeben seien Ontologien* $\langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i, \rangle$, $\langle O_2, \mathcal{V}_c, \emptyset\rangle$ *und sei* $\otimes_i^{\overline{\gamma}}$ *ein schwacher Reinterpretationsoperator für das Substitutionsschema* Φ *und das Paar von Selektionsfunktionen* $\overline{\gamma} = \langle\gamma_1, \gamma_2\rangle$*. Dann gibt es eine Selektionsfunktion* γ *und einen schwachen hypothesenbasierten Reinterpretationsoperator für* Φ *und* γ*, so dass*

$$\mathrm{Red}(O_1 \otimes_i^{\overline{\gamma}} O_2) = \mathrm{Red}(O_1 \times_i^\gamma O_2)$$

Beweis. Siehe S. 259.

Bemerkung 5. Man beachte, dass der Reduktionsoperator auf beiden Seiten der Gleichung 4.15 angewandt wird und nicht nur auf den Ausdruck $O_1 \times_i^{\gamma} O_2$. Der Grund ist, dass der Operator $\otimes_i^{\overline{\gamma}}$ die Vereinigung $\bigcup \mathrm{MRS}(O_1, O_2)$ über allen minimalen Mengen von Reinterpretationssymbolen $\mathrm{MRS}(O_1, O_2)$ als diejenige Menge von Symbolen festlegt, auf die sich die Entkopplung bezieht. $\bigcup \mathrm{MRS}(O_1, O_2)$ enthält daher eventuell Symbole s, die nicht dissoziiert werden müssen. Für diese Symbole s gilt, dass $O_1 \otimes_i^{\overline{\gamma}} O_2$ die redundante Äquivalenz $s \equiv s'$ als Folgerung enthalten kann.

Die zu Proposition 4.15 umgekehrte Aussage gilt nicht. Nicht alle hypothesenbasierten schwachen Reinterpretationsoperatoren lassen sich durch schwache Reinterpretationsoperatoren darstellen.

Beobachtung 4.16. *Die schwachen hypothesenbasierten Reinterpretationsoperatoren $\times_i^{\gamma}$ bilden eine echt größere Klasse als die schwachen Reinterpretationsoperatoren $\otimes_i^{\overline{\gamma}}$.*

Beweis. Siehe S. 261.

4.2.2 Starke Operatoren als Revision von Hypothesen

Die starken Operatoren $\odot_i$ für triggernde konzeptbasierte Literale ergänzen die schwachen Reinterpretationsoperatoren um zusätzliche Brückenaxiome. Da im Falle triggernder Literale nicht zwischen Symbolen auszuwählen ist, die zu reinterpretieren sind, soll für die Darstellbarkeit der starken Operatoren $\odot_i$ ein klassischer Full-Meet-Revisionsoperator[6] $*^{\mathrm{fm}}$ benutzt werden. Der folgende Repräsentationssatz 4.17 für starke Operatoren verdeutlicht, dass bereits mit der geeigneten Auswahl einer anderen initialen Hypothesenmenge $\mathrm{BA}^{\mathrm{st}}(\sigma_{\mathcal{V}_c})$ – und nicht erst mit der Auswahl einer Selektionsfunktion – verschieden starke Reinterpretationsoperatoren als Revision von Hypothesen modelliert werden können.

Für die Darstellbarkeit der starken Reinterpretationsoperatoren erweist sich die Hypothesenmenge $\mathrm{BA}^{\mathrm{st}}(\sigma)$ als hilfreich.

$$\mathrm{BA}^{\mathrm{st}}(\sigma) = \{L \sqsubseteq \sigma(L \sqcup C), \sigma(L) \sqsubseteq L \sqcup \sigma(C) \mid L \in \mathcal{V}_c, C \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_c)\}$$

Da für C auch das leere Konzept $\perp$ eingesetzt werden darf, folgen aus $\mathrm{BA}^{\mathrm{st}}(\sigma)$ insbesondere die einfachen Abschätzungen $L \sqsubseteq \sigma(L)$ und $\sigma(L) \sqsubseteq L$.

Proposition 4.17 besagt, dass – nach Abschluss durch den Reduktionsoperator $\mathrm{Red}(\cdot)$ – das Resultat unter dem starken Reinterpretationsoperator $\odot_i$ äquivalent ist zu einer Full-Meet-Revision der erweiterten Menge an Brückenaxiomen $\mathrm{BA}^{\mathrm{st}}(\sigma_{\mathcal{V}_c})$.

[6] Vgl. S. 25.

Proposition 4.17. *Sei $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine Ontologie, $\alpha = \hat{K}(a)$ ein konzeptbasiertes Literal mit $\mathcal{V}(\hat{K}) \subseteq \mathcal{V}_c$, $a \in \mathcal{V}_c$ und $\odot_i$ ein starker Operator für triggernde konzeptbasierte Literale bzgl. des Substitutionsschemas Φ. Sei weiter $\sigma_{(\mathcal{V}_c)_{Konz}}$ eine Substitution mit $\sigma_{(\mathcal{V}_c)_{Konz}} = \Phi((\mathcal{V}_c)_{Konz}, \mathcal{V}(O) \cap \mathcal{V}_i)$. Die Substitution $\sigma_{(\mathcal{V}_c)_{Konz}}$ bildet nur Konzeptsymbole aus $\mathcal{V}_c$ auf neue Symbole in $\mathcal{V}_i \setminus \mathcal{V}(O)$ ab. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Red}(O \odot_1 \alpha) &\equiv \mathrm{Red}(\mathrm{BA}^{\mathrm{st}}(\sigma_{(\mathcal{V}_c)_{Konz}}) *^{\mathrm{fm}} (O \cup \{\alpha\sigma_{(\mathcal{V}_c)_{Konz}}\})) \\
\mathrm{Red}(O \odot_2 \alpha) &\equiv \mathrm{Red}(\mathrm{BA}^{\mathrm{st}}(\sigma_{(\mathcal{V}_c)_{Konz}}) *^{\mathrm{fm}} (O\sigma_{(\mathcal{V}_c)_{Konz}} \cup \{\alpha\}))
\end{aligned}$$

Beweis. Siehe S. 261.

4.2.3 Hypothesenrevision für andere Reinterpretationsansätze

Die Darstellbarkeit von Reinterpretationsoperatoren als Revision von Hypothesen beschränkt sich nicht auf die Operatoren, die in dieser Arbeit entwickelt werden. In diesem Abschnitt werden die Operatoren $\dot{+}, \dot{+}_c$ von Delgrande und Schaub (Delgrande und Schaub, 2003) auf die Darstellbarkeit als Revision von Hypothesen hin untersucht. Die Analyse ergibt zum einen, dass eine Erweiterung der Menge an Biimplikationen EQ, die Delgrande und Schaub zur Definition ihrer Operatoren $\dot{+}, \dot{+}_c$ benutzen, in nicht äquivalenten Revisionsoperatoren resultiert und zum anderen, dass der Operator $\dot{+}_c$ durch eine Partial-Meet-Revision der Menge von Brückenaxiomen EQ und der Operator $\dot{+}$ durch eine Partial-Meet-Revision über dem disjunktiven Abschluss von EQ modelliert werden kann.

Im Folgenden werde ein aussagenlogisches Vokabular $\mathcal{V}_c$ von Aussagensymbolen vorausgesetzt. Es sei $\mathcal{V}_i = \{p' \mid p \in \mathcal{V}_c\}$ ein gleichmächtiges internes Vokabular und $\sigma_{\mathcal{V}_c}$ eine Substitution mit Träger $\mathcal{V}_c$, so dass $\sigma_{\mathcal{V}_c}$ das öffentliche Vokabular $\mathcal{V}_c$ bijektiv auf $\mathcal{V}_i$ abbildet, $\sigma_{\mathcal{V}_c}(p) = p'$. Sei O eine endliche Menge von aussagenlogischen Sätzen aus $\mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$, α eine aussagenlogische Formel aus $\mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$ und $\langle O, \{\alpha\}, \emptyset \rangle$ ein Belief-Change-Szenario.

Modifikation der Brückenaxiome für Delgrandes und Schaubs Operatoren

Delgrande und Schaub definieren ihre Operatoren auf der Basis einer Menge $EQ = \{p \leftrightarrow p' \mid p \in \mathcal{V}_c\}$, die aus allen Biimplikationen („equivalences“) zwischen p und p' für $p \in \mathcal{V}_c$ bestehen. Durch Änderung der Menge an Brückenaxiomen EQ lassen sich neue Reinterpretationsoperatoren definieren, die nicht mit den Operatoren von Delgrande und Schaub äquivalent sind. Eine naheliegende Modifikation der Hilfsmenge EQ ergibt sich aus der Konstruktion der hier entwickelten Reinterpretationsoperatoren; statt der Menge aller Biimplikationen wird die feinere

Menge von Implikationen Im benutzt.

$$\mathrm{Im} = \{p \to p', p' \to p \mid p \in \mathcal{V}_c\}$$

Eine Menge der Form $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O \cup \{\alpha\} \cup X)$, wobei $X \in \mathrm{Im}\top(O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup \{\alpha\})$, ist eine konsistente Extension zu einem Belief-Change-Szenario $\langle O, \{\alpha\}, \emptyset\rangle$. Sei $(E_i^{\mathrm{Im}})_{i\in I}$ die Menge aller konsistenten Extensionen des Belief-Change-Szenarios $\langle O, \{\alpha\}, \emptyset\rangle$. Sei c eine Selektionsfunktion für die Indexmenge i mit $c(I) = i$. Die neuen Choice- und Sceptical-Revisionsoperatoren können nach demselben Schema wie in Definition 2.29 (S. 55) definiert werden.

Definition 4.18. Die implikationsbasierten *Choice- und Sceptical- Revisionsoperatoren* $\dot{+}_c^{\mathrm{Im}}$ und $\dot{+}^{\mathrm{Im}}$ sind wie folgt definiert.

$$\begin{aligned} O_1 \dot{+}_c^{\mathrm{Im}} \alpha &= E_i^{\mathrm{Im}} \text{ (für } c(I) = i) \\ O_1 \dot{+}^{\mathrm{Im}} \alpha &= \bigcap_{i\in I} E_i^{\mathrm{Im}} \end{aligned}$$

Die neuen Choice-Operatoren $\dot{+}_c^{\mathrm{Im}}$ unterscheiden sich von den ursprünglichen Operatoren $\dot{+}_c$, $\dot{+}$, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 4.19. Sei $O = \{p \leftrightarrow q\}$ und $\alpha = \neg(p \leftrightarrow q)$ sowie $\mathcal{V}_c = \{p, q\}$. Die Menge der inklusionsmaximalen kompatiblen Biimplikation ist $EQ_1 = \{p \leftrightarrow p'\}$ und $EQ_2 = \{q \leftrightarrow q'\}$. Sei $I = \{1, 2\}$ und seien $c_1(I) = 1$ und $c_2(I) = 2$. Mithilfe des Operators $\theta'_{\{p',q'\}}$ rechnet man aus, dass $O \dot{+}_{c_1} \alpha = O \dot{+}_{c_2} \alpha = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(p \leftrightarrow \neg q)$ gilt. Mithilfe des Repräsentationssatzes 2.31 (S. 57) folgt $O \dot{+} \alpha = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(p \leftrightarrow \neg q)$.

$$\begin{aligned} O \dot{+}_{c_1} \alpha &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(p' \leftrightarrow q', \neg(p \leftrightarrow q), p \leftrightarrow p') \\ &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\theta'_{\{p',q'\}}((p' \leftrightarrow q') \wedge \neg(p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow p'))) \\ &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}((\neg(p \leftrightarrow q) \wedge p) \vee (\neg(p \leftrightarrow q) \wedge \neg p)) \\ &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(p \leftrightarrow \neg q) \\ O \dot{+}_{c_2} \alpha &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(p' \leftrightarrow q', \neg(p \leftrightarrow q), q \leftrightarrow q') \\ & \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\theta'_{\{p',q'\}}((p' \leftrightarrow q') \wedge \neg(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow q'))) \\ &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}((\neg(p \leftrightarrow q) \wedge q) \vee (\neg(p \leftrightarrow q) \wedge \neg q)) \\ &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(p \leftrightarrow \neg q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O \dot{+} \alpha &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\bigvee_{i\in\{1,2\}} \bigwedge_{\beta\in O} \lceil\beta\rceil_i \wedge \alpha) \\ &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}((\lceil p \leftrightarrow q\rceil_1 \vee \lceil p \leftrightarrow q\rceil_2) \wedge \neg(p \leftrightarrow q)) \\ &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}((p \leftrightarrow \neg q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)) \wedge \neg(p \leftrightarrow q)) \\ &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(p \leftrightarrow \neg q) \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ergeben sich folgende inklusionsmaximale kompatible Mengen von einfachen Implikationen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}_1 &= \{q \to q', q' \to q, p \to p'\} \\
\mathrm{Im}_2 &= \{q \to q', q' \to q, p' \to p\} \\
\mathrm{Im}_3 &= \{q \to q', p' \to p, p \to p'\} \\
\mathrm{Im}_4 &= \{q' \to q, p' \to p, p \to p'\}
\end{aligned}$$

Es gibt vier verschiedene Choice-Revisionen. Sei $I = \{1, 2, 3, 4\}$ und $c(I) = i$. Dann gilt $O \dotplus^{\mathrm{Im}}_{c_1} \{\alpha\} = O \dotplus^{\mathrm{Im}}_{c_4} \{\alpha\} = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\neg p \wedge q)$ und $O \dotplus^{\mathrm{Im}}_{c_2} \{\alpha\} = O \dotplus^{\mathrm{Im}}_{c_3} \{\alpha\} = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\neg q \wedge p)$. Als Beispiel wird im Folgenden die Rechnung für $O \dotplus^{\mathrm{Im}}_{c_1} \{\alpha\} = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\neg p \wedge q)$ angegeben.

$$\begin{aligned}
O \dotplus^{\mathrm{Im}}_{c_1} \{\alpha\} &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\{p' \leftrightarrow q', \neg(p \leftrightarrow q), q \to q', q' \to q, p \to p'\}) \\
&= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\theta'_{\{p',q'\}}((p' \leftrightarrow q') \wedge \neg(p \leftrightarrow q) \wedge (q' \leftrightarrow q) \wedge (p \to p')) \\
&= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}((\neg(p \leftrightarrow q) \wedge q) \vee (\neg(p \leftrightarrow q) \wedge \neg q \wedge \neg p)) \\
&= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}((\neg(p \leftrightarrow q) \wedge q)) \\
&= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}((q \wedge \neg p))
\end{aligned}$$

Es folgt insbesondere, dass $\dotplus^{\mathrm{Im}}_{c_1}$ andere Ergebnisse liefert als $\dotplus_{c_1}, \dotplus_{c_2}$ und $\dotplus$.

Darstellung von $\dotplus_c$ und $\dotplus$ als Revision von Hypothesen

Es bezeichne $(EQ_i)_{i \in I}$ die Familie aller maximalen Mengen von Brückenaxiomen EQ_i, die mit $O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup \{\alpha\}$ konsistent sind, $EQ_i \in EQ \top (O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup \{\alpha\})$. Die zugehörige Menge aller konsistenten Extensionen für das Belief-Change-Szenario $\langle O, \{\alpha\}, \emptyset \rangle$ wird mit $(E_i)_{i \in I}$ bezeichnet, $E_i = \mathrm{Cn}(EQ_i \cup O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup \{\alpha\}) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$. Für die Modellierung des Choice-Operators $\dotplus_c$ als Revision von Hypothesen erweist sich die Menge aller Biimplikationen EQ als eine geeignete initiale Hypothesenmenge. Für die Modellierung des skeptischen Operators $\dotplus$ hingegen ist der disjunktive Abschluss $\mathrm{DisA}(EQ)$ von EQ (siehe Definition A.40, S. 246.) eine geeignete initiale Hypothesenmenge. In beiden Fällen ist das Ergebnis der Hypothesenrevision noch zusätzlich mit der öffentlichen Sprache zu schneiden, da die Operatoren $\dotplus_c, \dotplus$ keine internen Symbole enthalten.

Proposition 4.20. *Gegeben sei das Belief-Change-Szenario $\langle O, \{\alpha\}, \emptyset \rangle$ mit endlichem O, die dazugehörige Familie aller Extensionen $(E_i)_{i \in I}$ und eine Substitution $\sigma_{\mathcal{V}_c}$ mit Träger $\mathcal{V}_c$. Es sei $(EQ_i)_{i \in I}$ die Familie aller maximalen Mengen von Brückenaxiomen, $EQ_i \in EQ \top (O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup \{\alpha\})$. Sei c eine Selektionsfunktion gemäß Delgrande und Schaub (2003). Es seien weiter $\dotplus_c, \dotplus$ die Choice- bzw. Sceptical-Revisionsoperatoren gemäß Definition 2.29 (S. 55) bezogen auf das Belief-Change-Szenario $\langle O, \{\alpha\}, \emptyset \rangle$.*

1. *Es gibt eine Maxichoice-Selektionsfunktion γ, so dass gilt:*

$$O \dotplus_c \alpha = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(EQ *_\gamma (O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup \{\alpha\})) \tag{4.3}$$

2. *Es gibt eine Selektionsfunktion γ, so dass gilt:*

$$O \dotplus \alpha = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{DisA}(EQ) *_\gamma (O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup \{\alpha\})) \tag{4.4}$$

Beweis. Siehe S. 263.

Beispiel 4.21. Ich demonstriere die Darstellbarkeitsaussage für den Operator $\dotplus$ anhand eines einfachen Beispiels. Sei $\mathcal{V}_c = \{p, q\}$. Es seien

$$\begin{array}{rcl} EQ & = & \{p \leftrightarrow p', q \leftrightarrow q'\} \\ O & = & \{p \wedge q\} \\ O' & = & O\sigma_{\mathcal{V}_c} = \{p', q'\} \\ \alpha & = & \neg p \vee \neg q \end{array}$$

Für dieses Beispiel ist $EQ \top (O\sigma \cup \{\alpha\}) = \{\{p \leftrightarrow p'\}, \{q \leftrightarrow q'\}\}$ und $O \dotplus \alpha = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(p \leftrightarrow \neg q)$. Auf der anderen Seite ist

$$\begin{array}{rcl} \gamma(\mathrm{DisA}(EQ) \top (O\sigma \cup \{\alpha\})) & = & \{\{p \leftrightarrow p', (p \leftrightarrow p') \vee (q \leftrightarrow q')\}, \\ & & \{q \leftrightarrow q', (p \leftrightarrow p') \vee (q \leftrightarrow q')\}\} \end{array}$$

Folglich ist

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{DisA}(EQ) *_\gamma (O' \cup \{\alpha\}) & = & \{(p \leftrightarrow p') \vee (q \leftrightarrow q')\} \cup O' \cup \{\alpha\} \\ & = & \{(p \leftrightarrow p') \vee (q \leftrightarrow q'), p', q', \neg p \vee \neg q\} \end{array}$$

Zur Bestimmung der in der öffentlichen Sprache ableitbaren Sätze kann wegen Beobachtung 4.11 der $\theta'_{\{p',q'\}}$-Operator angewandt werden. Es ergibt sich folgende Gleichungskette:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}\left(\{(p \leftrightarrow p') \vee (q \leftrightarrow q'), p', q', \neg p \vee \neg q\}\right) & = & \\ \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}\left(\theta'_{\{p',q'\}}[((p \leftrightarrow p') \vee (q \leftrightarrow q')) \wedge p' \wedge q' \wedge (\neg p \vee \neg q)]\right) & = & \\ \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}\left(((p \leftrightarrow \top) \vee (q \leftrightarrow \top)) \wedge \top \wedge \top \wedge (\neg p \vee \neg q)\right) & = & \\ \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}\left((p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)\right) & = & \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(p \leftrightarrow \neg q) \end{array}$$

5 Minimalität und starke Operatoren

Die in Abschnitt 3.1 besprochenen Integrationspostulate bilden zusammen eine Menge von notwendigen Bedingungen für Reinterpretationsoperatoren. Die Bedingungen sind jedoch nicht hinreichend, da sie auch von Operatoren erfüllt werden, die zwei Ontologien lediglich entkoppeln, nicht jedoch aufeinander beziehen. Die vollständige Entkopplung des Typs 2, bei der die Empfängerontologie internalisiert wird, führt zu einem Verlust der Empfängeraxiome auf der Interfaceebene. Ein solcher Operator verletzt das Prinzip, die Empfängerwissensbasis bei Integration des Triggers nur minimal zu ändern.

Im folgenden Abschnitt 5.1 werden Postulate aus der klassischen Belief-Revision besprochen, die in der einen oder anderen Form ausdrücken, dass der spezifizierte Operator die Empfängerwissensbasis nur minimal ändert. Prinzipiell ist es möglich, die Minimalitätspostulate einzuteilen in solche, die einen minimalen Verlust der Empfängerwissensbasis beschreiben und somit eine untere Schranke für das Revisionsresultat angeben, und solche, die das Resultat der Revision nach oben beschränken. Zu der ersten Gruppe kann das Relevanzpostulat von Hansson (1993a) und das (davon verschiedene) Relevanzpostulat gemäß Parikh (1999) gezählt werden. Der gemeinsame Nenner beider Postulate ist, dass nur solche Sätze der Empfängerwissensbasis aus dem Revisionsresultat ausgeschlossen werden dürfen, die in einer (näher spezifizierten) Weise für den Widerspruch verantwortlich gemacht werden können. Zu der zweiten Gruppe von Postulaten kann das Inklusionspostulat für Belief-Bases gerechnet werden. Der Abschnitt 5.2 bespricht an Reinterpretationsoperatoren angepasste Relevanzpostulate, die eine Abgrenzung von Enkopplungsoperatoren ermöglicht. Der darauf folgende Abschnitt 5.3

beschreibt ein Oberabschätzungspostulat, das die schwachen Reinterpretationsoperatoren von den starken Operatoren abgrenzt.

Die in diesem Kapitel besprochenen Postulate spezifizieren eine minimale Veränderung auf Postulatsebene und sind in diesem Sinne global: Sie geben an, welche der Axiome der Empfängerontologie bei der Integration höchstens verloren gehen dürfen (Unterabschätzung) und welche Axiome hinzukommen dürfen (Oberabschätzung). Neben dieser globalen Form von Minimalität lässt sich eine lokale Variante beschreiben, die sich auf die minimale Änderung von Konzepten in der Ontologie bezieht. Aufgrund des zur Explikation nötigen neuen Begriffs einer Sphärenkollektion wird die Darstellung der Reinterpretationsoperatoren, die eine lokal minimale Änderung realisieren, in das Kapitel 7 ausgegliedert.

5.1 Minimalität in der Belief-Revision: Postulate

Eines der informellen Rationalitätspostulate, das Gärdenfors und Rott in ihrem Handbuchartikel benennen, besagt, dass die Menge der bei einer Wissensbestandsänderung verloren gehenden Informationen minimal gehalten werden sollte (Gärdenfors und Rott, 1995, S. 38).

Wie Rott (2000) feststellt, ist jedoch unter den AGM-Postulaten für Revisionsoperatoren keines, das den minimalen Verlust explizit formalisiert. Keines der AGM-Postulate gibt eine Unterschranke für das Revisionspostulat an. Lediglich das Erfolgspostulat (AGM-R 2) (S. 20) und das zweite Expansionspostulat (AGM-R 4) tragen in einer schwachen Form zum minimalen Verlust bei. Das Erfolgspostulat erzwingt, dass das Revisionsresultat nicht leer sein darf, da es den Trigger enthalten muss. Es verhindert aber nicht, dass das Belief-Set des Empfängers vollständig gelöscht werden kann. Das zweite Expansionspostulat (AGM-R 4) gibt zumindest an, dass das Revisionsresultat durch die Expansion der Empfängerwissensbasis mit dem Trigger nach unten abgeschätzt werden kann – allerdings nur für den einfachen Fall, dass Trigger und Belief-Set des Empfängers kompatibel sind.

Mit einer Konstruktion gemäß Rott (2000) lässt sich zeigen, dass für Operatoren über Belief-Sets, die das Erfolgspostulat und die Abschlussbedingung erfüllen, die Bestimmung eines minimalen Revisionsresultats nicht möglich ist. Dabei wird die minimale Änderung in der Konstruktion durch mengentheoretische Inklusion von symmetrischen Differenzen expliziert. Ich werde die für diese Arbeit relevante Konstruktion, welche den problematischen Status des Minimalitätskriteriums belegen soll, im Folgenden besprechen.

Rott nennt jedes konsistente Belief-Set BS', das den Trigger α enthält, ein potentielles Revisionsresultat („candidate revision“) von BS mit α. Rotts Konstruktion ist die Basis der folgenden Beobachtung.

Beobachtung 5.1. *(Rott, 2000) Für je zwei verschiedene potentielle Revisionsresultate BS', BS'' eines konsistenten Belief-Sets BS mit einem Satz α, so dass $\neg\alpha \in BS$, sind die symmetrischen Differenzen $BS\Delta BS'$ und $BS\Delta BS''$ bzgl. Mengeninklusion nicht vergleichbar, d.h. es gilt weder $BS\Delta BS' \subseteq BS\Delta BS''$ noch $BS\Delta BS'' \subseteq BS\Delta BS'$.*

Beweis. Siehe S. 265.

Die Beobachtung besagt, dass sich die potentiellen Revisionsresultate mengentheoretisch nicht dadurch vergleichen lassen, dass man ihre Unterschiede bzgl. der ursprünglichen Menge BS – formalisiert durch die symmetrischen Differenzen – bzgl. mengentheoretischer Inklusion $\subseteq$ vergleicht. Damit sind alle potentiellen Revisionsresultate minimal und es gibt kein kleinstes potentielles Revisionsresultat. Entscheidet man sich für den skeptischen Weg (Full-Meet-Revision) und bildet den Schnitt über alle potentiellen Revisionsresultate, ergibt sich zwar ein eindeutiges Revisionsresultat; doch dieser skeptische Weg induziert eine gedächtnislose Revision („amnesic revision“), für die das Resultat der Revision nur noch die neue Information und deren Folgerungen enthält.

Rotts Beweis setzt lediglich voraus, dass das Ergebnis der Revision logisch abgeschlossen ist und das Erfolgspostulat erfüllt ist. In der Konstruktion des Beweises wird wesentlich von der logischen Abgeschlossenheit des anfänglichen Belief-Sets BS und der resultierenden Belief-Sets BS', BS'' gemacht. Ein wichtiger Punkt ist die Tatsache, dass im logischen Abschluss „disjunktive“ Information der Form $\beta \vee \neg\alpha$ enthalten sein kann. Für endliche Wissensbasen, wie sie für die Ontologierevision und -integration benutzt werden, funktioniert diese Konstruktion nicht. Auch für Wissensbasen, die um „nicht-disjunktive“ Informationen angereichert wurden, lässt sich diese Konstruktion nicht anwenden.[1] Gegen das Prinzip der Minimalität für nicht abgeschlossene Wissensbasen muss Rott auf ein anderes Argument ausweichen, das auf Probleme mit der iterierten Anwendung eines Operators verweist.[2]

Die AGM-Postulate fangen das Prinzip des minimalen Verlusts nicht ein. Es sind daher weitere Postulate nötig, die den minimalen Verlust in der Revision beschreiben. Zwei Postulate, die zum Zwecke des minimalen Verlusts konstruiert wurden, sind das Relevanzpostulat gemäß Hansson (1993a) und das Relevanzpostulat gemäß Parikh (1999).

[1] Abschnitt 5.3 expliziert den Begriff nicht-disjunktiver Folgerungen aus einer Wissensbasis. An dieser Stelle muss die Bemerkung reichen, dass p und q nicht-disjunktive Folgerungen der Belief-Base $B = \{p \wedge q\}$ sind, während $p \vee r$ eine disjunktive Folgerung aus B ist.

[2] Auf die sequenzialisierte (genauer die iterierte) Integration gehe ich in Kapitel 6 ausführlicher ein.

5.1.1 Relevanzpostulate

Hanssons Relevanzpostulat (HR 4) (Hansson, 1993a) wird für beliebige Belief-Bases B formuliert und hat den folgenden Inhalt:[3] Wenn ein Satz β aus der Empfängerwissensbasis B nicht im Revisionsresultat $B * \alpha$ enthalten ist, dann gibt es eine durch $B \cup \{\alpha\}$ nach oben beschränkte Obermenge B' des Revisionsresultats, die konsistent ist, aber durch Hinzufügen von β inkonsistent wird.

(HR 4) Wenn $\beta \in B$ und $\beta \notin B * \alpha$, dann gibt es eine Menge B', so dass gilt:

- $B * \alpha \subseteq B' \subseteq B \cup \{\alpha\}$;
- B' ist konsistent;
- $B' \cup \{\beta\}$ ist inkonsistent.

Obwohl dieses Relevanzpostulat eine moderate Minimalitätsbedingung ausdrückt, wird sie von den hier definierten Reinterpretationsoperatoren trivialerweise nicht erfüllt. Der Grund ist, dass die Reinterpretation im Inkonsistenzfall zu einer Erweiterung des Sprachraums führt und daher für Reinterpretationsoperatoren $\circ$ im Inkonsistenzfall $B \circ \alpha \not\subseteq B \cup \{\alpha\}$ gilt. Dadurch kann die erste der drei Bedingungen im Relevanzpostulat ($B * \alpha \subseteq B' \subseteq B \cup \{\alpha\}$) nicht erfüllt werden. Das Relevanzkriterium lässt sich aber zumindest so anpassen, dass die Spracherweiterung nicht im Voraus die Erfüllbarkeit durch die Reinterpretationsoperatoren ausschließt.[4]

(HR 4') Wenn $B \models \beta$ und $B * \alpha \not\models \beta$, dann gibt es eine Menge B', so dass gilt:

- $(B * \alpha) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c) \subseteq B' \subseteq B \cup \{\alpha\}$
- B' ist konsistent;
- $B' \cup \{\beta\}$ ist inkonsistent.

Aber auch diese Verallgemeinerung des Relevanzpostulats wird von den Reinterpretationsoperatoren nicht erfüllt. Bereits für starke Operatoren für triggernde (konzeptbasierte) Literale lässt sich ein Gegenbeispiel konstruieren, welches das restringierte Konservativitätskriterium aus Abschnitt 3.2 exemplifiziert.

[3] Vgl. den Überblick zur Belief-Revision, Abschnitt 2.1.

[4] In der angepassten Variante (HR 4') werden die Bedingung $\beta \in B$ bzw. $\beta \notin B * \alpha$ verallgemeinert zu $B \models \beta$ bzw. $B * \alpha \not\models \beta$.

Beispiel 5.2. Sei $O = \{K(a), K(b)\}$ und $\alpha = \neg K(a)$. Dann ist

$$O \odot_2 \alpha \equiv \{K'(a), K'(b), \neg K(a), K \sqsubseteq K', K' \sqsubseteq K \sqcup K'\} \equiv O \otimes_2 \alpha$$

Sei $\beta = K(b)$. Es ist $O \models \beta$ und $O \odot_2 \alpha \not\models \beta$. Allerdings gibt es keine Menge O' mit

$$\{\neg K(a)\} = (O \odot_2 \alpha) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c) \subseteq O' \subseteq O \cup \{\alpha\} = \{K(a), K(b), \neg K(a)\}$$

so dass O' konsistent und $O' \cup \{\beta\}$ inkonsistent ist.

Das Relevanzkriterium von Parikh (1999) gibt eine andere Explikation der für einen Widerspruch verantwortlichen Sätze der Empfängerwissensbasis.[5] Die Idee ist, alle für einen Widerspruch irrelevanten Aussagen der ursprünglichen Empfängerwissensbasis anhand der in ihnen enthaltenen Symbole zu bestimmen und deren Konservierung im Kontraktions- bzw. Revisionsresultat einzufordern. Das Basiskonzept für die technisch saubere Formulierung des Relevanzkriteriums sind so genannte Splittings. Die erweiterte Definition eines Splittings gemäß Makinson und Kourousias (2007) setzt auf der Definition von Parikh (1999) auf.

Definition 5.3. (Makinson und Kourousias, 2007) Sei $\mathcal{V}$ ein (aussagen-, beschreibungs- oder prädikatenlogisches) Vokabular und $\mathbf{V} = \{\mathcal{V}_n\}_{n \in I}$ eine Partition von $\mathcal{V}$. $\mathbf{V}$ ist ein *Splitting* einer Wissensbasis B genau dann, wenn es eine Familie von Wissensbasen $\{B_n\}_{n \in I}$ gibt, so dass gilt: $\mathcal{V}(B_n) \subseteq \mathcal{V}_n$ und $\bigcup \{B_n\}_{n \in I} \equiv B$.

Ein Splitting einer Wissensbasis B beschreibt folglich eine Aufteilung des nichtlogischen Vokabulars in verschiedene Teilvokabulare $\mathcal{V}_n$, zu denen es in ihnen formulierte Wissensbasen B_n gibt, deren Vereinigung äquivalent mit B ist. Da Splittings Partitionen bilden, induzieren sie Äquivalenzrelationen, die sich bzgl. Feinheit vergleichen lassen.

Definition 5.4. (Makinson und Kourousias, 2007) Eine Partition $\mathbf{V} = \{\mathcal{V}_n\}_{n \in I}$ eines Vokabulars $\mathcal{V}$ ist *mindestens so fein wie* eine Partition $\mathbf{W} = \{\mathcal{W}_m\}_{m \in J}$ von $\mathcal{V}$, kurz $\mathbf{V} \leq \mathbf{W}$, genau dann, wenn jedes $\mathcal{W}_m$ sich für ein $I_0 \subseteq I$ als Vereinigung $\mathcal{W}_m = \bigcup \{\mathcal{V}_n\}_{n \in I_0}$ darstellen lässt.[6]

Mittels paralleler Interpolation, einer Verallgemeinerung von Craigs Interpolationslemma, lässt sich zeigen, dass für jede Wissensbasis B ein eindeutig bestimmtes feinstes Splitting existiert. Das Theorem geht für endliche Vokabulare zurück auf Parikh (1999). Die Verallgemeinerung wird von Makinson und Kourousias (2007) bewiesen.

[5] Siehe auch die auf Ideen von Parikh (1999) basierenden Aufsätze von Chopra und Parikh (2000), Chopra et al. (2001), Peppas et al. (2007), Makinson und Kourousias (2007) und Makinson (2007).

[6] Äquivalent zu dieser Definition lässt sich festsetzen, dass $\mathbf{V} \leq \mathbf{W}$ genau dann erfüllt ist, wenn für die induzierten Äquivalenzrelationen $R_{\mathbf{V}}$ und $R_{\mathbf{W}}$ gilt: $R_{\mathbf{V}} \subseteq R_{\mathbf{W}}$.

Theorem 5.5. *(Makinson und Kourousias, 2007) Für jede Wissensbasis B gibt es ein eindeutig bestimmtes feinstes Splitting.*

Dieses Theorem besagt in der Redeweise von Parikh (1999), dass es auf genau eine Weise möglich ist, die Wissensbasis B in Anteile disjunkter Information zu verschiedenen Themengebieten aufzuteilen.

Unter Ausnutzung dieses Theorems kann Parikhs Relevanzkriterium formuliert werden. Zunächst wird definiert, wann eine Formel als irrelevant für die Kontraktion/Revision einer Wissensbasis mit der Triggerinformation α gilt.

Definition 5.6. (Makinson und Kourousias, 2007) Sei B eine konsistente Wissensbasis und $\mathbf{V} = \{\mathcal{V}_n\}_{n \in I}$ das eindeutig bestimmte feinste Splitting von $\mathcal{V}$ bzgl. B. Sei α eine Formel, mit der B kontrahiert oder revidiert wird. Eine Formel β heißt *irrelevant* bzgl. der Kontraktion/Revision von B mit α, kurz β ist *irrelevant für α modulo B*, genau dann, wenn für alle $\mathcal{V}_n \in \mathbf{V}$ gilt, dass $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}(\beta)$ oder $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}(\alpha)$ leer ist. Eine Formel ist *relevant*, wenn sie nicht irrelevant ist.

Entsprechend ist also eine Formel β relevant für die Revision/Kontraktion von B mit α, wenn es ein Teilvokabular $\mathcal{V}_n$ gibt, so dass β und α ein Symbol aus $\mathcal{V}_n$ enthalten. Das Relevanzkriterium in der Auslegung von Makinson und Kourousias (2007) lässt sich mit dieser technischen Explikation des Relevanzbegriffs wie folgt formulieren.

(RelKriPa) Das Resultat der Revision von B mit α enthält alle Formeln aus B, die irrelevant für α modulo B sind.

Makinson und Kourousias (2007) formulieren das Kriterium für logisch abgeschlossene Mengen B. Für nicht logisch abgeschlossene Mengen kann (RelKriPa) noch verschärft werden zu folgendem Kriterium:

(RelKriPa') Das Resultat der Revision von B mit α impliziert alle aus B folgenden Formeln, die irrelevant für α modulo B sind.

Parikh und Kollegen (Parikh, 1999; Chopra und Parikh, 2000; Chopra et al., 2001) untersuchen Modifikationen von Partial-Meet-Operatoren, die das Relevanzkriterium erfüllen. Hierfür definieren sie zusätzliche Postulate zu den Basispostulaten von AGM und Operatoren, die diese Postulate erfüllen. Parikh (1999) schlägt drei Postulate an einen Relevanz respektierenden Operator $*$ vor, die schließlich durch ein Postulat (RelP) ersetzt werden, aus dem alle drei Postulate folgen.

Das Postulat (RelP) hat folgende Form:

(RelP) Falls $B = \mathrm{Cn}(\{\beta_1, \beta_2\})$, wobei $\mathcal{V}(\beta_1) \subseteq \mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}(\beta_2) \subseteq \mathcal{V}_2$ und $\mathcal{V}(\alpha) \subseteq \mathcal{V}_1$, dann ist $B * \alpha = \mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(\beta_1) *' \alpha \cup \{\beta_2\})$. Dabei ist $*'$ der Revisionsoperator[7] für die Teilsprache $\mathrm{Satz}(\mathcal{V}_1)$.

[7] Parikh nennt $*'$ zwar einen Updateoperator, es deutet allerdings nichts darauf hin, dass er damit einen Updateoperator im Sinne von Katsuno und Mendelzon (1991) meint.

Parikhs Begründung für das Postulat lautet: Die neue Information α bezog sich nur auf $\mathcal{V}_1$, daher sollte nur der $\mathcal{V}_1$-Anteil von B revidiert werden.

Die AGM-Postulate zusammen mit dem Postulat (RelP) sind tatsächlich operationalisierbar.

Theorem 5.7. *(Parikh, 1999) Es gibt einen Operator, der die sechs Basispostulate von AGM und das Postulat (RelP) erfüllt.*

Parikhs Konstruktion eines Operators, die das Theorem belegt, wurde bereits in Abschnitt 4.1.3 beschrieben.

Die Reinterpretationsoperatoren erfüllen das Relevanzkriterium (RelKriPa) und sogar die verschärfte Variante (RelKriPa').

Beobachtung 5.8. *Alle (bisher definierten) Reinterpretatiosoperatoren erfüllen das Kriterium* (RelKriPa')*.*

Beweis. Siehe S. 265.

Das Kriterium (RelKriPa') kann genutzt werden, um Reinterpretationsoperatoren von solchen Entkopplungsoperatoren zu unterscheiden, die eine vollständige Entkopplung der Ontologien vornehmen, indem sie alle Symbole (der Empfängerontologie im Falle des Typs 2) durch neue ersetzen. Jedoch ist (RelKriPa') nicht ausreichend, um die Reinterpretationsoperatoren von der Klasse solcher Entkopplungsoperatoren zu unterscheiden, die eine Entkopplung bzgl. einer minimalen Symbolmenge vornehmen wie z.B. einem Operator $\circ^{triv}_{min}$, der definiert ist über $O_1 \circ^{triv}_{min} O_2 = O_1\sigma_S \cup O_2$ für $\mathrm{supp}(\sigma) = S \in \mathrm{MRS}(O_1, O_2)$. Denn der Beweis für Beobachtung 5.8 lässt sich auch auf diese engere Klasse der Entkopplungsoperatoren $\circ^{triv}_{min}$ anwenden.

Als Fazit dieses Abschnitts lässt sich daher festhalten: Das Relevanzpostulat von Hansson wird von den Reinterpretationsoperatoren nicht erfüllt und kann daher in seiner ursprünglichen Form nicht benutzt werden, um Reinterpretationsoperatoren von den Entkopplungsoperatoren abzugrenzen. Die Reinterpretationsoperatoren erfüllen das Relevanzkriterium von Parikh (RelKriPa) (auch die schärfere Variante (RelKriPa')) und fallen damit zumindest nicht in die Kategorie der gedächtnislosen Operatoren. Dennoch reicht das Kriterium von Parikh nicht aus, eine Grenze zwischen Reinterpretationsoperatoren und solchen Entkopplungsoperatoren zu ziehen, die nur eine minimale Menge von Symbolen dissoziieren. Aus diesem Grunde ist ein anderes Relevanzpostulat zu definieren, das eine Abgrenzung ermöglicht. Abschnitt 5.2 definiert eine Modifikation des Postulats von Hansson, die eine Abgrenzung ermöglicht.

5.1.2 Inklusionspostulate

Obwohl die Inklusionspostulate der klassischen Belief-Revision nicht im Kontext der Minimalität besprochen werden, tragen sie durch die Angabe einer Oberschranke für das Revisionsresultat entscheidend dazu bei, das Revisionsresultat nicht zu groß werden zu lassen.

Das Inklusionspostulat (AGM-R 3) (erstes AGM-Expansionspostulat für Belief-Sets) beschränkt das Revisionsresultat sowohl im Inkonsistenz- wie auch im Konsistenzfall durch das Ergebnis der Expansion des Empfänger-Belief-Sets BS mit dem Trigger α. Wenn der zu Grunde liegende Folgerungsoperator Cn ein klassischer Folgerungsoperator ist, resultiert die Expansion von BS mit α im Inkonsistenzfall in der Menge aller Sätze. Daher ergibt das Inklusionspostulat für Belief-Sets im Inkonsistenzfall keine interessante Oberschranke für das Revisionsresultat. Anders verhält es sich mit dem Inklusionspostulat für Belief-Bases (MR 3), (S. 33). Dieses besagt, dass die Revision einer Belief-Base B_1 mit einer triggernden Belief-Base B_2 eine Teilmenge von $B_1 \cup B_2$ ist. Auch im Inkonsistenzfall bildet $B_1 \cup B_2$ eine echte Oberschranke für das Revisionsresultat. Das Inklusionspostulat für Belief-Bases garantiert somit, dass Belief-Base-Operatoren nicht mehr Sätze in das Revisionsresultat hinzufügen, als in der initialen Wissensbasis und der triggernden Wissensbasis vorhanden sind.

Bedingt durch die Einführung neuer Symbole können Reinterpretationsoperatoren das Inklusionspostulat für Belief-Bases nicht erfüllen. Die Reinterpretationsoperatoren $\circ$ erfüllen hingegen die abgeschwächte Variante des Inklusionspostulats (Reint 3), d.h. es gilt:

$$(O_1 \circ O_2) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O_1)) \subseteq O_1 \cup O_2$$

Die abgeschwächte Variante des Inklusionspostulats trägt jedoch nur in geringem Maße zu einer Oberabschätzung des Resultats bei. Sie kann nicht verhindern, dass beliebig komplexe Brückenaxiome eingeführt werden, mit denen sich Axiome (in der Interfacesprache $\mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$ folgern lassen, die nicht durch O_1 oder O_2 zu rechtfertigen sind. In Abschnitt 5.3 wird ein Vorschlag für eine Variante des Inklusionspostulats definiert, die eine hinreichend kleine Oberschranke für schwache Reinterpretationsoperatoren definiert.

5.2 Unterabschätzungen

Die in Abschnitt 3.1 gegebenen Integrationspostulate bilden zusammen nur eine Menge von notwendigen Bedingungen für Reinterpretationsoperatoren. Mit ihnen können die schwachen Reinterpretationsoperatoren nicht von trivialen Entkopplungsoperatoren $\circ_i^{triv}$ wie den folgenden des Typs 2 abgegrenzt werden:

$$O_1 \circ_2^{triv} O_2 = O_1 \sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2$$

Der Operator $\circ_2^{triv}$ bewirkt lediglich eine Entkopplung der Ontologien; Brückenaxiome, mit denen Axiome der Empfängerontologie in der Interfacesprache konserviert werden könnten, fehlen vollständig.

Um die schwachen Operatoren auch von solchen Entkopplungsoperatoren $\circ_{min}^{triv}$ abgrenzen zu können, die nur eine minimale Menge von Symbolen entkoppeln, bietet sich eine Modifikation des Relevanzkriteriums von Hansson (Hansson, 1993a) an (s. diese Arbeit S. 124). In dem folgenden Unterabschnitt wird unter dem Terminus *Reinterpretationsrelevanz* eine Modifikation formuliert, die von den schwachen Reinterpretationsoperatoren erfüllt wird. Die Modifikation ist nötig, da bei Reinterpretationsoperatoren nicht Sätze für mögliche Widersprüche verantwortlich gemacht werden, sondern Symbole. Dieser Wechsel in der Perspektive erfordert im Falle von beschreibungslogischen und prädikatenlogischen Ontologien auch eine Aufschlüsselung der inneren Struktur der Empfängerontologie. Der Grund ist, dass sich die für einen Widerspruch verantwortlichen Symbole im Scopus von Quantoren befinden können. Widersprüche entstehen jedoch nur auf Satzebene. Daher werden mit den Symbolen „kleinste“ Sätze assoziiert, in denen die Symbole vorkommen. Hierfür wird die Empfängerontologie in Pränexform überführt und skolemisiert[8]. Für die resultierende Skolemformel werden bestimmte prädikatenlogische Folgerungen gebildet, die in einer noch zu definierenden Weise prim sind. Es resultiert eine im Falle der Aussagenlogik äquivalente, im Falle der Prädikatenlogik erfüllbarkeitsäquivalente Ontologie. Eine für die Umformung wichtige Eigenschaft ist die, dass sie nicht die Widerspruchscharakteristik ändern darf. Insbesondere darf die Umformung der Empfängerontologie nicht dazu führen, dass Symbole der Empfängerontologie, die vorher nicht für einen Widerspruch mit der Senderontologie verantwortlich gemacht werden konnten, nach der Umformung zu einem Widerspruch führen können.

Die Konstruktion der Primkonsequenzen lässt sich nicht ohne Weiteres auf Beschreibungslogiken übertragen, da sie die Bildung von Disjunktionen (von Literalen) voraussetzt. Für die Auswertung der Reinterpretationsoperatoren durch das Kriterium der Reinterpretationsrelevanz wird daher die mächtigere Prädikatenlogik (erster Stufe) zu Grunde gelegt und die Einbettbarkeit von Beschreibungslogiken in die Prädikatenlogik benutzt. Ich gehe daher im Folgenden direkt von aussagenlogischen oder prädikatenlogischen Wissensbasen aus.

Das modifizierte Relevanzpostulat für Reinterpretationsoperatoren basiert auf der Idee, dass ein Satz β der Empfängerontologie nur dann aus dem Integrationsresultat ausgeschlossen wird, wenn es einen verwandten Satz ϵ aus einer

[8]Siehe Anhang A, S. 240.

(erfüllbarkeits-)äquivalenten Normalform der Empfängerontologie gibt, der zusammen mit anderen Formeln (aus der Normalform) der Empfängerontologie zu einem Widerspruch mit der Senderontologie führt. Die Normalformen basieren auf Primkonsequenzen, die im folgenden Unterabschnitt eingeführt werden.

5.2.1 Primkonsequenzen

Im Relevanzkriterium wird eine erfüllbarkeitsäquivalente Darstellung der Empfängerontologie nötig, die im Folgenden beschrieben wird. Ich behandle die nötigen Begriffe für aussagenlogische und prädikatenlogische Wissensbasen parallel. Insbesondere werden auch das Relevanzkriterium und die in seinem Kontext bewiesenen Sätze sowohl für aussagenlogische Wissensbasen als auch für prädikatenlogische Wissensbasen formuliert. Diese Parallelität erfordert folgende Verabredungen:

- Wenn die Wissensbasen O_1, O_2 aussagenlogisch sind, dann wird σ als eine Substitution verstanden, die Aussagensymbole substituiert und $\mathrm{BA}(\sigma)$ steht für eine Menge von einfachen Implikationen:

  $$\mathrm{BA}(\sigma) = \{\sigma(s) \rightarrow s, s \rightarrow \sigma(s) \mid s \in \mathrm{supp}(\sigma)\}$$

  Wenn prädikatenlogische Wissensbasen (Ontologien) behandelt werden, dann steht $\mathrm{BA}(\sigma)$ für Subsumptionsbeziehungen von Rollen- und Konzeptsymbolen und für Identitäten zwischen Konstanten:

  $$\begin{aligned} \mathrm{BA}(\sigma) \quad = \quad & \{\sigma(s) \sqsubseteq s, s \sqsubseteq \sigma(s) \mid s \in (\mathrm{supp}(\sigma))_{KR}\} \cup \\ & \{s \doteq \sigma(s) \mid s \in (\mathrm{supp}(\sigma))_{Konst}\} \end{aligned}$$

  Ich verwende auch im Falle der Prädikatenlogik die kürzere Notation der Beschreibungslogik; da bei der Einbettung von Beschreibungslogiken in die Prädikatenlogik nur 1-stellige Prädikatsymbole (entsprechen Konzeptsymbolen) und 2-stellige Prädikatsymbole entstehen, werden auch nur für diese Subsumptionsbeziehungen in $\mathrm{BA}(\sigma)$ aufgenommen. Betrachtet man ganz allgemein prädikatenlogische Wissensbasen, die nicht aus der äquivalenten Übersetzung von beschreibungslogischen Wissensbasen entstehen, müssten Subsumptionsbeziehungen zwischen n-stelligen Relationen und auch Funktionen betrachtet werden. Die folgenden Ergebnisse gelten auch für diese Verallgemeinerung; der Einfachheit halber betrachte ich nur prädikatenlogische Wissensbasen, die aus der Übersetzung von beschreibungslogischen Wissensbasen entstehen.

- Die Skolemform einer aussagenlogischen Formel ist die Formel selbst.

Sei X eine Menge von aussagenlogischen Sätzen. $\mathrm{Kl}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{AL}}(X)$ ist die Menge aller Klauseln[9] über dem Vokabular $\mathcal{V}$, die aus X folgen. Für das Relevanzkriterium wird ein syntaktischer Begriff von Primheit verwendet.[10]

In der Literatur wird der syntaktische Primheitsbegriff unter dem Terminus Dual Blake Canonical Form (DBCF) eingeführt (Armstrong et al., 1998).[11]

$$\begin{aligned}\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{AL}}(X) &= \{kl \in \mathrm{Kl}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{AL}}(X) \mid kl \text{ ist keine Tautologie und es gibt keine} \\ &\qquad \text{Klausel } kl' \in \mathrm{Kl}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{AL}}(X)\text{, die eine echte Teilklausel von } kl \text{ ist}\}.\end{aligned}$$

Es lässt sich einfach zeigen, dass eine Menge von aussagenlogischen Formeln mit der Menge ihrer Primkonsequenzen äquivalent ist.

Proposition 5.9. *Für beliebige Mengen X von aussagenlogischen Formeln und Vokabulare $\mathcal{V}$ mit $\mathcal{V}(X) \subseteq \mathcal{V}$ gilt:*

$$\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{AL}}(X) \equiv X$$

Beweis. Siehe S. 266.

Für prädikatenlogische Formeln lässt sich ebenfalls ein syntaktischer Begriff der Primheit definiert, der die Idee für die DBCF imitiert. Dieser syntaktische Begriff der Primheit ist derjenige, der im Kriterium der Reinterpretationsrelevanz verwendet wird.

Eine prädikatenlogische Formel α ist eine universelle Formel genau dann, wenn α äquivalent in eine Pränexformel überführt werden kann, die nur Allquantoren besitzt. Eine universelle Formel der Form $\forall x_1 \ldots \forall x_n (li_1 \vee \cdots \vee li_m)$, wobei li_j Literale mit Variablen aus $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sind, wird eine *prädikatenlogische Klausel* genannt. Eine prädikatenlogische Klausel $\alpha_1 = \forall x_1 \ldots \forall x_n \beta$ ist eine *(echte) Teilklausel* einer prädikatenlogischen Klausel α_2, wenn α_2 die Form hat: $\alpha_2 = \forall y_1 \ldots \forall y_n \delta$, wobei alle x_i unter den y_j vorkommen und die Menge der in β vorkommenden Literale eine (echte) Teilmenge der Literale in δ ist.

Sei X eine Menge von universellen Formeln. Die Menge der *prädikatenlogischen Klauseln von X über einem Vokabular $\mathcal{V}$*, kurz $\mathrm{Kl}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(X)$, ist die Menge aller aus

[9] Vgl. Anhang A, S. 240.

[10] Es lassen sich auch semantische Pendants für Primklauseln definieren. Für aussagenlogische Primheit lässt sich dann sogar zeigen: a) Semantische und syntaktische Primheit sind identisch und b) jede Formelmenge ist äquivalent zu der Menge ihrer (syntaktischen bzw. semantischen) Primkonsequenzen. Auch für die Prädikatenlogik lässt sich ein zum aussagenlogischen Fall paralleler semantischer Primheitsbegriff definieren. Allerdings sind syntaktische und semantische Primheit verschieden und außerdem kann nicht garantiert werden, dass eine Menge von prädikatenlogischen Formeln äquivalent ist zu der Menge ihrer semantischen Primkonsequenzen.

[11] In der Definition der Primkonsequenzen gemäß Armstrong und Kollegen (Armstrong et al., 1998) werden zwar Tautologien nicht explizit ausgeschlossen; in ihren Beispielen kommen jedoch für nichttautologische X unter den Primkonsequenzen von X keine Tautologien vor.

X folgenden prädikatenlogischen Klauseln in Satz($\mathcal{V}$).

$$\mathrm{Kl}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(X) \quad = \quad \{\alpha \in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}}(X) \mid \alpha \text{ ist eine prädikatenlogische Klausel}\}$$

Wenn α eine Formel ist, wird $\mathrm{Kl}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(\alpha) = \mathrm{Kl}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(\{\alpha\})$ gesetzt. Auch für Mengen X von prädikatenlogischen Formeln, die nicht alle universell sind, kann die Menge der zu X gehörenden prädikatenlogischen Klauseln definiert werden. Hierfür wird eine Skolemisierung benutzt: Jede Formel $\alpha \in X$ wird mit neuen Skolemsymbolen skolemisiert. Das Ergebnis der Skolemisierung wird mit X^* bezeichnet. Seien $\mathcal{V}_{sk}$ die dabei erzeugten neuen Skolemsymbole. Dann ist die Menge der *prädikatenlogischen Klauseln von X über einem Vokabular $\mathcal{V}$ und den Skolemsymbolen $\mathcal{V}_{sk}$* definiert durch $\mathrm{Kl}^{\mathcal{V}\cup\mathcal{V}_{sk}}_{\mathrm{PL}}(X^*)$. Im Folgenden werden öfter Skolemisierungen O^* von Ontologien (zusammen mit Brückenaxiomen) benutzt werden. Die Klauseln, die aus O^* folgen, werden immer bezüglich eines Vokabulars betrachtet, in dem die Skolemsymbole enthalten sind.

Die Menge der *prädikatenlogischen Primkonsequenzen* von einer Menge von universellen Formeln X bzgl. $\mathcal{V}$ setzt sich aus solchen nichttautologischen, prädikatenlogischen Klauseln von X zusammen, für die es keine echte Teilklausel aus $\mathrm{Kl}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(X)$ gibt.

$$\begin{aligned}\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(X) \quad = \quad & \{pr \in \mathrm{Kl}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(X) \mid pr \text{ ist nicht tautologisch und es gibt keine} \\ & \text{Formel } kl \in \mathrm{Kl}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(X)\text{, die eine echte Teilklausel von } pr \text{ ist}\}\end{aligned}$$

Bemerkung 6. Selbst wenn X endlich ist, kann $\mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(X)$ unendlich sein.

Beobachtung 5.10. *Sei $\mathcal{V}$ ein Vokabular. Für jede Menge von universellen Formeln X in der Prädikatenlogik mit $\mathcal{V}(X) \subseteq \mathcal{V}$ gilt: $X \equiv \mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(X)$.*

Beweis. Siehe S. 266.

5.2.2 Das Kriterium der Reinterpretationsrelevanz

Das Kriterium der Reinterpretationsrelevanz (ReintRel) (s.u.) ist durch Hanssons Relevanzkriterium (HR 4) für Revisionsoperatoren über Belief-Bases motiviert (Hansson, 1993a). Inhaltlich besagt (ReintRel), dass es für jede aus der Empfängerontologie folgende Klausel β, die nicht aus dem Integrationsergebnis $O_1 \circ O_2$ folgt, einen relevanten Grund für die Nichtkonservierung geben muss. Dabei liegt ein relevanter Grund dafür, dass ein β nicht konserviert wird, genau dann vor, wenn es einen mit β verwandten Satz ϵ aus einer (erfüllbarkeits-)äquivalenten Normalform der Empfängerontologie gibt, der für einen Widerspruch mit der Senderontologie verantwortlich gemacht werden kann.

Die in der formalen Fassung des Postulats (ReintRel) verwendete Verwandtschaftsbeziehung zwischen zwei Sätzen lässt sich unter Nutzung der Begriffe des semantisch negativen und semantisch positiven Vorkommens[12] eines Symbols explizieren.

Definition 5.11. Es sei s ein Konzept- oder Rollensymbol (bzw. allgemein ein Prädikatsymbol), das echt in β und ϵ vorkommt. Dann heißen β und ϵ *verwandt bzgl.* s, wenn gilt:

- s kommt gemischt in β oder ϵ vor, kurz $\mathrm{gemV}(s, \epsilon)$ oder $\mathrm{gemV}(s, \beta)$; oder
- s kommt positiv in β und ϵ vor, kurz $\mathrm{posV}(s, \epsilon)$ und $\mathrm{posV}(s, \beta)$; oder
- s kommt negativ in β und ϵ vor, kurz $\mathrm{negV}(s, \epsilon)$ und $\mathrm{negV}(s, \beta)$.

Bemerkung 7. Der Vollständigkeit halber können auch Konstanten in der Verwandtschaftsbeziehung berücksichtigt werden. Für Konstanten s werden Sätze β und ϵ bereits dann als verwandt angesehen, wenn beide s echt enthalten. Da im Folgenden nur Konzept- und Rollensymbole (bzw. allgemeiner mehrstellige Prädikatsymbole) reinterpretiert werden, wird in Definition 5.11 die Verwandtschaft auf diese eingeschränkt.

Mit dem Begriff des positiven und negativen Vorkommens sowie dem Begriff der Primkonsequenz lässt sich das modifizierte Relevanzkriterium wie folgt formalisieren. Das Kriterium wird so allgemein gefasst, dass es auch auf aussagenlogische Wissensbasen O_1, O_2 und die darauf operierenden aussagenlogischen Reinterpretationsoperatoren angewandt werden kann. Es bezeichne daher im Folgenden $\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}$ den Operator $\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{AL}}$ oder $\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}$.

(ReintRel) Ein Operator $\circ$ erfüllt das Kriterium der Reinterpretationsrelevanz genau dann, wenn gilt:

- Für alle paarweise disjunkten Vokabulare $\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i, \mathcal{V}_{sk}$ und $\mathcal{V} = \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i \cup \mathcal{V}_{sk}$,
- Ontologien $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \emptyset \rangle$, die (im Falle der Prädikatenlogik) reinterpretationskompatibel allein bzgl. der Prädikatsymbole sind,
- Skolemisierungen O_1^* der Formel $\bigwedge O_1$ mit Skolemsymbolen aus $\mathcal{V}_{sk}$
- und (aussagen- oder prädikatenlogischen) Klauseln $\beta \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$ gilt:

Wenn $O_1 \models \beta$ und $O_1 \circ O_2 \not\models \beta$, dann gibt es eine Menge X und einen Satz $\epsilon \in X$, so dass gilt:

[12] Siehe Anhang A, Definition A.19, S. 237.

1. $X \subseteq \mathrm{Prim}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}}(O_1^*)$;

2. $X \cup O_2$ ist widersprüchlich;

3. $X \setminus \{\epsilon\} \cup O_2$ ist widerspruchsfrei und

4. ϵ ist mit β bzgl. eines Aussagensymbols bzw. eines Prädikatsymbols s verwandt.

(ReintRel) bezieht sich nicht explizit auf die Konstruktion des Operators $\circ$. Insbesondere bleibt in (ReintRel) die Menge der Hypothesen (Brückenaxiome), auf der die Konstruktion der Reinterpretationsoperatoren beruht, unerwähnt. Daher hat das Postulat (ReintRel) den für klassische Revisionspostulate gewünschten Charakter einer Black-Box-Spezifikation.

Das Kriterium (ReintRel) drückt nur eine sehr schwache Form von Relevanz aus. Eine Klausel β kann bereits dann im Integrationsresultat fehlen, wenn es eine mit β verwandte Primkonsequenz der skolemisierten Empfängerontologie gibt, die zusammen mit anderen Primkonsequenzen zu einem Widerspruch mit O_2 führt. Das Relevanzpostulat von Hansson (1993a) kommt ohne Modifikation der Empfängerontologie und ohne die Bildung von Primkonsequenzen aus und fordert, dass β selber (zusammen mit anderen Sätzen) zu einem Widerspruch – und hier sogar – mit dem Integrationsresultat führt.

Obwohl das Postulat (ReintRel) eine schwache Form von Relevanz ausdrückt, ist es zumindest so stark, dass es im Allgemeinen nicht von den Entkopplungsoperatoren $\circ_2^{triv}$ und auch nicht von den Operatoren $\circ_{2,min}^{triv}$, die nur bzgl. einer minimalen Symbolmenge dissoziieren, erfüllt wird. D.h. es gibt Mengen von Ontologieaxiomen O_1 und O_2, so dass die in (ReintRel) genannten Bedingungen für $O_1 \circ_{2,min}^{triv} O_2$ nicht erfüllt sind.

Beispiel 5.12. Es seien

$$\begin{aligned} O_1 &= \{K(a), \neg K(c)\} \\ O_2 &= \{\neg K(a)\} \\ O_1 \circ_{2,min}^{triv} O_2 &= \{K'(a), \neg K'(c), \neg K(a)\} \end{aligned}$$

Es ist $\mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(O_1^*) = O_1^* = O_1 = \{K(a), \neg K(c)\}$. Sei $\beta = \neg K(c)$. Es gilt $O_1 \models \beta$ und $O_1 \circ_{2,min}^{triv} O_2 \not\models \beta$. Für das Konzeptsymbol K gibt es keine Teilmenge $X \subseteq \mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(O_1^*)$, die die Bedingungen erfüllt. Denn einzig $X = \{K(a), \neg K(c)\}$ ist eine Menge, die mit $\epsilon = \neg K(c)$ eine Formel enthält, in der K bzgl. O_1 negativ vorkommt und die zu einem Widerspruch mit O_2 führt. Allerdings ist X nicht minimal in dieser Eigenschaft, da bereits die Teilmenge $\{K(a)\}$ zu einem Widerspruch mit O_2 führt.

5.2.3 Schwache Operatoren erfüllen Reinterpretationsrelevanz

Für den Beweis des Theorems, dass die schwachen Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 die Reinterpretationsrelevanz erfüllen (Theorem 5.19), werden folgende Aussagen benötigt.

Proposition 5.13. *Es sei α eine prädikatenlogische Formel und α^* eine Skolemisierung mit Skolemsymbolen, die nicht in $\mathcal{V}_c$ enthalten sind. Dann gilt, dass α und seine Skolemisierung α^* dieselbe Menge an Sätzen der öffentlichen Sprache implizieren:* $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\alpha) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\alpha^*)$.

Beweis. Siehe S. 266.

Für den Beweis von 5.19 ist außerdem die Beobachtung hilfreich, dass die im Integrationsresultat $O_1 \circ O_2$ konservierten Axiome aus der Empfängerontologie durch das semantisch positive (bzw. negative) Vorkommen von Symbolen charakterisiert werden können.

Es wird folgende zweistellige Hilfsfunktion g definiert:

$$g(ba, \alpha) = \begin{cases} \mathrm{posVon}(s, \alpha), & \text{falls } ba = s' \sqsubseteq s \\ \mathrm{negVon}(s, \alpha), & \text{falls } ba = s \sqsubseteq s' \end{cases}$$

Wenn z.B. $ba = s' \sqsubseteq s$ gilt, dann ist $g(ba, \alpha) = \mathrm{posVon}(s, \alpha)$, d.h. dass s semantisch positiv oder syntaktisch gar nicht in α vorkommt.

In dem Relevanzkriterium wird eine Umformung von Ontologien und Brückenaxiomen in eine Skolemform vorausgesetzt. Für die folgende Proposition wird eine besondere Form der Skolemisierung einer Ontologie $O\sigma$ zusammen mit einer Menge von Brückenaxiomen $B \subseteq \mathrm{BA}(\sigma)$ verwendet. Es sei $O^* = \forall \tilde{x}_1 \ldots \forall \tilde{x}_m \tilde{O}$ eine Skolemisierung von O mit Skolemkonstanten, die nicht in $\mathcal{V}(O \cup O\sigma)$ vorkommen. Dann ist $O^*\sigma = \forall \tilde{x}_1 \ldots \forall \tilde{x}_m \tilde{O}\sigma$ eine Skolemisierung von $O\sigma$. Es sei weiter $\forall z \tilde{B}$ eine äquivalente Pränexform von $B \subseteq \mathrm{BA}(\sigma)$. Dann ist $(O\sigma \cup B)^*$ eine O^**-treue Skolemisierung* von $O\sigma \cup B$, wenn sie die Form hat: $(O\sigma \cup B)^* = \forall z \forall \tilde{x}_1 \ldots \forall \tilde{x}_m (\tilde{O}\sigma \wedge \tilde{B})$.

Proposition 5.14. *Es seien $s_i' \in \mathcal{V}$, $1 \leq i \leq n$, n verschiedene Symbole aus einem Vokabular $\mathcal{V}$ und sei $\mathcal{V}_n = \mathcal{V} \setminus \{s_1', \ldots, s_n'\}$. Sei weiter O eine Satzmenge mit $\mathcal{V}(O) \subseteq \mathcal{V}_n$, $ba(s_i) \in \{s_i \to s_i', s_i' \to s_i\}$ (im Falle der Aussagenlogik) bzw. $ba(s_i) \in \{s_i \sqsubseteq s_i', s_i' \sqsubseteq s_i\}$ (im Falle der Prädikatenlogik bzw. Beschreibungslogik) und $\sigma = [s_1/s_1', \ldots, s_n/s_n']$. Es sei $B_k = \{ba(s_1), \ldots, ba(s_k)\}$ für $k \leq n$. Weiter sei $(O\sigma \cup B_k)^*$ eine O^*-treue Skolemisierung von $O\sigma \cup B_k$ mit Skolemsymbolen aus $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}(O) \setminus \mathcal{V}(O\sigma)$ und schließlich sei $\mathrm{Kl}^{\mathcal{V}_n}(\cdot) \in \{\mathrm{Kl}^{\mathcal{V}_n}_{\mathrm{AL}}(\cdot), \mathrm{Kl}^{\mathcal{V}_n}_{\mathrm{PL}}(\cdot)\}$. Dann gilt für* *alle* $1 \leq k \leq n$*:*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Kl}^{\mathcal{V}_n}((O\sigma \cup B_k)^*) & = & \{\beta \in \mathrm{Kl}^{\mathcal{V}_n}(O^*) \mid \textit{Es gibt eine Klausel } \epsilon \textit{ mit:} \\ & & \epsilon \in \mathrm{Kl}^{\mathcal{V}_n}((O\sigma \cup B_k)^*); \\ & & \epsilon \models \beta; \\ & & \epsilon \textit{ enthält kein Symbol aus } \{s_{k+1}, \ldots, s_n\} \textit{ und} \\ & & \textit{für alle } 1 \leq i \leq k \textit{ gilt: } g(ba(s_i), \epsilon)\} \end{array}$$

Beweis. Siehe S. 267.

Folgendes Lemma besagt, dass die Einführung von beiden Brückenaxiomen $s' \sqsubseteq s, s \sqsubseteq s'$ auf Interfaceebene denselben Effekt hat, wie wenn man das neue Symbol s' in der Ontologie in das alte Symbol s zurückübersetzt.

Lemma 5.15. *Sei O eine aussagenlogische oder prädikatenlogische Wissensbasis, σ eine Substitution mit $s \in \mathrm{supp}(\sigma)$, $s' = \sigma(s) \notin \mathcal{V}_c$. Weiter sei B eine Menge von Brückenaxiomen $B = \{s' \rightarrow s, s \rightarrow s'\}$ bzw. $B = \{s' \sqsubseteq s, s \sqsubseteq s'\}$. Dann gilt:*

$$\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O\sigma \cup B) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O\sigma[s'/s])$$

Damit lässt sich Proposition 5.14 verallgemeinern auch für den Fall, dass die Symbole s_i nicht alle verschieden sind und daher für ein Symbol s_i beide Brückenaxiome vorkommen können.

Korollar 5.16. *Sei $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ eine Menge paarweise verschiedener Symbole aus einem Vokabular $\mathcal{V}$, $\sigma = [s_1/s'_1, \ldots, s_n/s'_n]$ eine injektive Substitution mit $s'_i \in \mathcal{V} \setminus S$, $1 \leq i \leq n$. Sei $\mathcal{V}_n = \mathcal{V} \setminus \{s'_1, \ldots, s'_n\}$. Sei O eine Satzmenge mit $\mathcal{V}(O) \subseteq \mathcal{V}_n$ und $B \subseteq \mathrm{BA}(\sigma)$ eine Menge von Brückenaxiomen $ba(s_i)$ der Form $ba(s_i) \in \{s_i \rightarrow s'_i, s'_i \rightarrow s_i\}$ (Aussagenlogik) bzw. $ba(s_i) \in \{s_i \sqsubseteq s'_i, s'_i \sqsubseteq s_i\}$ (Prädikatenlogik bzw. Beschreibungslogik), $1 \leq i \leq n$. Es sei $(O\sigma \cup B)^*$ eine O^*-treue Skolemisierung von $O\sigma \cup B$ mit Skolemsymbolen aus $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}(O) \setminus \mathcal{V}(O\sigma)$ und $\mathrm{Kl}(\cdot) \in \{\mathrm{Kl}_{\mathrm{AL}}(\cdot), \mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}(\cdot)\}$. Und schließlich sei $U \subseteq S$ die Menge aller Symbole $s_i \in S$, so dass $\{s'_i \sqsubseteq s_i, s_i \sqsubseteq s'_i\} \subseteq B$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Kl}^{\mathcal{V}_n}((O\sigma \cup B)^*) & = & \{\beta \in \mathrm{Kl}^{\mathcal{V}_n}(O^*) \mid \textit{Es gibt eine Klausel } \epsilon \textit{ mit:} \\ & & \epsilon \in \mathrm{Kl}^{\mathcal{V}_n}((O\sigma \cup B)^*); \\ & & \epsilon \models \beta; \\ & & \epsilon \textit{ enthält kein Symbol aus } S \setminus \mathcal{V}(B) \textit{ und} \\ & & \textit{für alle } s_i \in (S \cap \mathcal{V}(B)) \setminus U \textit{ gilt: } g(ba(s_i), \epsilon)\} \end{array}$$

Die für den Beweis von Theorem 5.19 wesentliche Eigenschaft wird in der Proposition 5.17 festgehalten. Die $\subseteq$-Beziehung in Proposition 5.17 besagt, dass durch die Einschränkung aller Primkonsequenzen von $O\sigma$ auf die öffentliche Sprache keine Folgerungen der öffentliche Sprache verloren gehen.

Proposition 5.17. *Seien Vokabulare* $\mathcal{V}_c$ *und* $\mathcal{V}_i$ *mit* $\mathcal{V}_c \cap \mathcal{V}_i = \emptyset$ *gegeben. Sei* $\mathcal{V} = \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i$*. Sei* O *eine Menge von aussagenlogischen bzw. universellen prädikatenlogischen Formeln in der Prädikatenlogik erster Stufe ohne Identität,* σ *eine Substitution von Aussagen- bzw. Prädikatsymbolen* s *durch neue Symbole* $\sigma(s) \in \mathcal{V}_i$ *und* $\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}(\cdot)$ *der Operator* $\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{AL}}(\cdot)$ *bzw.* $\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(\cdot)$*. Dann gilt:*

$$\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Prim}(O\sigma)) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Prim}(O\sigma) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c))$$

Beweis. Siehe S. 269.

Eine weitere für den Beweis von Theorem 5.19 hilfreiche Aussage ist, dass alle Primkonsequenzen von $(O\sigma \cup B)^*$, die keine Symbole des internen Vokabulars (aber eventuell Skolemsymbole) enthalten, eine Menge von Primkonsequenzen von O^* ist.

Proposition 5.18. *Seien* $\mathcal{V}_c$*,* $\mathcal{V}_i$*,* $\mathcal{V}_{sk}$ *paarweise disjunkte Vokabulare und sei* $\mathcal{V} = \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i \cup \mathcal{V}_{sk}$*. Sei* O *eine aussagenlogische oder eine prädikatenlogische Wissensbasis in der Prädikatenlogik erster Stufe mit* $\mathcal{V}(O) \subseteq \mathcal{V}_c$ *und* σ *eine Substitution von Aussagen- bzw. Prädikatsymbolen* s *durch neue Symbole* $\sigma(s) \in \mathcal{V}_i$*. Sei* $B \subseteq \mathrm{BA}(\sigma)$ *eine Teilmenge von Brückenaxiomen,* $(O\sigma \cup B)^*$ *eine* O^**-treue Skolemisierung von* $O\sigma \cup B$ *mit Skolemkonstanten aus* $\mathcal{V}_{sk}$ *und* $\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}(\cdot) \in \{\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{AL}}(\cdot), \mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(\cdot)\}$ *sowie* $\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}}(\cdot) \in \{\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}}_{\mathrm{AL}}(\cdot), \mathrm{Prim}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}}_{\mathrm{PL}}(\cdot)\}$*. Dann gilt:*

$$\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}((O\sigma \cup B)^*) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O^*)) \subseteq \mathrm{Prim}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}}(O^*)$$

Beweis. Siehe S. 274.

Mit diesen Aussagen lässt sich schließlich zeigen, dass die schwachen aussagenlogischen Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 bzw. die prädikatenlogischen Reinterpretationsoperatoren des Typs 2, welche nur Prädikatsymbole (und nicht auch Funktionssymbole oder Konstanten) reinterpretieren, das Relevanzkriterium (ReintRel) erfüllen.

Theorem 5.19. *Sei* $\otimes_2^{\overline{\gamma}}$ *ein schwacher aussagenlogischer Reinterpretationsoperator des Typs 2 bzw. ein prädikatenlogischer Reinterpretationsoperator des Typs 2, der nur Prädikatsymbole reinterpretiert. Dann erfüllt* $\otimes_2^{\overline{\gamma}}$ *das Kriterium der Reinterpretationsrelevanz (ReintRel) für alle aussagenlogischen bzw. prädikatenlogischen Wissensbasen über der Prädikatenlogik erster Stufe ohne Identität.*

Beweis. Siehe S. 274.

5.3 Oberabschätzungen

5.3.1 Definition von starken Operatoren

In Abschnitt 3.3 wurden neben den schwachen Reinterpretationsoperatoren für triggernde (konzeptbasierte) Literale auch schwache Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien definiert. Die starken (und selektionsbasierten) Reinterpretationsoperatoren für triggernde Literale lassen sich nicht kanonisch auf triggernde Ontologien erweitern, da ihre Konstruktion auf der einfachen Form des triggernden Literals mit einer eindeutig bestimmten Konstanten, für die Konzepte der Empfängerontologie selektiert werden, beruht.

In diesem Abschnitt wird eine Definition für starke Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien vorgeschlagen, die die starken Operatoren für triggernde Literale in natürlicher Weise erweitert. Anhand eines Beispiels wird gezeigt, dass die so definierten Operatoren in dem Sinne zu stark sind, dass das Integrationsresultat mehr Information abzuleiten gestattet als in den Ausgangsontologien „vorhanden“ ist. Der darauf folgende Abschnitt expliziert diese Eigenschaft der starken Operatoren formal durch ein Oberabschätzungspostulat (EInkl(Anr$^{\mathrm{AL}}$)) für aussagenlogische Reinterpretationsoperatoren bzw. (EInkl(Anr$^{\mathrm{PL}}$)) für prädikatenlogische Reinterpretationsoperatoren. Diese Postulate werden dabei als Instanzen eines Postulatsschemas (EInkl(Anr)) eingeführt, das einen einstelligen Operator Anr($\cdot$) zur (erfüllbarkeits-)äquivalenten Anreicherung der Empfängerontologie als Parameter enthält. Während die schwachen Operatoren das Postulat (EInkl(Anr$^{\mathrm{AL}}$)) bzw. (EInkl(Anr$^{\mathrm{PL}}$)) erfüllen, kann für die starken Operatoren nicht für alle Ontologien die Erfüllbarkeit garantiert werden.

Wie bisher in der Arbeit wird auch in diesem Abschnitt vorausgesetzt, dass ein öffentliches und internes Vokabular $\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i$ mit $\mathcal{V}_c \cap \mathcal{V}_i = \emptyset$ gegeben sind, so dass für die Axiome der Empfängerontologie O_1 und die Axiome der Senderontologie O_2 gilt: $\mathcal{V}(O_1) \subseteq \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i$ und $\mathcal{V}(O_2) \subseteq \mathcal{V}_c$. Außerdem wird eine höherwertige Funktion $\Phi \in \mathrm{Ear}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$ zur eindeutigen Ambiguitätsauflösung (gemäß Definition 3.2, S. 76) vorausgesetzt, mit der für zwei Ontologien eine Substitution σ zur Reinterpretation festgelegt wird.

Die Brückenaxiome, welche in den schwachen Reinterpretationsoperatoren verwendet werden, sind von der Form $s \sqsubseteq \sigma(s)$, welches eine Oberabschätzung von s bzw. eine Unterabschätzung des (neuen) Symbols $\sigma(s)$ darstellt, oder von der Form $\sigma(s) \sqsubseteq s$. Mit diesen Brückenaxiomen werden atomare Konzepte, bezeichnet durch s und $\sigma(s)$, zueinander in Beziehung gesetzt. Auch wenn in dem hier vorausgesetzten Integrationsszenario gleich benannte Konzepte ähnlich sind, stehen in der Praxis das senderseitige Konzept und das empfängerseitige Konzept nicht zwingend über Subsumptionen zueinander in Beziehung. Um auch diese Fälle zu behandeln, werden die Brückenaxiome erweitert. Basiert die Integration auf einem Typ-1-Operator, werden die Symbole des Senders internalisiert, d.h. das s-Konzept des Senders wird durch $\sigma(s)$ repräsentiert. Das internalisierte Symbol $\sigma(s)$ des Senders kann durch Unterabschätzungen $C \sqsubseteq \sigma(s)$ und Oberabschätzungen $\sigma(s) \sqsubseteq C$ zu Konzepten C des Empfängers in Beziehung gesetzt werden. Die hier gegebene Erweiterung der Brückenaxiome, welche in der Definition der schwachen Operatoren $\otimes_i^\gamma$ verwendet werden, soll *starke Erweiterung* genannt und durch das Superskript *st* gekennzeichnet werden.

Die erweiterten Unterabschätzungen $\mathrm{UA}^{\mathrm{st}}(i, \sigma_S, O)$ und Oberabschätzungen $\mathrm{OA}^{\mathrm{st}}(i, \sigma_S, O)$ für Konzept- und Rollensymbole $\sigma(s)$ $(i = 1)$ bzw. s $(i = 2)$ werden folgendermaßen definiert:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{UA}^{\mathrm{st}}(1, \sigma, O) &= \{C \sqsubseteq \sigma(s) \mid C \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}(O)), s \in (\mathrm{supp}(\sigma))_{KR}, O \models C \sqsubseteq s\} \\
\mathrm{UA}^{\mathrm{st}}(2, \sigma, O) &= \{\sigma(C) \sqsubseteq s \mid C \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}(O)), s \in (\mathrm{supp}(\sigma))_{KR}, O \models C \sqsubseteq s\} \\
\mathrm{OA}^{\mathrm{st}}(1, \sigma, O) &= \{\sigma(s) \sqsubseteq C \mid C \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}(O)), s \in (\mathrm{supp}(\sigma))_{KR}, O \models s \sqsubseteq C\} \\
\mathrm{OA}^{\mathrm{st}}(2, \sigma, O) &= \{s \sqsubseteq \sigma(C) \mid C \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}(O)), s \in (\mathrm{supp}(\sigma))_{KR}, O \models s \sqsubseteq C\}
\end{aligned}
$$

Für aussagenlogische Reinterpretationsoperatoren werden die zu Grunde liegenden Unter- und Oberabschätzungen nach dem gleichen Muster definiert. Die aussagenlogische Entsprechung zu $\mathrm{UA}^{\mathrm{st}}(1, \sigma, O)$ z.B. lautet:

$$\mathrm{UA}^{\mathrm{st}}(1, \sigma, O) = \{\alpha \to \sigma(s) \mid \alpha \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}(O)), s \in \mathrm{supp}(\sigma) \text{ und } O \models \alpha \to s\}$$

In der Menge aller Brückenaxiome $\mathrm{BA}^{\mathrm{st}}(i, \sigma, O)$ sind zusätzlich zu allen Unter- und Oberabschätzungen für Konzept- und Rollensymbole auch Identitäten für Konstanten enthalten. Für $i \in \{1, 2\}$ sei:

$$\mathrm{BA}^{\mathrm{st}}(i, \sigma, O) = \mathrm{UA}^{\mathrm{st}}(i, \sigma, O) \cup \mathrm{OA}^{\mathrm{st}}(i, \sigma, O) \cup \{s \doteq \sigma(s) \mid s \in (\mathrm{supp}(\sigma))_{Konst}\}$$

Die Menge aller maximalen mit O' kompatiblen Teilmengen der Abschätzungen bzgl. einer Ontologie O wird beschrieben durch

$$\mathrm{MBA}^{\mathrm{st}}(i, \sigma, O, O') = \mathrm{BA}^{\mathrm{st}}(i, \sigma, O) \top O'$$

Auf der Grundlage dieser Begriffe lassen sich die starken Reinterpretationsoperatoren definieren.

Definition 5.20. Sei $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \emptyset \rangle$, $\overline{\gamma} = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ für Selektionsfunktionen γ_1, γ_2 und sei $S^* = \bigcup \gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1, O_2))$. Sei weiter $\sigma = \Phi(S^*, \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}(O_1))$ die Substitution mit Träger S^*, die vom Disambiguierungsschema Φ bestimmt wird. Dann werden die *starken Operatoren des Typs 1 bzw. 2* $\odot_1^{\Phi,\overline{\gamma}}$ bzw. $\odot_2^{\Phi,\overline{\gamma}}$ definiert durch

$$
\begin{aligned}
O_1 \odot_1^{\Phi,\overline{\gamma}} O_2 &= O_1 \cup O_2\sigma \cup \bigcap \gamma_2\big(\mathrm{MBA}^{\mathrm{st}}(1, \sigma, O_1, O_1 \cup O_2\sigma)\big) \\
O_1 \odot_2^{\Phi,\overline{\gamma}} O_2 &= O_1\sigma \cup O_2 \cup \bigcap \gamma_2\big(\mathrm{MBA}^{\mathrm{st}}(2, \sigma, O_1, O_1\sigma \cup O_2)\big)
\end{aligned}
$$

Im Folgenden wird in der Bezeichnung der starken Operatoren das Disambiguierungsschema Φ ausgelassen, statt $\odot_i^{\Phi,\overline{\gamma}}$ also einfach $\odot_i^{\overline{\gamma}}$ geschrieben.[13]

5.3.2 Stärke der Operatoren: zwei Beispiele

Ich betrachte im Folgenden nur noch die Typ-2-Operatoren. Für Typ-1-Operatoren lassen sich ähnliche Definitionen angeben und Sätze beweisen wie für Typ-2-Operatoren. Da Typ-2-Operatoren aber das Erfolgspostulat erfüllen (Typ-1-Operatoren hingegen nicht), sind sie am ehesten mit klassischen Belief-Revisionsoperatoren zu vergleichen und werden daher bevorzugt behandelt.

Da die starken Operatoren gemäß Definition 5.20 eine größere Menge von Brückenaxiomen enthalten, können die mit ihnen erzielten Integrationsresultate mehr Sätze der öffentlichen Sprache konservieren als die Integrationsresultate, die sich durch Anwendung der schwachen Operatoren ergeben. Diese Stärke der gemäß Definition 5.20 konstruierten Operatoren demonstriert das folgende Beispiel.

Beispiel 5.21. Gegeben seien die Mengen von Ontologieaxiomen

$$\begin{aligned} O_1 &= \{K(a), K(b), L(a)\} \\ O_2 &= \{\neg K(a), \neg K(b)\} \end{aligned}$$

Es ist $\mathrm{MRS}(O_1, O_2) = \{\{a, b\}, \{K\}\}$. Es sei γ_1 so gewählt, dass $\gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1, O_2)) = \{\{K\}\}$, so dass $S^* = \bigcup \gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1, O_2)) = \{K\}$. Es sei σ eine Substitution mit Träger $\{K\}$ und $K' = \sigma(K)$. Aus der Definition der Unterabschätzungen (S. 139) ergibt sich:

$$K' \sqcap \neg L \sqsubseteq K \in \mathrm{UA}^{\mathrm{st}}(2, \sigma, O_1)$$

Da die Abschätzung $K' \sqcap \neg L \sqsubseteq K$ mit $O_1\sigma \cup O_2$ konsistent ist, gibt es eine maximale Menge von Brückenaxiomen X, in der $K' \sqcap \neg L \sqsubseteq K$ enthalten ist. Sei γ_2 so

[13] Es lässt sich zeigen, dass die Unter- und Oberabschätzungen, die für die starken Operatoren für triggernde Literale verwendet werden, auch diejenigen Subsumptionen enthalten, die für die starken Operatoren für triggernde Literale nötig sind. In der Definition der Typ-1-Operatoren für triggernde Literale sind Brückenaxiome der Form $K \sqsubseteq K' \sqcup \mathrm{msc}_{O_1}(a)$ (für triggerndes positives Literal) bzw. $K' \sqsubseteq K \sqcup \mathrm{msc}_{O_1}(a)$ (für triggerndes negatives Literal) enthalten. Das zweite Brückenaxiom hat offensichtlich die Form $\sigma(K) \sqsubseteq C$. Da für alle Konzeptbeschreibungen C_1, C_2 und Mengen von Ontologieaxiomen O auch $O \models C_1 \sqsubseteq C_1 \sqcup C_2$ gilt, ist $K' \sqsubseteq K \sqcup \mathrm{msc}_{O_1}(a) \in \mathrm{UA}^{\mathrm{st}}(1, \sigma, O_1)$. Das erste Brückenaxiom $K \sqsubseteq K' \sqcup \mathrm{msc}_{O_1}(a)$ lässt sich äquivalent umformen zur Subsumptionsbeziehung $K \sqcap \neg\, \mathrm{msc}_{O_1}(a) \sqsubseteq K'$, die die Form $C \sqsubseteq \sigma(K)$ hat. Da für alle Konzeptbeschreibungen C_1, C_2 und Mengen von Ontologieaxiomen O auch $O \models C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq C_1$ gilt, ist $K \sqcap \neg\, \mathrm{msc}_{O_1}(a) \sqsubseteq K' \in \mathrm{OA}^{\mathrm{st}}(1, \sigma, O_1)$. Entsprechend kommen in den Definitionen der Typ-2-Operatoren $\odot_2$ Brückenaxiome $K' \sqsubseteq K \sqcup \mathrm{msc}_{O_1[K/K']}(a)$ bzw. $K \sqsubseteq K' \sqcup \mathrm{msc}_{O_1[K/K']}(a)$ vor. Letzteres hat die gewünschte Form $K \sqsubseteq \sigma(C) \in \mathrm{OA}^{\mathrm{st}}(2, \sigma, O_1)$; ersteres lässt sich äquivalent schreiben als $K' \sqcap \neg\, \mathrm{msc}_{O_1[K/K']}(a) \sqsubseteq K$, hat somit die Form $\sigma(C) \sqsubseteq K \in \mathrm{UA}^{\mathrm{st}}(2, \sigma, O_1)$.

Aus diesen Aussagen folgt allerdings nicht, dass die so eben definierten starken Operatoren für triggernde Ontologien die starken Operatoren für triggernde Literale als Spezialfall enthalten.

gewählt, dass es nur X selektiert. Damit ist γ_2 eine Maxichoice-Selektionsfunktion. Dann gilt $O_1 \odot_2^{\overline{\gamma}} O_2 \models L(b)$. Aus dem Integrationsergebnis folgt, dass das durch b bezeichnete Objekt das Konzept L instanziiert. Ein vergleichbares Resultat lässt sich mit den schwachen Reinterpretationsoperatoren nicht erzielen. Die Ableitbarkeit von $L(b)$ lässt sich mit einer ähnlichen Annahme wie im Falle der starken Operatoren für triggernde Literale rechtfertigen: Im Widerspruch zwischen O_1 und O_2 ist die Konstante a involviert. Solange für alle anderen Konstanten x (wie z.B. die Konstante b) nicht explizit nachgewiesen werden kann, dass sie von a verschieden sind, darf angenommen werden, dass x die gleichen Konzepte erfüllt wie a. Da in O_1 die Konstante das Konzept L erfüllt, kann unter dieser Annahme auch die Ableitung von $L(b)$ begründet werden.

Eine von dieser Annahme unabhängige Rechtfertigung für die Ableitbarkeit von $L(b)$, die nur auf die Ontologien zurückgreift, ist nicht (oder nur schwer) zu erbringen. Der Grund ist, dass sich weder durch O_1 noch durch O_2 rechtfertigen lässt, dass das durch b bezeichnete Objekt das Konzept L instanziieren könnte. Wählt man also einen skeptischeren Zugang zur Integration von Ontologien, d.h. gestattet nur wenige zusätzliche Annahmen und bevorzugt schwächere vor stärkeren Annahmen, lässt sich die Ableitung von $L(b)$ nicht begründen: Stellt sich aus der Perspektive von O_1 gesprochen heraus, dass eines der enthaltenen Axiome nicht wahr sein kann, dann sollte die Integration nicht zu einer erzwungenen Meinungsbildung bzgl. beliebiger Sätze führen, für die es vor der Integration keine Tendenz gab, sie zu akzeptieren oder zu verneinen. Aus O_1 folgt auch das ABox-Axiom $(K \sqcup L)(b)$, das zusammen mit O_2 das ABox-Axiom $L(b)$ impliziert. Die Rechtfertigung für $(K \sqcup L)(b)$ ergibt sich jedoch aus der Rechtfertigung für $K(b)$. Daher produziert ein „disjunktives“ ABox-Axiom $(K \sqcup L)(b)$ falsche Abhängigkeiten, die zu unplausiblen Integrationsergebnissen führen.

Beispiel 5.21 basiert auf der Wahl eine Maxichoice-Selektionsfunktion für die Menge von Brückenaxiomen. Dass Maxichoice-Revision (im Falle logisch abgeschlossener Mengen) zu unplausiblen Resultaten führt, wurde bereits im Einführungskapitel gezeigt (Theorem 2.10, S. 25). Unter gewissen Einschränkungen an die logische Sprache und die Wahl der reinterpretierten Symbole lässt sich jedoch zeigen (Beispiel 5.22), dass auch Full-Meet-Varianten der starken Reinterpretationsoperatoren zu unplausiblen Ergebnissen führen können. Dabei nenne ich Reinterpretationsoperatoren, für die $\overline{\gamma} = \langle id, id \rangle$ gilt, *Full-Meet-Reinterpretationsoperatoren bzgl. beider Selektionsfunktionen.* Werden wie im folgenden Beispiel 5.22 Reinterpretationsoperatoren betrachtet, die nur Konzept- und Rollensymbole reinterpretieren, so ist γ_1 eine Selektionsfunktion, die nur Teilmengen von Symbolen ohne Konstanten auswählt. In diesem Falle gelten die Reinterpretationsoperatoren bereits dann als Full-Meet-Reinterpretationsoperatoren bzgl. beider Selektionsfunktionen, wenn $\gamma_2 = id$ und γ_1 alle Symbolmengen selektiert, die nur Rollen- und Konzeptsymbole enthalten, kurz

$$\gamma_1(X) = X \cap \{Y \in X \mid Y \text{enthält keine Konstanten}\}$$

Beispiel 5.22. Es werden die Ontologieaxiome von Beispiel 5.21 vorausgesetzt. Außerdem werden jetzt starke Reinterpretationsoperatoren betrachtet, die nur Konzept- und Rollensymbole reinterpretieren. Die logische Sprache, die O_1, O_2 zu Grunde liegt, sei eine Beschreibungslogik, die als einzige Konzeptkonstruktoren ohne Referenz auf ein Rollensymbol die Konzeptnegation, -konjunktion und Disjunktion gestattet, z.B. die Beschreibungslogik $\mathcal{ALC}$. Die Funktion γ_2 sei die Identitätsfunktion und γ_1 eine Funktion mit

$$\gamma_1(X) = X \cap \{Y \in X \mid Y \text{enthält keine Konstanten}\}$$

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich zeigen, dass auch das Full-Meet-Resultat der starken Operatoren $O_1 \odot_2^{\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle} O_2$ wie im Fall von Beispiel 5.21 die Ableitung von $L(b)$ gestattet. Es ist

$$O_1\sigma \cup O_2 = \{K'(a), K'(b), L(a), \neg K(a), \neg K(b)\}$$

und das Integrationsresultat $O_{res} = O_1 \odot_2^{\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle} O_2$ hat per Definition die Form:

$$\begin{aligned} O_{res} &= O_1\sigma \cup O_2 \cup \bigcap H \\ &= O_1\sigma \cup O_2 \cup \\ &\quad \bigcap \big(\big[\{C_{[K/K']} \sqsubseteq K \mid C \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}(O_1)), O_1 \models C \sqsubseteq K\} \cup \\ &\quad \{K \sqsubseteq C_{[K/K']} \mid C \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}(O_1)), O \models K \sqsubseteq C\} \big] \top (O_1\sigma \cup O_2) \big) \end{aligned}$$

Ich zeige, dass das Brückenaxiom $\phi = K' \sqcap \neg L \sqsubseteq K$ in $\bigcap H$ enthalten ist. Daraus folgt dann unmittelbar $O_{res} \models K' \sqcap \neg K \sqsubseteq L$ und somit $O_{res} \models L(b)$. Aufgrund der Voraussetzung an die Beschreibungslogik und die Tatsache, dass in O_1 keine Rollensymbole vorkommen, können die Brückenaxiome in H nur eine ganz bestimmte Form haben: Die Konzeptbeschreibungen $C_{[K/K']} \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}(O_1))$ können nur boolesche Kombinationen von K' und L sein. Unter Ausnutzung der Tatsache, dass für alle Konzeptbeschreibungen C, D, E $C \sqcup D \sqsubseteq E \equiv \{C \sqsubseteq E, D \sqsubseteq E\}$ gilt, und der Tatsache, dass sich die booleschen Kombination in DNF überführen lassen, können die möglichen Unterabschätzungen $C_{[K/K']} \sqsubseteq K$ von K, für die $O_1 \models C \sqsubseteq K$ gilt, logisch äquivalent durch die Menge Y_1 dargestellt werden.

$$Y_1 = \{\bot \sqsubseteq K, K' \sqsubseteq K, K' \sqcap L \sqsubseteq K, K' \sqcap \neg L \sqsubseteq K\}$$

Eine entsprechende Darstellung lässt sich für die Oberabschätzungen von K angeben. Hierfür nutzt man die Beziehung $E \sqsubseteq C \sqcap D \equiv \{E \sqsubseteq C, E \sqsubseteq D\}$ und die äquivalente Umformbarkeit von booleschen Kombination von Konzepten in KNF aus. Damit ergibt sich:

$$Y_2 = \{K \sqsubseteq \top, K \sqsubseteq K', K \sqsubseteq K' \sqcup L, K \sqsubseteq K' \sqcup \neg L\}$$

Durch Streichen all derjenigen Brückenaxiome, die nicht in $\bigcap H$ enthalten sein können, weil sie mit $O_1\sigma \cup O_2$ konfligieren, erhält man die Mengen

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_1 &= \{\perp \sqsubseteq K, K' \sqcap \neg L \sqsubseteq K\}\\ \tilde{Y}_2 &= \{K \sqsubseteq \top, K \sqsubseteq K', K \sqsubseteq K' \sqcup L, K \sqsubseteq K' \sqcup \neg L\}\end{aligned}$$

Nun wird gezeigt, dass $\bigcap H = \tilde{Y}_1 \cup \tilde{Y}_2$. Hierzu wird eine Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\Delta^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{I}} = a, b^{\mathcal{I}} = b$, $K^{\mathcal{I}} = \emptyset$, $L^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$ und $(K')^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$ definiert. Dann gilt $\mathcal{I} \models \tilde{Y}_1 \cup \tilde{Y}_2 \cup O_1\sigma \cup O_2$. Folglich ist $\bigcap H = \bigcap\{\tilde{Y}_1 \cup \tilde{Y}_2\} = \tilde{Y}_1 \cup \tilde{Y}_2$. Damit folgt aber auch $K' \sqcap \neg L \sqsubseteq K \in \tilde{Y}_1 \subseteq \bigcap H$.

5.3.3 Erweiterte Inklusionspostulate zur Oberabschätzung

Mit den Beispielen 5.21 bzw. 5.22 wurde die Stärke der starken Reinterpretationsoperatoren bzw. die Schwäche der schwachen Reinterpretationsoperatoren illustriert. In den Beispielen wurde zum einen eine informale Begründung dafür gegeben, was aus der nicht-skeptischen Perspektive der starken Operatoren für eine Aufnahme bestimmter neuer Sätze spricht, die sich aus dem Zusammenspiel der Menge von Ontologieaxiomen des Senders und des Empfängers ergeben; zum anderen wurde eine informale Begründung aus der skeptischeren Perspektive der schwachen Operatoren dafür gegeben, welche Sätze nicht im Integrationsresultat enthalten sein dürfen. In diesem Unterabschnitt wird die zweite der informellen Begründungen durch eine Erweiterung des für Belief-Revisionsoperatoren definierten Inklusionspostulats expliziert. Die resultierenden Postulate ermöglichen eine Unterscheidung von schwachen und starken Reinterpretationsoperatoren auf Postulatsebene.

Zunächst werden zwei Schemata für das erweiterte Inklusionspostulat eingeführt, die auf einem Operator $\text{Anr}(\cdot)$ zur (erfüllbarkeits-)äquivalenten Anreicherung einer Wissensbasis fußen. Die Schemata lassen sich durch die Definition von Anreicherungsoperatoren für aussagenlogische und prädikatenlogische Reinterpretationsoperatoren konkretisieren, so dass gezeigt werden kann:

- Die aussagenlogischen Entsprechungen der schwachen Reinterpretationsoperatoren erfüllen das erweiterte Inklusionspostulat, die aussagenlogischen Pendants der starken Operatoren hingegen nicht.
- Für Ontologien über der Prädikatenlogik ohne Identität lässt sich zeigen, dass die prädikatenlogischen schwachen Reinterpretationsoperatoren, die nur

Konzept- und Rollensymbole reinterpretieren, das erweiterte Inklusionspostulat erfüllen; die starken prädikatenlogischen Reinterpretationsoperatoren, die nur Konzept- und Rollensymbole reinterpretieren, hingegen erfüllen nicht das erweiterte Inklusionspostulat.

In der Belief-Base-Revision lautet das Inklusionspostulat für beliebige Satzmengen B_1 und Sätze α

$$B_1 * \alpha \subseteq B_1 \cup \{\alpha\}$$

Die Erweiterung für triggernde Satzmengen B_2 ist Postulat (MR 3) (S. 33):

$$B_1 * B_2 \subseteq B_1 \cup B_2 \tag{5.1}$$

Das Postulat besagt, dass das Revisionsergebnis $B_1 * B_2$ nicht mehr Sätze enthält als die ursprünglichen Satzmengen B_1 und B_2, und schränkt damit die Menge der aus dem Revisionsergebnis folgenden Sätze ein. Für Belief-Sets BS_1 und Sätze α lautet das unter den ersten sechs Basispostulaten von AGM enthaltene Inklusionspostulat

$$BS_1 * \alpha \subseteq \mathrm{Cn}(BS_1 \cup \{\alpha\})$$

Eine naheliegende Erweiterung für triggernde Belief-Sets liefert

$$BS_1 * BS_2 \subseteq \mathrm{Cn}(BS_1 \cup BS_2)$$

Ich werde mich im Folgenden auf die Varianten mit triggernden Satzmengen bzw. Belief-Sets beziehen. Die Einschränkungen, welche die beiden Inklusionspostulate (für Belief-Bases bzw. für Belief-Sets) den Base-Operatoren bzw. Belief-Set-Operatoren auferlegen, sind sehr unterschiedlich. Während die Erfüllung des Inklusionspostulat für Belief-Bases zu einer starken Einschränkung des Resultats führt, ist das korrespondierende Postulat für Belief-Sets sehr schwach, da es für den interessierenden Fall, dass $BS_1 \cup BS_2$ inkonsistent ist, überhaupt keine Einschränkung zur Folge hat.

Die (schwachen) Reinterpretationsoperatoren sind für nicht logisch abgeschlossene Ontologien definiert. Daher ist das Inklusionspostulat für die Belief-Base-Revision ein geeigneter Ausgangspunkt für ein erweitertes Inklusionspostulat. Das Inklusionspostulat wird von den schwachen Operatoren nicht erfüllt, da das Integrationsresultat im Inkonsistenzfall Sätze über dem privaten Vokabular $\mathcal{V}_i$ enthält. Daher wurde in Kapitel 3 eine abgeschwächte Variante des Inklusionspostulats formuliert, die von den Reinterpretationsoperatoren erfüllt wird:

$$O_1 \circ O_2 \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O_1)) \subseteq O_1 \cup O_2 \tag{5.2}$$

Dieses an das Integrationsszenario adaptierte Inklusionspostulat hat die gewünschte Eigenschaft, dass es von den schwachen Reinterpretationsoperatoren, nicht jedoch von den starken Reinterpretationsoperatoren gemäß Definition 5.20 erfüllt wird. Dennoch ist dieses Inklusionspostulat nicht hinreichend stark. Die intendierte Erweiterung des Inklusionspostulats soll eine Einschränkung für die Menge aller aus dem Integrationsergebnis folgenden Sätze der Interfacesprache (und nicht nur der im Integrationsergebnis vorkommenden Sätze) in Abhängigkeit von den Ausgangsontologien geben. Das in (5.2) beschriebene Inklusionspostulat (Reint 3) führt zu keiner Einschränkung der Menge solcher Brückenaxiome, die mindestens ein internes Symbol enthalten. Daher kann dieses Postulat auch Konstruktionen wie in Beispiel 5.21, die auf der Konservierung eines Brückenaxioms $K' \sqcap \neg L \sqsubseteq K$ basieren, nicht verhindern.

Unten werden zwei mögliche Schemata für ein erweitertes Inklusionspostulat beschrieben, ein lokales Schema ($\text{EInkl}^{\text{L}}(\text{Anr})$) und ein stärkeres globales Schema ($\text{EInkl}^{\text{G}}(\text{Anr})$). Sie hängen von einem Operator $\text{Anr}(\cdot)$ ab, der eine Wissensbasis (erfüllbarkeits)äquivalent um zusätzliche Information anreichert. Der Operator $\text{Anr}(\cdot)$ ist als ein Parameter zu verstehen, der nach unten durch den Identitätsoperator (keine Anreicherung) begrenzt wird. Nach oben wird $\text{Anr}(\cdot)$ durch die Bedingung begrenzt, dass die Anreicherung zu einer (erfülbarkeits-)äquivalenten Wissensbasis führt.

Mit dem Anreicherungsoperator $\text{Anr}(\cdot)$ wird eine Wissensbasis O um eine Menge von Sätzen derart erweitert, dass a) in O implizit vorhandene Information explizit gemacht wird und b) dabei keine disjunktive Information eingeführt wird, die die Widerspruchscharakteristik von O ändert. Die Bedingung a) bedeutet, dass mögliche Widersprüche einer Wissensbasis O feiner individuiert werden. Ist z.B. $O_1 = \{p \wedge q\}$ und $O_2 = \{\neg p\}$, so kann der Widerspruch von O_1 mit O_2 statt auf $p \wedge q$ genauer auf p zurückgeführt werden. Daher sollte ein Anreicherungsoperator O_1 um p und entsprechend auch um q anreichern. Bedingung b) besagt (auf die Aussagenlogik bezogen), dass keine Anreicherung um Disjunktionen erfolgen soll, bei denen nicht alle Disjunktionsglieder bereits in der Wissensbasis enthalten sind. Die Anreicherung von $O_1 = \{p \wedge q\}$ um $p \vee r$ ist damit verboten, da $p \vee r$ seine Rechtfertigung nur durch das Vorhandensein von p erhält.

Durch das lokale Schema ($\text{EInkl}^{\text{L}}(\text{Anr})$) wird die Menge der aus dem Integrationsresultat folgenden Sätze in der öffentlichen Sprache in folgender Weise beschränkt. Wenn ein Satz α aus dem Integrationsresultat folgt, dann muss es für α eine Rechtfertigung geben, die sich aus dem Zusammenspiel von O_2 und O_1 ergibt. Da ($\text{EInkl}^{\text{L}}(\text{Anr})$) als Postulat für Typ-2-Operatoren angedacht ist, kann in der Begründung von ($\text{EInkl}^{\text{L}}(\text{Anr})$) angenommen werden, dass die Menge von Ontologieaxiomen O_2 im Integrationsresultat vorhanden ist. Im Falle einer Inkompatibilität von O_1 und O_2 müssen für die Integration Sätze aus O_1 gestrichen werden, die damit auch nicht mehr für die Rechtfertigung von α zur Verfügung stehen. Statt direkt Sätze aus O_1 zu streichen, können durch Anwendung des Anreicherungsoperators auf O_1 die für den Widerspruch mit O_2 verantwortlichen Sätze genauer eingegrenzt und eliminiert werden. Damit stehen für die Rechtfertigung von α neben O_2 genau diejenigen Sätze aus $\mathrm{Anr}(O_1)$ zur Verfügung, die nicht für den Widerspruch verantwortlich sind.

Zusammengefasst besagt das lokale Schema ($\mathrm{EInkl}^{\mathrm{L}}(\mathrm{Anr})$) für das erweiterte Inklusionspostulat, dass für jeden Satz α aus der öffentlichen Sprache, der aus dem Integrationsresultat $O_1 \circ_2 O_2$ folgt, eine Teilmenge der Anreicherung von O_1 existieren muss, die mit O_2 kompatibel ist und zusammen mit O_2 α impliziert.

($\mathbf{EInkl^L(Anr)}$) Für alle α mit $\mathcal{V}(\alpha) \subseteq \mathcal{V}_c$ und $O_2 \not\models \bot$: Wenn $O_1 \circ_2 O_2 \models \alpha$, dann gibt es ein $X_\alpha \subseteq \mathrm{Anr}(O_1)$ mit $X_\alpha \cup O_2 \not\models \bot$ und $X_\alpha \cup O_2 \models \alpha$.

Das globale Schema ($\mathrm{EInkl}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Anr})$) fordert, dass die im lokalen Schema genannten Mengen X_α für jedes α identisch sein müssen. ($\mathrm{EInkl}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Anr})$) besagt folglich, dass eine Teilmenge X der Anreicherung von O_1 existieren muss, so dass für jeden Satz α aus der öffentlichen Sprache, der aus dem Integrationsresultat $O_1 \circ_2 O_2$ folgt, gilt: X ist mit O_2 kompatibel und zusammen mit O_2 impliziert X α.

($\mathbf{EInkl^G(Anr)}$) Es gibt ein $X \subseteq \mathrm{Anr}(O_1)$ mit $X \cup O_2 \not\models \bot$, so dass für alle α mit $\mathcal{V}(\alpha) \subseteq \mathcal{V}_c$ gilt: Wenn $O_1 \circ_2 O_2 \models \alpha$, dann $X \cup O_2 \models \alpha$.

Abkürzend werde ($\mathrm{EInkl}(\mathrm{Anr})$) als Platzhalter für das Schema ($\mathrm{EInkl}^{\mathrm{L}}(\mathrm{Anr})$) bzw. ($\mathrm{EInkl}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Anr})$) verwendet.

Für aussagenlogische und prädikatenlogische Reinterpretationsoperatoren lassen sich geeignete Anreicherungsoperatoren unter Rückgriff auf den Begriff der Primkonsequenz definieren.

Ich stelle zwei Varianten von Anreicherungsoperatoren vor. Die erste Variante lautet:

$$\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}(O) = O \cup \mathrm{Prim}_{\mathrm{AL}}(O)$$

Das Ergebnis der Anreicherung $\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}(O)$ ist im Falle der Aussagenlogik eine zu O äquivalente Wissensbasis, die nur die „konjunktive“ Information explizit in die Anreicherung aufnimmt. Aus $\mathrm{Prim}_{\mathrm{AL}}(O) \equiv O$ folgt unmittelbar, dass die Anreicherung von O tatsächlich mit O äquivalent ist.

Beobachtung 5.23. *Für aussagenlogische Wissensbasen O gilt:* $\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}(O) \equiv O$.

In der zweiten Variante wird die so angereicherte Wissensbasis zusätzlich um Disjunktionen abgeschlossen. Der disjunktive Abschluss ist definiert durch:

$$\mathrm{DisA}(O) = O \cup \{\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in O\} \quad \text{(Hansson, 1999b, S. 23)}$$

Der disjunktive Abschluss stellt sicher, dass zumindest die Disjunktion zweier in der Wissensbasis enthaltener Sätze α, β erhalten bleiben kann, wenn die Inkonsistenzauflösung zum Streichen von α und β führt.

$$\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL},\vee}(O) = \mathrm{DisA}(\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}(O))$$

Auch die Anreicherung mit $\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL},\vee}$ erhält die Äquivalenz.

Beobachtung 5.24. *Für aussagenlogische Wissensbasen O gilt:*

$$O \equiv \mathrm{DisA}(\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}(O))$$

Für die Prädikatenlogik lässt sich für Wissensbasen O nicht zwingend eine Anreicherung definieren, die mit O äquivalent ist. Unter Ausnutzung der Skolemisierung lässt sich jedoch eine Anreicherung definieren, die Äquivalenz für alle Sätze mit Symbolen verschieden von den Skolemkonstanten garantiert.

$$\mathrm{Anr}^{\mathrm{PL}}(O) = O \cup \mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(O^*)$$

Beobachtung 5.25. *Für endliches O gilt:* $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Anr}^{\mathrm{PL}}(O))$

Beweis. Siehe S. 276.

Auch für prädikatenlogische Wissensbasen lässt sich der disjunktive Abschluss bilden:

$$\mathrm{Anr}^{\mathrm{PL},\vee}(O) = \mathrm{DisA}(\mathrm{Anr}^{\mathrm{PL}}(O))$$

Unmittelbar aus den Definitionen folgt, dass für $\mathrm{Anr} \in \{\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}, \mathrm{Anr}^{\mathrm{PL}}\}$ und $\mathrm{Anr}^{\vee} \in \{\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL},\vee}, \mathrm{Anr}^{\mathrm{PL},\vee}\}$ gilt: (EInkl(Anr)) ist stärker ist als (EInkl($\mathrm{Anr}^{\vee}$)).

Beobachtung 5.26. *Sei* $\mathrm{Anr} \in \{\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}, \mathrm{Anr}^{\mathrm{PL}}\}$ *und* $\mathrm{Anr}^{\vee} \in \{\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL},\vee}, \mathrm{Anr}^{\mathrm{PL},\vee}\}$. *Alle Operatoren $\circ$, die das Postulat (EInkl(*Anr*)) erfüllen, erfüllen auch das Postulat (EInkl(*$\mathrm{Anr}^{\vee}$*)).*

Da mit $\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}, \mathrm{Anr}^{\mathrm{PL}}$ konkrete Anreicherungsoperatoren vorliegen, lässt sich auch zeigen, dass sich das lokale und globale Schema für die erweiterte Inklusionseigenschaft nicht nur rein formal, sondern auch inhaltlich unterscheiden. Wie das folgende Beispiel zeigt, gibt es Ontologien O_1, O_2 und einen Operator $\circ$, der zwar das Erfolgspostulat (MR 2), das Konsistenzpostulat (MR 5), (S. 33) und (EInkl$^{\mathrm{L}}$($\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}$)), aber nicht (EInkl$^{\mathrm{G}}$($\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}$)) erfüllt. (Das Beispiel funktioniert bereits für die Identität als Anreicherungsoperator.)

Beispiel 5.27. Der aussagenlogische Operator $\circ$ sei gegeben durch:

$$O_1 \circ O_2 = \begin{cases} \{a, b, p \to (r \wedge a), q \to (\neg r \wedge b)\} & \text{falls } O_1 = \{p, q\} \text{ und} \\ & O_2 = \{p \to (r \wedge a), q \to (\neg r \wedge b)\} \\ O_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Operator $\circ$ erfüllt (EInkl$^{\mathrm{L}}$($\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}$)), da es für a eine Menge $X_a = \{p\}$ mit $X_a \subseteq \mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}(O_1)$ und $X_a \cup O_2 \models a$ und für b die davon verschiedene Menge $X_b = \{q\}$ mit $X_b \subseteq \mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}(O_1)$ und $X_b \cup O_2 \models b$ gibt. Es gibt aber kein $X \subseteq \mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}(O_1)$, so dass $X \cup O_2 \not\models \bot$ und $X \cup O_2 \models \{a, b\}$. Daher erfüllt $\circ$ nicht (EInkl$^{\mathrm{G}}$($\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}$)).

Die Beziehung der erweiterten Inklusionspostulate zum Inklusionspostulat für Belief-Bases (MR 3) (Gleichung (5.1)) wird in der folgenden Beobachtung expliziert: Belief-Base-Operatoren, die das Inklusionspostulat, das Erfolgspostulat und das Postulat der Konsistenz für Belief-Bases erfüllen, erfüllen auch (EInkl(Anr)).

Beobachtung 5.28. *Sei* $\mathrm{Anr} \in \{\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}, \mathrm{Anr}^{\mathrm{PL}}\}$. *Wenn* $\circ$ *das Erfolgspostulat (MR 2), das Inklusionspostulat (MR 3) und das Konsistenzpostulat (MR 5) (S. 33) erfüllt, dann erfüllt es auch (EInkl*^{G}*(*Anr*)) und damit (EInkl*^{L}*(*Anr*)).*

Beweis. Siehe S. 276.

Es lässt sich zeigen, dass die aussagenlogischen Entsprechungen der schwachen Operatoren das erweiterte Inklusionspostulat $(\mathrm{EInkl}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}))$ und damit auch $(\mathrm{EInkl}^{\mathrm{L}}(\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}))$, $(\mathrm{EInkl}^{\mathrm{L}}(\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL},\vee}))$ und $(\mathrm{EInkl}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL},\vee}))$ erfüllen. Hingegen erfüllen nicht alle aussagenlogischen Entsprechungen der starken Operatoren das Postulat $\mathrm{EInkl}^{\mathrm{L}}(\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL},\vee}))$ und damit auch nicht $(\mathrm{EInkl}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL},\vee}))$, $(\mathrm{EInkl}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}))$ oder $(\mathrm{EInkl}^{\mathrm{L}}(\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}))$. Eine entsprechende Aussage lässt sich für prädikatenlogische Reinterpretationsoperatoren zeigen.

Proposition 5.29. *Es sei* Anr *der Anreicherungsoperator* $\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL}}$ *bzw.* $\mathrm{Anr}^{\mathrm{PL}}$ *und* $\mathrm{Anr}^{\vee}$ *der Anreicherungsoperator* $\mathrm{Anr}^{\mathrm{AL},\vee}$ *bzw.* $\mathrm{Anr}^{\mathrm{PL},\vee}$.

1. *Sei* $\otimes_2$ *ein aussagenlogischer schwacher Reinterpretationsoperator des Typs 2 bzw. ein schwacher prädikatenlogischer Reinterpretationsoperator des Typs 2, der nur Konzept- und Rollensymbole reinterpretiert. Dann erfüllt* $\otimes_2$ *das Postulat (EInkl*^{G}*(*Anr*)) und damit auch (EInkl*^{L}*(*Anr*)), (EInkl*^{L}*(*$\mathrm{Anr}^{\vee}$*)) und (EInkl*^{G}*(*$\mathrm{Anr}^{\vee}$*)).*

2. *Es gibt aussagenlogische bzw. prädikatenlogische starke Reinterpretationsoperatoren* $\odot_2$ *des Typs 2, die nicht das Postulat (EInkl*^{L}*(*$\mathrm{Anr}^{\vee}$*)) und damit auch nicht die Postulate (EInkl*^{G}*(*$\mathrm{Anr}^{\vee}$*)), (EInkl*^{G}*(*Anr*)) oder (EInkl*^{L}*(*Anr*)) erfüllen.*

Beweis. Siehe S. 276.

6 Sequenzielle Integration

In diesem Kapitel wird die Analyse der sequenziellen Integration einer Ontologie vertieft und mit der einschrittigen Integration einer triggernden Ontologie verglichen. Abschnitt 6.1 gibt einen Überblick zur iterierten Revision in der klassischen Belief-Revision und diskutiert die wichtigsten Postulate, die in der Belief-Revision-Literatur zur Spezifikation von adäquater iterierter Revision besprochen wurden. Im darauf folgenden Abschnitt 6.2 werden die Reinterpretationsoperatoren auf die Erfüllbarkeit dieser Postulate getestet. Sind die Trigger einfach strukturiert (genauer: bestehen nur aus einzelnen konzeptbasierten Literalen), kann in vielen Fällen die Erfüllbarkeit (einer Teilmenge) der Iterationspostulate gemäß Darwiche und Pearl (1994) durch die Reinterpretationsoperatoren bewiesen werden. Da die Definition der Reinterpretationsoperatoren die Integrationshistorie unberücksichtigt lässt, kann für Reinterpretationsoperatoren mit triggernden Ontologien ein „rationales" Verhalten gemäß Darwiche und Pearl (1994), welches durch die Iterationspostulate spezifiziert werden soll, im Allgemeinen nicht gewährleistet werden. Allerdings muss in Frage gestellt werden, ob die Postulate von Darwiche und Pearl tatsächlich eine adäquate Spezifikation für iterierbare Revisionsoperatoren bzw. auf Reinterpretation basierenden Integrationsoperatoren darstellen.

Die Beziehung zwischen sequenzieller Integration und einschrittiger Integration mit einer triggernden Ontologie wird in Abschnitt 6.3 besprochen. Für Typ-1-Operatoren kann gezeigt werden, dass die sequenzielle Integration mit triggernden Literalen auf eine einschrittige (triviale) Integration mit einer Teilmenge der Sequenz zurückgeführt werden kann. Eine generelle Beziehung zwischen iterierter und einschrittiger Integration mittels Reinterpretationsoperatoren vom Typ 2 lässt sich nicht beweisen: Nicht für alle Ontologien ist es möglich, die sequenzielle Integration auf die einschrittige Integration einer Ontologie, die aus Axiomen der Sequenz besteht, zurückzuführen; und auch in der umgekehrten Richtung gilt keine allgemeingültige Reduktionsbeziehung.

In Abschnitt 6.4 wird mit der Stabilität eine für die klassische Belief-Revision unübliche Eigenschaft für iterierte Revision besprochen. Gegenstand der Betrachtung sind nun unendliche (und nicht wie bisher endliche) Sequenzen von Triggern. Da Typ-2-Operatoren nicht monoton sind, kann in frühen Schritten integrierte Information durch Integration neuerer Information in späteren Schritten verloren gehen. Durch wiederholtes Senden der gleichen Information kann diesem Verlust entgegengewirkt werden. Das wiederholte Senden kann als erfolgreich gewertet werden, wenn die Empfängerontologie sich nicht mehr ändert, d.h. sich stabilisiert. Schwache Typ-2-Operatoren für triggernde konzeptbasierte Literale, so das Ergebnis von Abschnitt 6.4, führen unter bestimmten Umständen zu einer stabilen Ontologie – allerdings auf Kosten eines Verlustes von Beziehungen, die in der initialen Empfängerontologie gegolten haben. Starke Typ-2-Operatoren auf der anderen Seite, so das weitere Ergebnis von Abschnitt 6.4, sind nicht stabil. Abschnitt 6.4 ist eine Zusammenfassung der Ergebnisse, die im Aufsatz von Eschenbach und Özçep (2009) dargestellt werden.

6.1 Überblick zur iterierten Revision

Unter der *sequenziellen Integration* einer triggernden Wissensbasis in die Empfängerwissensbasis verstehe ich die inkrementelle Integration von Teilen der triggernden Wissensbasis in die Empfängerwissensbasis. Dabei wird nicht spezifiziert, wie die inkrementelle Integration erfolgt. Insbesondere dürfen verschiedene Operatoren in verschiedenen Schritten der Integration benutzt werden.

Um die sequenzielle Integration von triggernden Aussagen zu modellieren, wurde in den vorhergehenden Abschnitten auf eine Modellierung zurückgegriffen, die in der klassischen Belief-Revision unter dem Titel „iterierte Revision“ behandelt wird. Iterierte Revision beschäftigt sich mit der mehrfachen Anwendung eines Revisionsoperators $*$ auf die im vorherigen Schritt erhaltene Wissensbasis und die im Folgeschritt zu verarbeitende triggernde Aussage. Die Integration einer Folge $A = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ in eine Wissensbasis B bzgl. eines Revisionsoperators $*$ wird in dieser Modellierung folglich durch $(\ldots(B * \alpha_1) * \alpha_2) * \cdots * \alpha_n$ beschrieben.

Diese Art, iterierte Revision zu modellieren, nennen Freund und Lehmann (2002) die statische Sichtweise: Wissensbasen (Belief-Sets, Theorien) werden revidiert, die Revisionsmethode (hier der Operator $*$) hingegen bleibt dieselbe.[1] Die alternative Modellierung nennen Freund und Lehmann (2002) die dynamische. Gemäß der dynamischen Modellierung werden nicht nur Wissensbasen, sondern auch die zu Grunde liegende Revisionsmethode, die im Folgeschritt angewandt wird, geändert. Zu dieser dynamischen Sichtweise passt auch die Beschreibung der iterierten Revision von Zhang (2004): Input für einen (iterierbaren) Revisionsoperator ist ein Tripel bestehend aus einer Wissensbasis, einer Struktur über dieser Wissensbasis und einem Trigger. Output der Revision ist eine modifizierte Wissensbasis und eine Struktur. Verschiedene Ansätze zur iterierten Revision lassen sich durch unterschiedliche Instanziierungen des Strukturbegriffs unter dieser Darstellung von Zhang zusammenfassen.

Im AGM-Ansatz zur Belief-Revision werden nur für die einschrittige Revision Postulate aufgestellt und Klassen von (einschrittigen) Revisionsoperatoren untersucht, die Untermengen dieser Postulate erfüllen. Obwohl es möglich ist, klassische Belief-Revisionsoperatoren (wie Partial-Meet-Revisionsoperatoren) für die Iteration zugänglich zu machen, reichen die AGM-Postulate nicht aus, die iterierte Anwendung dieser Operatoren auf ein gewünschtes Verhalten hin einzuschränken. Die einzige interessante Folgerung, die sich Nayak und Kollegen (Nayak et al., 1996) gemäß aus den AGM-Postulaten ergibt, hält Beobachtung 6.1 fest.

Beobachtung 6.1. *Sei $*$ ein Belief-Revisionsoperator, der die AGM-Postulate (AGM-R 3), (AGM-R 7) und (AGM-R 8) (S. 20) erfüllt. Dann erfüllt $*$ für Belief-Sets BS und Sätze α, β auch (AGM-It).*

(AGM-It) *Wenn* $\neg\beta \notin BS * \alpha$, *dann* $(BS * \alpha) * \beta = BS * (\alpha \wedge \beta)$.

Beweis. Siehe S. 277.

(AGM-It) besagt, dass die schrittweise Revision eines Belief-Sets mit α gefolgt von der Revision mit β identisch zu der einschrittigen Revision mit der Konjunktion von α und β ist, sofern nach der Revision mit α kein Konflikt mit dem zweiten Trigger β vorliegt. Aufgrund der zusätzlichen Bedingung trifft (AGM-It) nur dann über das Ergebnis einer zweischrittigen Revision eine Aussage, wenn die zweite Revision keine Konfliktlösung beinhaltet, also keine echte Revision, sondern eine Expansion ist.

Da die AGM-Postulate nicht geeignet sind, iterierte Revision zu spezifizieren, wurden diese in der Literatur zur Belief-Revision auf verschiedene Weise um neue

[1]Für die Analyse der iterierten Reinterpretation in Abschnitt 6.2 wird nur die statische Sichtweise maßgebend sein, da die Reinterpretationsoperatoren in der definierten Form nur auf Wissensbasen (genauer Ontologien) operieren. Prinzipiell lassen sich jedoch auch dynamische Reinterpretationsoperatoren definieren. Da die Empfängerontologien in einer Namensvariante konserviert werden, kann z.B. die Anzahl der Reinterpretationen bzgl. eines Symbols als ein Parameter für den nächsten Integrationsschritt genutzt werden.

Postulate ergänzt, um rationale iterierte Revisionsoperatoren zu spezifizieren. Ich nenne diese Postulate *Iterationspostulate* und werde kurz auf die wichtigsten Postulate eingehen.

Obwohl bereits vor 1994 Arbeiten zur iterierten Revision erscheinen, wird erst mit dem Aufsatz von Darwiche und Pearl (1994) explizit eine Menge von Iterationspostulaten beschrieben und analysiert. Darwiche und Pearl (1994) formulieren ihre Postulate gemäß der Annahme, dass sich Belief-Sets durch einzelne Sätze repräsentieren lassen (vgl. Katsuno und Mendelzon (1991)). Ich stelle ihre Postulate im Rahmen von Belief-Sets dar.

Darwiche und Pearl motivieren ihre Postulate im Wesentlichen durch die Konservierung bzw. Nichtkonservierung von so genannten bedingten Sätzen (conditional beliefs); das sind Sätze β, die ein Agent bereit ist zu akzeptieren, wenn eine neue triggernde Information α (die Bedingung) integriert werden sollte. Ein bedingter Satz $\beta|\alpha$ gilt bzgl. eines Revisionsoperators $*$ und eines Belief-Sets BS (bzw. allgemeiner eines epistemischen Zustandes Ψ (s.u.)), kurz: $BS \models \beta|\alpha$, genau dann, wenn die Revision von BS (bzw. Ψ) mit α zur Akzeptanz von β führt: $\beta \in BS * \alpha$ (bzw. $\beta \in \Psi * \alpha$). Zweck der Iterationspostulate ist es, die Änderung in der Menge aller bedingten Sätze minimal zu halten: es dürfen nicht (ungerechtfertigter Weise) bedingte Sätze im Laufe der Revision eliminiert, aber auch nicht neue bedingte Sätze (ungerechtfertigter Weise) aufgenommen werden. Das folgende Beispiel von Darwiche und Pearl soll eine nicht gerechtfertigte Elimination von bedingten Sätzen durch einen AGM-konformen Revisionsoperator demonstrieren.

Beispiel 6.2. Ein Agent sieht in weiter Entfernung ein Lebewesen X, das wie ein Hund bellt. Daher schließt er, dass das Lebewesen kein Vogel ist und auch nicht fliegen kann. Dennoch ist der Agent bereit zu akzeptieren, dass, wenn sich das Lebewesen als Vogel herausstellen sollte, es auch fliegt. Diese Situation lässt sich durch ein Belief-Set BS und einen AGM-konformen Revisionsoperator $*$ beschreiben, so dass gilt:

$$\begin{aligned} BS &\equiv \neg \mathit{Vogel} \wedge \neg \mathit{Fliegt} \\ BS * \mathit{Vogel} &\equiv \mathit{Vogel} \wedge \mathit{Fliegt} \end{aligned}$$

Aus der letzten Äquivalenz folgt insbesondere, dass bzgl. des Belief-Sets BS und des Revisionsoperators der bedingte Satz $\mathit{Fliegt} \,|\, \mathit{Vogel}$ gilt.

Wenn der Agent vorher erfährt, dass das Lebewesen X fliegen kann, sollte er dennoch an dem bedingten Satz festhalten, dass wenn X ein Vogel ist, dann X fliegen kann. Wie Darwiche und Pearl jedoch zeigen, lässt sich ein AGM-konformer Revisionsoperator $*$ definieren, der dieser Intuition widerspricht:

$$(BS * \mathit{Fliegt}) * \mathit{Vogel} \equiv \mathit{Vogel}$$

Die Iterationspostulate sollen derartige ungerechtfertigte Änderungen in der Menge der akzeptierten bedingten Sätze verhindern.

Im Folgenden seien BS ein Belief-Set und α, β aussagenlogische Sätze. Alle Postulate (DP 1)–(DP 4) spezifizieren verschiedene Aspekte einer rationalen, zweischrittigen Revision $(BS * \alpha) * \beta$, wobei α für den ersten Trigger und β für den zweiten Trigger steht.

(DP 1) Wenn $\beta \models \alpha$, dann ist $(BS * \alpha) * \beta = BS * \beta$.
In Worten: Wenn zwei Trigger zu integrieren sind, von denen der zweite (β) stärker ist als der erste Trigger (α), dann liefert die schrittweise Integration von beiden nichts anderes als die Integration des (zweiten) stärkeren Triggers allein.
Alternative Formulierung mit bedingten Sätzen: Wenn $\beta \models \alpha$, dann ist für alle Sätze ϵ $BS \models \epsilon|\beta$ genau dann, wenn $BS * \alpha \models \epsilon|\beta$.
In Worten: Die Integration eines Triggers α sollte keine Änderung in der Menge der akzeptierten bedingten Sätze $\epsilon|\beta$ bewirken, deren Bedingung β stärker ist als α.

(DP 2) Wenn $\beta \models \neg\alpha$, dann ist $(BS * \alpha) * \beta = BS * \beta$.
Wenn zwei inkompatible Trigger zu integrieren sind, dann liefert die schrittweise Integration von beiden nichts anderes als die Integration des zweiten Triggers allein.
Alternative Formulierung mit bedingten Sätzen: Wenn $\beta \models \neg\alpha$, dann ist für alle Sätze ϵ $BS \models \epsilon|\beta$ genau dann, wenn $BS * \alpha \models \epsilon|\beta$.
In Worten: Die Integration eines Triggers α sollte keine Änderung in der Menge der akzeptierten bedingten Sätze $\epsilon|\beta$ bewirken, deren Bedingung β inkompatibel mit α ist.

(DP 3) Wenn $BS * \beta \models \alpha$, dann ist $(BS * \alpha) * \beta \models \alpha$.
Wenn die Integration des zweiten Triggers β den Trigger α stützen würde, dann sollte die Integration beider Trigger nicht zu einem Löschen des ersten Triggers führen. (Kein Trigger kann zu einer Evidenz gegen sich selbst führen.)
Alternative Formulierung mit bedingten Sätzen: Wenn $BS \models \alpha|\beta$, dann ist auch $BS * \alpha \models \alpha|\beta$.
In Worten: Der bedingte Satz $\alpha|\beta$ sollte nicht eliminiert werden, wenn der Trigger α integriert wird.

(DP 4) Wenn $BS * \beta \not\models \neg\alpha$, dann ist $(BS * \alpha) * \beta \not\models \neg\alpha$.
In Worten: Wenn die Integration des zweiten Triggers β mit dem ersten Trigger α kompatibel ist, dann soll die Integration beider Trigger ebenfalls kompatibel mit dem ersten Trigger sein.
Alternative Formulierung mit bedingten Sätzen: Wenn $BS \not\models \neg\alpha|\beta$, dann ist

$BS * \alpha \not\models \neg\alpha|\beta$.
In Worten: Der bedingte Satz $\neg\alpha|\beta$ sollte nicht erworben werden, wenn der Trigger α integriert wird.

Obwohl das Postulat (DP 2) prima facie einsichtig erscheint, zeigt ein einfacher Beweis von Freund und Lehmann (2002), dass (DP 2) im AGM-Rahmenwerk über das Ziel hinausschießt: Kein AGM-Revisionsoperator kann (DP 2) erfüllen.

Proposition 6.3. *(Freund und Lehmann, 2002, S. 8) Es gibt keinen Operator, der (AGM-R 1)–(AGM-R 4) und (DP 2) erfüllt.*

Beweis. Siehe S. 277.

Bemerkung 8. Der Beweis fußt auf der Revision mit Kontradiktionen und benutzt wesentlich die Tatsache, dass als linkes Argument das inkonsistente Belief-Set $BS_\perp$ vorkommen darf. In Integrationsszenarios, wie sie in dieser Arbeit vorausgesetzt werden, können derartige Ausnahmefälle ausgeschlossen werden. Daher zeigt dieser Beweis noch nicht, dass (DP 2) kein adäquates Postulat für iterierte Reinterpretation ist.

Da sie an den Postulaten (DP 1)–(DP 4) festhalten, modifizieren Darwiche und Pearl in ihrem Folgeaufsatz (Darwiche und Pearl, 1997) die AGM-Postulate und Iterationspostulate derart, dass nicht mehr Belief-Sets BS als linke Argumente von Revisionsoperatoren vorkommen, sondern reichhaltigere Strukturen, die sie epistemische Zustände Ψ nennen. Beispielsweise lautet das Erfolgspostulat nun:

(DP-AGM* 2) $\alpha \in \mathrm{Bel}(\Psi * \alpha)$

Mit dieser Anreicherung wechseln Darwiche und Pearl die Perspektive von einer statischen Modellierung zu einer dynamischen Modellierung iterierter Belief-Revision. Die dynamische Modellierung ermöglicht es, Revisionsoperatoren zu definieren, die auch die Revisionshistorie einbeziehen. Einem epistemischen Zustand kann eindeutig ein Belief-Set $\mathrm{Bel}(\Psi)$ zugewiesen werden, aber nicht umgekehrt. Im Zuge der Umformulierung wird die für AGM-Operatoren geltende Linksextensionalität echt abgeschwächt: Nur dann, wenn die epistemischen Zustände Ψ_1 und Ψ_2 identisch sind, kann die Identität des Revisionsergebnisses bei Revision mit einem Trigger α garantiert werden: Wenn $\Psi_1 = \Psi_2$, dann $\mathrm{Bel}(\Psi_1 * \alpha) = \mathrm{Bel}(\Psi_2 * \alpha)$. Es wird nicht gefordert, dass wenn $\mathrm{Bel}(\Psi_1) = \mathrm{Bel}(\Psi_2)$, dann $\mathrm{Bel}(\Psi_1 * \alpha) = \mathrm{Bel}(\Psi_2 * \alpha)$. Die Umformulierung hat den gewünschten Effekt, dass sich die Existenz von Revisionsoperatoren zeigen lässt, die die auf epistemische Zustände angepassten AGM-Postulate und Iterationspostulate (DP 1)–(DP 4) erfüllen (Darwiche und Pearl, 1997, Theorem 5).

Darwiche und Pearl (1994) verstehen ihre Postulate als eine Abschwächung einer Eigenschaft, von Boutiliers Revisionsoperatoren („natural revision“ genannt) erfüllt wird (Boutilier, 1993, Korollar 4, S. 523). Diese Eigenschaft gemäß Boutilier führen Darwiche und Pearl als Postulat (CB) ein.

(CB) Wenn $\neg\beta \in BS * \alpha$, dann $(BS * \alpha) * \beta = BS * \beta$.
In Worten: Wenn der zweite Trigger β nicht mit dem Integrationsresultat mit dem ersten Trigger kompatibel ist, dann soll die schrittweise Integration von α und β nichts anderes liefern als die Integration des zweiten Triggers allein.

In der Terminologie der bedingten Sätze ist (CB) ein Postulat, das eine absolut minimale Änderung der bedingten Sätze beschreibt: es verbietet im Gegensatz zu (DP 1)–(DP 4) das Hinzufügen neuer bedingter Sätze. Es lässt sich zeigen, dass (CB) (zusammen mit den AGM-Postulaten) die Postulate (DP 1)–(DP 4) impliziert, aber nicht umgekehrt. Darwiche und Pearl argumentieren, dass eine absolut minimale Änderung von bedingten Sätzen nicht wünschenswert ist und daher ihre Postulate (DP 1)–(DP 4) besser geeignet sind, adäquate iterierte Revision zu spezifizieren als das Postulat (CB).[2]

Die Postulate von Darwiche und Pearl bilden den Ausgangspunkt für viele der folgenden Untersuchungen zur iterierten Revision. Lehmann (1995) betrachtet Abschwächungen des zweiten Postulats (DP 2), die mit den AGM-Postulaten kompatibel ist. Außerdem wird ein alternatives Rahmenwerk beschrieben, mit dem iterierte Revision aus der dynamischen Perspektive behandelt werden kann. Iterierte Revision wird hier nicht durch die wiederholte Anwendung eines zweistelligen Operators modelliert, sondern direkt als Folge von Triggern beschrieben. Ist A eine Folge von Triggern, so beschreibt $[A]$ das durch schrittweise Integration aller Trigger aus A resultierende Belief-Set in ein nicht näher spezifiziertes initiales Belief-Set. Das Erfolgspostulat von AGM lautet in diesem Formalismus $\alpha \in [A{\cdot}\alpha]$, wobei $A{\cdot}\alpha$ die durch Anhängen von α an A entstehende Folge ist. In diesem Formalismus lassen sich insbesondere iterierte Revisionen beschreiben, deren Resultate nicht allein von dem Belief-Set aus dem vorherigen Schritt abhängen. Es wird daher nicht gefordert, dass, wenn $[A_1] = [A_2]$, dann auch $[A_1 \cdot \alpha] = [A_2 \cdot \alpha]$ gilt.

Einen stärker an der Arbeit von Darwiche und Pearl (1994) orientierten Ansatz für eine dynamische Modellierung iterierter Belief-Revision geben Nayak und Kollegen (Nayak et al., 1996). Der wesentliche Unterschied zu Darwiche und Pearl (1994) ist eine Dynamisierung der Revisionsoperatoren; der zweite Revisionsoperator in einer zweischrittigen Revision, die in den Iterationspostulaten spezifiziert wird, darf sich von dem Revisionsoperator aus dem ersten Schritt unterscheiden. Genauer darf der zweite Revisionsoperator $*^{\alpha}$ von dem Trigger α im ersten Schritt abhängen. Die Abhängigkeit vom ersten Trigger wird durch ein Superskript ge-

[2] Die Begründung für die Inakzeptabilität von (CB) (Darwiche und Pearl, 1994, S. 9; 14–15) ist für die folgende Analyse der iterierten Reinterpretation nicht relevant und wird hier daher ausgelassen.

kennzeichnet. Das erste Postulat von Darwiche und Pearl z.B. lautet damit in der abgeschwächten Variante:

(N-DP 1) Wenn $\beta \models \alpha$, dann ist $(BS * \alpha) *^{\alpha} \beta \equiv BS * \beta$.

Das problematische zweite Iterationspostulat (DP 2) schwächen Nayak und Kollegen zum Postulat (N-DP' 2) ab.

(N-DP' 2) Wenn $\beta \models \neg\alpha$ und $\not\models \neg\alpha$, dann ist $(BS * \alpha) *^{\alpha} \beta = BS * \beta$.

Die Anwendbarkeit der Iterationspostulate erweitern Nayak und Kollegen, indem sie spezifizieren, wie eine Revision mit einem inkonsistenten Belief-Set aussehen sollte. Das Postulat (N-Absurdität) beinhaltet, dass die Revision des inkonsistenten Belief-Sets $BS_{\perp}$ mit einem Trigger α das Belief-Set komplett löscht und nur die Menge der Folgerungen von α beibehält.

(N-Absurdität) $BS_{\perp} * \alpha = \mathrm{Cn}(\alpha)$

Nayak und Kollegen (Nayak et al., 1996) diskutieren ein weiteres Iterationspostulat, das eine von den Postulaten (DP 1)–(DP 4) nicht abgedeckte Eigenschaft beschreibt.

(N-Konjunktion) Wenn $\beta \not\models \neg\alpha$, dann ist $(BS * \alpha) *^{\alpha} \beta = BS * (\alpha \wedge \beta)$.

Für einen Revisionsoperator $*$, der Postulat (N-Konjunktion) erfüllt, gilt, dass wenn erster und zweiter Trigger kompatibel sind, die schrittweise Integration (mit einer im zweiten Schritt modifizierten Revision $*^{\alpha}$) zu demselben Belief-Set führt wie die Integration der Konjunktion von α und β. Postulat (N-Konjunktion) formuliert eine Sequenzialisierungsbedingung: Die Integration einer Konjunktion $\alpha \wedge \beta$ oder äquivalent der Menge $\{\alpha, \beta\}$ lässt sich durch eine schrittweise Integration von α und β sequenzialisieren.

Die logische Stärke ihres Iterationspostulat zeigt die Beobachtung 2 von Nayak und Kollegen (Nayak et al., 1996): Die an ihr Rahmenwerk angepassten Postulate von Darwiche und Pearl (N-DP 1), (N-DP 3) und (N-DP 4) sowie die Abschwächung (N-DP' 2) lassen sich aus den Basispostulaten von AGM und ihrem Iterationspostulat (N-Konjunktion) sowie (N-Absurdität) ableiten. Auch die Erfüllbarkeit ihres Iterationspostulats im Rahmenwerk von AGM können Nayak und Kollegen beweisen (Nayak et al., 1996, Theorem 4). Es lassen sich dynamische Revisionsoperatoren definieren, die (N-Absurdität), (N-DP' 2), (N-Konjunktion) und die AGM-Basispostulate erfüllen. Die Definition ihrer Operatoren basiert auf der Strukturierung eines Belief-Sets durch eine Relation zur epistemischen Verankerung.

Die Iterationspostulate von Darwiche und Pearl (1994) und Nayak und Kollegen (Nayak et al., 1996) lassen sich auch auf (möglicherweise unendliche) triggernde Wissensbasen verallgemeinern. (Diese Verallgemeinerung ist auch für die iterierte Reinterpretation nötig, da auch triggernde Ontologien betrachtet werden.) Eine systematische Analyse der auf iterierten multiplen Belief Revision für Belief-Sets als zweitem Argument gibt Zhang (2004).

6.2 Iterierte Reinterpretation: Eigenschaften

Für Reinterpretationsoperatoren mit konzeptbasierten Literalen als Trigger wurden bereits im Kapitel 3 Sätze formuliert, die für den einschrittigen Fall erfüllte Eigenschaften auf den iterierten Fall verallgemeinern. In diesem Abschnitt wird die Analyse der iterierten Anwendung auf Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien ausgeweitet und unter dem Gesichtspunkt der Iterationspostulate in der Literatur zur klassischen Belief-Revision analysiert.

6.2.1 (Un-)Erfüllbarkeit klassischer Iterationspostulate

Die in Abschnitt 6.1 genannten Postulate für die iterierte Anwendung von Wissensänderungsoperatoren lassen sich durch Relativierung auf die öffentliche Sprache an das Integrationsszenario, das in dieser Arbeit vorausgesetzt wird, anpassen und können auf ihre Erfüllung durch die Reinterpretationsoperatoren getestet werden.

Die Selektionsfunktionen, auf der die Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien basieren, müssen hinreichend global sein, um die iterierte Anwendung zu ermöglichen. Ich werde im Folgenden nur diejenigen Varianten der Reinterpretationsoperatoren betrachten, bei der die Empfängerontologie vollständig internalisiert und nur eine Selektionsfunktion vorausgesetzt wird, die maximale Teilmengen von Brückenaxiomen bestimmt. Diese Selektionsfunktion ist hinreichend global zu definieren, so dass sie in allen Integrationsschritten verwendet werden kann.[3] Hierfür wird ein internes Vokabular $\mathcal{V}_i$ und ein öffentliches Vokabular $\mathcal{V}_c$ vorausgesetzt. Eine (globale) Selektionsfunktion γ muss folgende Bedingung erfüllen: Die leere Menge wird auf sich abgebildet, $\gamma(\emptyset) = \emptyset$. Außerdem muss sie aus jeder nicht leeren Menge von Teilmengen einer Menge von Brückenaxiomen $\mathrm{BA}(\sigma)$ eine nicht-leere Untermenge auswählen. D.h. ist σ eine Substitution, so dass $\mathcal{V}(\sigma[\mathcal{V}_c]) \subseteq (\mathcal{V}_i \cup \mathcal{V}_c)$, dann gilt für alle nicht-leeren Mengen $X \subseteq \mathrm{Pot}(\mathrm{BA}(\sigma))$, dass $\gamma(X) \subseteq X$ und $\emptyset \neq \gamma(X)$. Der im Anhang definierte Selektionsbegriff (Anhang A, Definition A.39, S. 246) hat bereits diese Globalitätseigenschaft.

In den unten aufgeführten (Gegen-)Beispielen werden nur Reinterpretationsoperatoren betrachtet, die keine Konstanten (echt) reinterpretieren. Solange eine

[3] Alternativ lässt sich im Stile der klassischen Iterationsansätze die Selektionsfunktion als eine zusätzliche Struktur für die Ontologien verstehen, die im Laufe der Integration ebenfalls geändert werden muss.

Inkonsistenzauflösung allein durch Reinterpretation von Rollen- und Konzeptsymbolen (bzw. allgemeiner Prädikatsymbolen) möglich ist, können diese Reinterpretationsoperatoren durch eine geeignete Definition der Selektionsfunktion γ modelliert werden: γ wählt höchstens solche Mengen von Brückenaxiomen aus, in denen Identitäten für alle Konstanten vorkommen. In diesem Falle nenne ich γ eine Selektionsfunktion, die die *Reinterpretation von Rollen- und Konzeptsymbolen* (bzw. allgemeiner Prädikatsymbolen) *bevorzugt*.[4] In den Gegenbeispielen, die in den Beweisen verwendet werden, sind alle Ontologien derart konstruiert, dass eine Konfliktauflösung allein durch Reinterpretation von Konzept- und Rollensymbolen möglich ist und daher Selektionsfunktionen definiert werden können, die die Reinterpretation von Konzept- und Rollensymbolen bevorzugen.

In den Postulaten werden triggernde Ontologien vorausgesetzt, die nur Symbole aus dem öffentlichen Vokabular enthalten. Triggernde Ontologien werden in diesem Abschnitt mit Zahlen in der Reihenfolge, in der sie in der Triggersequenz auftreten, indiziert. O_1 steht für die im ersten Schritt triggernde Ontologie, O_2 für die im zweiten Schritt triggernde Ontologie. Abkürzend wird statt $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O')$ auch $O \equiv_{\mathcal{V}_c} O'$ geschrieben.

Das auf Boutilier (Boutilier, 1993) zurückgehende Iterationspostulat (CB) lässt sich zwar an das Integrationsszenario anpassen; aber auch die adaptierte Variante von (CB) ist nicht als adäquates Kriterium für die Integration zweier Ontologien zu begründen. Tatsächlich erfüllen die Reinterpretationsoperatoren (vom Typ 1 und Typ 2) die adaptierte Variante von (CB) nicht.

Die Iterationspostulate gemäß Darwiche und Pearl (1994) sind schwächer als das Postulat (CB). Daher besteht prinzipiell die Möglichkeit, dass die Reinterpretationsoperatoren eine Teilmenge dieser Postulate erfüllen. Für die Operatoren von Delgrande und Schaub (Delgrande und Schaub, 2000, 2003), deren Konstruktion ähnlich zu der Konstruktion der Reinterpretationsoperatoren ist, kann für jedes der Postulate von Darwiche und Pearl ein Gegenbeispiel konstruiert werden (Delgrande und Schaub, 2000, S. 4). Wie sich zeigt, gilt auch für die Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 für triggernde Ontologien, dass für alle adaptierten Varianten von (DP 1)–(DP 4) ein Gegenbeispiel konstruierbar ist (Beobachtung 6.4.5). Für Typ-2-Operatoren für triggernde konzeptbasierte Literale kann aufgrund der geringeren Ausdrucksmächtigkeit die Erfüllbarkeit des ersten, dritten und vierten Postulats gezeigt werden (Beobachtung 6.4.2).

Wie auch im Falle des Postulats von Boutilier lassen sich die Postulate von Darwiche und Pearl auf die Reinterpretation anpassen. Da hier keine zusätzliche Struktur über einer Ontologie geändert wird, werden die Postulate direkt für Men-

[4]Hier wird im Vergleich zu Seite 96 ein anderer Begriff der Bevorzugung verwendet, da hier nur Selektionsfunktionen für Mengen von Brückenaxiomen und nicht für Symbolmengen betrachtet werden.

gen von Ontologieaxiomen (und nicht für epistemische Zustände) formuliert. Ich betrachte daher nur eine statische Modellierung der iterierten Revision. Der Fall, dass $\circ$ ein Operator für triggernde konzeptbasierte Literale ist, wird durch einelementige Ontologien O_1 und O_2 mit einem Literal als einzigem Element abgedeckt. Es seien in den folgenden Postulaten Ontologien $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$, $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \emptyset \rangle$ und $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \emptyset \rangle$ vorgegeben.

(Reint-DP 1) Wenn $O_2 \models O_1$, dann $(O \circ O_1) \circ O_2 \equiv_{\mathcal{V}_c} O \circ O_2$.
In Worten: Wenn die Menge der Axiome der zweiten Triggerontologie logisch stärker ist als die Axiommenge der ersten Triggerontologie, dann wird bzgl. der öffentlichen Sprache $\mathcal{V}_c$ die schrittweise Integration von O_1 gefolgt von O_2 bereits von der einschrittigen Integration der stärkeren Axiommenge O_2 abgedeckt.

(Reint-DP 2) Wenn $O_1 \cup O_2 \models \bot$, dann $(O \circ O_1) \circ O_2 \equiv_{\mathcal{V}_c} O \circ O_2$.
In Worten: Wenn die Axiommengen der Triggerontologien O_1 und O_2 inkompatibel sind, dann wird die schrittweise Integration von O_1 gefolgt von O_2 bereits von der einschrittigen Integration der Axiommenge der zweiten Ontologie O_2 abgedeckt.

(Reint-DP 3) Wenn $O \circ O_2 \models O_1$, dann $(O \circ O_1) \circ O_2 \models O_1$.
In Worten: Wenn aus der Integration der Axiommenge der zweiten Ontologie die Axiommenge der ersten Ontologie folgerbar ist, dann darf eine vorausgehende Integration der Axiommenge der ersten Ontologie nicht die Folgerbarkeit beeinträchtigen.

(Reint-DP 4) Wenn $O_1 \cup (O \circ O_2) \not\models \bot$, dann $O_1 \cup (O \circ O_1) \circ O_2 \not\models \bot$.
In Worten: Wenn die Integration der Axiommenge der zweiten Ontologie zu einem mit der Axiommenge der ersten Triggerontologie kompatiblen Resultat führt, darf eine vorherige Integration der Axiommenge der ersten Ontologie nicht die Kompatibilität beeinträchtigen.

Die Ergebnisse zur Erfüllbarkeit der angepassten Iterationspostulate durch die Reinterpretationsoperatoren sind in Beobachtung 6.4 festgehalten; die Teilaussagen von Beobachtung 6.4 beziehen sich auf die verschiedenen Sorten von Reinterpretationsoperatoren, die bisher definiert wurden. Tabelle 6.1 fässt die Ergebnisse von 6.4 zusammen. In den Zeilen stehen jeweils die Operatoren, in den Spalten die Bezeichner der Iterationspostulate. Die letzte Spalte gibt die Referenzen zu den entsprechenden Teilaussagen von Beobachtung 6.4. Unter den negativen Ergebnissen (Nichterfüllung durch Reinterpretationsoperatoren) gibt es unterschiedlich starke Aussagen; dabei richtet sich die Stärke danach, ob Gegenbeispiele von Triggerontologien konstruiert werden können, die für alle Selektionsfunktionen oder nur für eine konkrete Selektionsfunktion die Nichterfüllung der Iterationspostulate belegen.

Op.	(Reint-DP 1)	(Reint-DP 2)	(Reint-DP 3)	(Reint-DP 4)	Beob. 6.4.x
$\otimes_1$	$+$	$-$	$+$	$+$	1
$\oplus_1^{\text{sel}}$	$+$	$-$ $(\forall\,\text{sel})$	$+$	$+$	
$\odot_1$	$+$	$-$	$+$	$+$	
$\otimes_2$	$+$	$-$	$+$	$+$	2
$\oplus_2^{\text{sel}}$	$+$	$-$ $(\forall\,\text{sel})$	$+$	$+$	
$\odot_2$	$+$	$-$	$+$	$+$	
$\otimes_1^{\gamma}$	$-$ $(\forall\gamma^{KR})$	$-$ $(\forall\gamma)$	$+$	$+$	3
$\odot_1^{\gamma}$	$-$ $(\exists\gamma^{KR})$	$-$ $(\forall\gamma)$	$+$	$+$	4
$\otimes_2^{\gamma}$	$-$ $(\forall\gamma^{KR})$	$-$ $(\forall\gamma^{KR})$	$-$ $(\forall\gamma^{KR})$	$-$ $(\exists\gamma^{KR})$	5
$\odot_2^{\gamma}$	$-$ $(\exists\gamma^{KR})$	$-$ $(\forall\gamma^{KR})$	$-$ $(\exists\gamma^{KR})$	$-$ $(\exists\gamma^{KR})$	6

Tabelle 6.1: Ergebnisse von Beobachtung 6.4
Ein Eintrag $+$ bedeutet, dass das Postulat für alle Ontologien durch den Operator erfüllt wird. Ein Eintrag – bedeutet, dass es Ontologien gibt, so dass das Postulat (für alle Selektionsfunktionen) nicht erfüllt wird. Ein Eintrag der Form – $(\forall\,\text{sel})$ bzw. – $(\forall\gamma)$ bzw. – $(\forall\gamma^{KR})$ bedeutet, dass es Gegenbeispiele von Ontologien gibt, so dass für alle Selektionsfunktionen sel bzw. γ bzw. γ^{KR}, die die Reinterpretation von Konzept- und Rollensymbolen bevorzugen, das Postulat nicht erfüllt wird. Ein Eintrag der Form – $(\exists\gamma^{KR})$ bedeutet, dass es Selektionsfunktionen γ^{KR} gibt, die die Reinterpretation von Konzept- und Rollensymbolen bevorzugen, so dass das Postulat nicht erfüllt wird.

Beobachtung 6.4. *Bzgl. der Erfüllbarkeit der auf Reinterpretation angepassten Varianten der Iterationspostulate von Darwiche und Pearl (1997) gelten folgende Aussagen:*

1. *Die Typ-1-Operatoren für triggernde konzeptbasierte Literale* ($\otimes_1, \odot_1, \oplus_1^{\mathrm{sel}}$) *erfüllen (Reint-DP 1), (Reint-DP-3) und (Reint-DP 4).*
   Es gibt Ontologien $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, *so dass* $\otimes_1, \odot_1, \oplus_1^{\mathrm{sel}}$ *für alle Selektionsfunktionen* sel *nicht (Reint-DP 2) erfüllen.*

2. *Die Typ-2-Operatoren für triggernde konzeptbasierte Literale* ($\otimes_2, \odot_2, \oplus_2^{\mathrm{sel}}$) *erfüllen (Reint-DP 1), (Reint-DP 3) und (Reint-DP 4).*
   Es gibt Ontologien $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, *so dass* $\otimes_2, \odot_2$ *und* $\oplus_2^{\mathrm{sel}}$ *für alle Selektionsfunktionen* sel *nicht (Reint-DP 2) erfüllen.*

3. *Im Falle der schwachen Typ-1-Operatoren für triggernde Ontologien* $\otimes_1^\gamma$ *gilt:*
   $\otimes_1^\gamma$ *erfüllt (Reint-DP 3) und (Reint-DP 4).*
   Für das Iterationspostulat (Reint-DP 1) gibt es Ontologien $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, *so dass für alle Selektionsfunktion* γ, *die die Reinterpretation von Konzept- und Rollensymbolen bevorzugen, gilt:* $\otimes_1^\gamma$ *erfüllt nicht (Reint-DP 1).*
   Für das Iterationspostulat (Reint-DP 2) gibt es Ontologien $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, *so dass für alle Selektionsfunktion* γ *gilt:* $\otimes_1^\gamma$ *erfüllt nicht (Reint-DP 2).*

4. *Im Falle der starken Typ-1-Operatoren für triggernde Ontologien* $\odot_1^\gamma$ *gilt:*
   $\odot_1^\gamma$ *erfüllt (Reint-DP 3) und (Reint-DP 4).*
   Für das Iterationspostulat (Reint-DP 1) gibt es Ontologien $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ *und eine Selektionsfunktion* γ, *die die Reinterpretation von Konzept- und Rollensymbolen bevorzugen, so dass gilt:* $\odot_1^\gamma$ *erfüllt nicht (Reint-DP 1).*
   Für das Iterationspostulat (Reint-DP 2) gibt es Ontologien $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, *so dass für alle Selektionsfunktionen* γ *gilt:* $\odot_1^\gamma$ *erfüllt nicht (Reint-DP 2).*

5. *Im Falle der schwachen Typ-2-Operatoren für triggernde Ontologien* $\otimes_2^\gamma$ *gilt:*
   Für jedes der Iterationspostulate (Reint-DP x), $1 \leq x \leq 3$, *gibt es Ontologien* $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, *so dass für alle Selektionsfunktion* γ, *die die Reinterpretation von Konzept- und Rollensymbolen bevorzugen, gilt:* $\otimes_2^\gamma$ *erfüllt nicht das Postulat (Reint-DP x).*
   Es gibt Ontologien $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ *und eine Selektionsfunktion* γ, *die die Reinterpretation von Konzept- und Rollensymbolen bevorzugen, so dass gilt:* $\otimes_2^\gamma$ *erfüllt nicht das Postulat (Reint-DP 4).*

6. *Im Falle der starken Typ-2-Operatoren für triggernde Ontologien* $\odot_2^\gamma$ *gilt:*
   Für jedes der Iterationspostulate (Reint-DP 1), (Reint-DP 3), (Reint-DP 4) gibt es Ontologien $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ *und eine Selektionsfunktion* γ, *so dass gilt:* $\odot_2^\gamma$ *erfüllt nicht die Postulate (Reint-DP 1), (Reint-DP 3) bzw. (Reint-DP 4).*

Es gibt Ontologien $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, so dass für alle Selektionsfunktionen γ, die die Reinterpretation von Konzept- und Rollensymbolen bevorzugen, gilt: $\odot_2^\gamma$ erfüllt nicht das Postulat (Reint-DP 2).

Beweis. Siehe S. 278.

Dass weder die Reinterpretationsoperatoren für triggernde konzeptbasierte Literale noch die Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien das zweite Iterationspostulat (Reint-DP 2) erfüllen, ist angesichts des problematischen Status von (Reint-DP 2) (Inkompatiblität mit den AGM-Postulaten) zu erwarten gewesen. Die Begründung für die Plausibilität von (DP 2), die Darwiche und Pearl geben, ist einzig die natürlichsprachliche Formulierung des Postulats auf der Basis von bedingten Sätzen. Das Beispiel, welches sie zur zusätzlichen Plausibilisierung von (DP 2) anführen, erfasst nur einen Spezialfall von Postulat (DP 2).

Beispiel 6.5. Ein Agent ist der Ansicht, dass eine bestimmte Person X nett und reich ist. Als erstes erfährt der Agent, dass die Person X nicht nett ist. In einem zweiten Schritt erfährt der Agent, dass Person X doch wohl nett ist. Nach Postulat (DP 2) sollte der Agent an seiner anfänglichen Meinung festhalten, dass X reich ist. Denn würde dem Agenten zuerst gesagt werden, dass Person X nett ist, würde ihn das nur bestätigen: Es gilt $BS * \beta \models \epsilon$. Mit (DP 2) folgt damit auch $(BS * \alpha) * \beta \models \epsilon$, d.h. der Agent glaubt weiterhin daran, dass X reich ist, obwohl er nacheinander sich widersprechende Informationen (α, β) erhalten hat.

$$\begin{aligned} BS &\equiv \mathit{Nett} \wedge \mathit{Reich} \\ \alpha &= \neg \mathit{Nett} \\ \beta &= \mathit{Nett} \\ \epsilon &= \mathit{Reich} \end{aligned}$$

Die vermeintliche Plausibilität von (DP 2) ist in diesem Beispiel auf die atomare Beschaffenheit der Trigger zurückzuführen. Für komplexere Trigger α (und β) funktioniert das obige Beispiel, das die Einführung des Postulats (DP 2) motivieren soll, nicht mehr. Wenn α aus zwei Anteilen α_1 und α_2 besteht, von denen nur α_2 im Widerspruch zum zweiten Trigger β steht, sollte eine Konservierung aller Sätze aus $BS * \alpha$, die mit Hilfe des unproblematischen α_1 entstanden sind, nicht durch die Integration des zweiten Triggers β ausgeschlossen werden. (DP 2) gemäß würde aber in solchen Fällen, in denen β nicht α_1 impliziert, die Vergesslichkeit von Revisionsoperatoren als rational zu erachten sein: Sämtliche Anteile der bereits mit α_1 gewonnenen Information werden zugunsten der neuen Information gelöscht. Daher ist (DP 2) kein Postulat, das als Rationalitätspostulat für iterierte Revision eingefordert werden sollte.[5] Das gleiche Argument lässt sich

[5]Vgl. Delgrande und Schaub (2000).

nutzen, um zu begründen, dass Postulat (Reint-DP 2) kein Rationalitätspostulat für die iterierte Integration von Ontologien ist.

Dass man auch (DP 1) nicht zwingend als ein adäquates Iterationspostulat ansehen muss, meinen Delgrande und Schaub (2000) mit einem einfachen Beispiel zeigen zu können. Eine leichte Modifikation diese Beispiels wird im Beweis von Beobachtung 6.4.3 und 6.4.5 benutzt. Gegeben sind $O = \{\neg K(a)\}$, $O_1 = \{(K \sqcup L)(a)\}$ und $O_2 = \{K(a)\} \models O_1$. Sei γ eine Selektionsfunktion, die die Reinterpretation von Rollen- und Konzeptsymbolen bevorzugt. Die zweite triggernde Ontologie O_2 ist stärker als die erste triggernde Ontologie O_1. Die Integration des zweiten Triggers führt zu einer Ontologie, in der $L(a)$ nicht gilt $O \otimes_2^\gamma O_2 \not\models L(a)$. Die Integration des ersten Triggers führt zu einer Ontologie, in der $L(a)$ gilt: $O \otimes_2^\gamma O_1 = \{\neg K(a), (K \sqcup L)(a)\} \models L(a)$. Die Integration des ersten Triggers gefolgt von der Integration des zweiten Triggers liefert eine Ontologie, in der $L(a)$ weiterhin folgerbar ist:

$$\begin{aligned}(O \otimes_2^\gamma O_1) \otimes_2^\gamma O_2 \quad = \quad & \{\neg K(a), (K \sqcup L)(a), K'(a'),\\ & K \sqsubseteq K', a \doteq a', L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L\} \models L(a)\end{aligned}$$

Insgesamt sind also die Vorbedingungen von (Reint-DP 1) erfüllt, nicht jedoch die Nachbedingung: $(O \otimes_2^\gamma O_1) \otimes_2^\gamma O_2 \not\equiv_{\mathcal{V}_c} O \otimes_2^\gamma O_2$.

Es lässt sich kein plausibler Integrationsoperator $\circ$ definieren, der für diese Beispielontologien (Reint-DP 1) erfüllt. Ein solcher Operator müsste ebenfalls $O \circ O_1 \models L(a)$ erfüllen, da O und O_1 kompatibel sind. Auch sollte die folgende Integration von O_2 nicht zur Eliminierung von $L(a)$ führen, da $L(a)$ in keiner Weise für den Konflikt verantwortlich ist: $(O \circ O_1) \circ O_2 \models L(a)$.[6] Also besteht die einzige Möglichkeit dafür, dass $\circ$ (Reint-DP 1) erfüllt, darin, dass $O \circ O_2 \models L(a)$ gilt. Ein Operator $\circ$, der diese Bedingung erfüllt, lässt sich definieren: Aus O folgen die ABox-Axiome $(\neg K \sqcup L)(a)$ und $(\neg K \sqcup \neg L)(a)$. Enthält $\circ$ als Parameter eine Selektionsfunktion γ, die die Auswahl von $(\neg K \sqcup L)(a)$ gestattet, kann ein Integrationsresultat $O \circ O_2$ definiert werden, aus dem $L(a)$ folgt. Doch genau so gut können Selektionsfunktionen γ' gewählt werden, so dass $O \circ O_2 \not\models L(a)$ oder sogar $O \circ O_2 \models \neg L(a)$ gilt. Es gibt keinen vernünftigen Grund dafür, anzunehmen, dass ein Operator, der auf der Selektionsfunktion γ und nicht auf γ' basiert, zu einem rationaleren (da (Reint-DP 1) respektierenden) Verhalten führt. Basiert der Operator $\circ$ auf der Selektionsfunktion γ, so lässt sich die Erfüllbarkeit des Postulats (Reint-DP 1) für dieses Beispiel zeigen. Wenn das Beispiel jedoch minimal geändert wird, indem statt O_1 die Menge von Ontologieaxiomen $O_1' = \{(K \sqcup \neg L)(a)\}$

[6] Es gibt syntaxsensitive Revisionsoperatoren für Belief-Bases, die dazu führen können, dass $(O \circ O_1) \circ O_2 \not\models L(a)$; für die ließe sich die Erfüllbarkeit von (Reint-DP1) auch in diesem Beispiel garantieren. Das ändert jedoch nichts daran, dass die Beziehung $(O \circ O_1) \circ O_2 \models L(a)$ gelten sollte. Außerdem sind syntaxsensitive Belief-Base-Operatoren kein geeignete Operatoren, um die Integration von Ontologien zu modellieren.

betrachtet wird, wird der Operator $\circ$, da er auf γ und nicht auf γ' basiert, das Postulat (Reint-DP 1) nicht erfüllen.

Kurzum führt das Postulat (Reint-DP 1) nicht für alle Beispielontologien zu adäquaten Integrationsoperatoren. Daher ist (Reint-DP 1) genauso wenig wie (Reint-DP 2) ein adäquates Postulat für die Integration zweier Ontologien.

Das Beispiel gegen (Reint-DP 1) argumentiert mit der Komplexität der triggernden Ontologien. Für nicht-komplexe Trigger wie z.B. konzeptbasierte Literale habe ich kein entsprechendes Gegenbeispiel konstruieren können. Tatsächlich zeigt sich aber auch in diesem Falle, dass die Reinterpretationsoperatoren für triggernde konzeptbasierte Literale das Postulat (Reint-DP 1) (nebst (Reint-DP 3) und (Reint-DP 4)) erfüllen (Beobachtung 6.4.1 und 6.4.2).

Für die schwachen Typ-2-Operatoren $\otimes_2^\gamma$ lassen sich Beispielontologien konstruieren, so dass für alle Selektionsfunktionen γ, die die Reinterpretation von Konzept- und Rollensymbolen bevorzugen, $\otimes_2^\gamma$ nicht (Reint-DP 3) erfüllt (Beobachtung 6.4.5). Für starke Typ-2-Operatoren lässt sich eine Selektionsfunktion angeben, so dass (Reint-DP 3) nicht erfüllt wird. Die Konstruktion des Gegenbeispiels im Falle der schwachen Operatoren basiert auf dem Wechselspiel zwischen trivialer Integration (im Konsistenzfall) und echter Integration:

$$
\begin{aligned}
O &= \{K(a), \neg L(a) \vee \neg K(c), K(b) \vee \neg K(e)\} \\
O_1 &= \{\neg K(b)\} \\
O_2 &= \{\neg K(a), L(a), K(c) \vee \neg K(b), K(e)\}
\end{aligned}
$$

O und O_1 sind derart gewählt, dass sie miteinander kompatibel sind und somit $O \circ_2 O_1 = O \cup O_1 \models \neg K(e)$ gilt. Gemäß der Vorbedingung von (Reint-DP 3) führt die Integration des zweiten Triggers zu einer Menge von Ontologieaxiomen $O \circ_2 O_2$, die den ersten Trigger O_1 impliziert. Die Konfliktauflösung zwischen O_2 und O ist gemäß der Vorbedingung derart, dass O_1 nicht betroffen ist. Die vorgeschaltete Integration von O_1 aber erzwingt eine andere (bzw. zusätzliche) Konfliktauflösung mit O_2, so dass O_1 nicht mehr folgerbar ist: $(O \otimes_2^\gamma O_1) \otimes_2^\gamma O_2 \not\models \{\neg K(b)\} (= O_1)$. Dass $\neg K(b)$ nicht mehr folgerbar ist, hängt damit zusammen, dass eine Konfliktauflösung zwischen $O \otimes_2^\gamma O_1$ und O_2 erfolgt, bei der K reinterpretiert wird, und dass das Literal $\neg K(e)$, das aus $O \otimes_2^\gamma O_1$ folgt, das gleiche Vorzeichen hat wie $\neg K(b)$. Dieser Verlust von $\neg K(b)$ ist auf die spezielle Strategie der uniformen Reinterpretation zurückzuführen; kommt es zu Konflikten zwischen Sender- und Empfängerontologie, internalisieren Reinterpretationsoperatoren des Typs alle Symbole der Empfängerontologie; allein durch die nachträgliche Einführung von Brückenaxiomen kann erreicht werden, dass in der öffentlichen Sprache verloren gegangene Sätze zurückgewonnen werden. Wenn die gewählten Brückenaxiome nicht hinreichend ausdrucksmächtig sind, können alte Sätze (wie der Satz $\neg K(b)$

in diesem Beispiel), die konfliktfrei hinzugefügt werden könnten, nicht gefolgert werden.

Anders als im Gegenbeispiel zu (Reint-DP 1) ist das Gegenbeispiel gegen das Postulate (Reint-DP 3) (und ähnlich auch das Gegenbeispiel gegen Postulat (Reint-DP 4)) nicht als Argument dafür zu verwenden, dass (Reint-DP 3) und (Reint-DP 4) keine geeigneten Integrationspostulate sind. Es scheint durchaus vorstellbar, Reinterpretationsoperatoren zu definieren, die die Postulate (Reint-DP 3) und (Reint-DP 4) erfüllen. Allerdings zeigt die Konstruktion im Gegenbeispiel zu (Reint-DP 3), dass solche Operatoren nicht mehr auf uniforme Reinterpretation, sondern auf nichtuniformen Reinterpretation wie in dem Ansatz von Goeb und Kollegen (Goeb et al., 2007) zurückgreifen müssen. Wenn nichtuniforme Reinterpretation zugelassen wird, kann jedoch nicht mehr die Erfüllbarkeit der Postulate zur Konservierung und Rekonstruierbarkeit gewährleistet werden. (Reint-DP 3) und (Reint-DP 4) sind für das hier intendierte Integrationsszenario nicht geeignet, da sie mit der Grundidee der Konservierung und Rekonstruierbarkeit, mit denen die Bedingung, dass beide Ontologien sich in der Praxis bewährt haben, nicht vereinbar zu sein scheinen.

Dass Typ-1-Operatoren auch für triggernde Ontologien (Reint-DP 3) und (Reint-DP 4) erfüllen (Beobachtung 6.4.4), ist auf die Monotonie dieser Operatoren zurückzuführen. Die Monotonie ist dafür verantwortlich, dass aus den Vorbedingungen von (Reint-DP 3) und (Reint-DP 4) die Kompatibilität der Empfängerontologie O und der Triggerontologie O_1 folgt, so dass die Integration von O_1 in O nur in der Vereinigung der Ontologien besteht. Wieder wegen Monotonie ist die folgende Integration mit der zweiten Triggerontologie kompatibel mit O. Dass Typ-1-Operatoren die Postulate (Reint-DP 3) und (Reint-DP 4) erfüllen, ist angesichts der Monotonie der Typ-1-Operatoren keine Eigenschaft, die diese in einer nachvollziehbaren Weise zu besseren Operatoren macht.

6.2.2 Verallgemeinerte Konservierung und Rekonstruierbarkeit

In diesem Abschnitt werden das Linkskonservierungs- und das Linksrekonstruierbarkeitspostulat (S. 69 ff.) auf den iterierten Fall verallgemeinert. Die resultierenden Iterationspostulate sind der klassischen iterierten Belief-Revision fremd, da in dieser die Möglichkeit der Reinterpretation als Mittel zur Konfliktauflösung unberücksichtigt bleibt. Es seien $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine Ontologie und A eine endliche Folge von Mengen von Ontologieaxiomen über dem öffentlichen Vokabular.

Ein Operator $\circ$, der das iterierte Konservierungspostulat für das linke Argument (It-Linkskonservierung) erfüllt, muss die Existenz einer Substitution σ

garantieren, so dass die initiale Ontologie O als Namensvariante $O\sigma$ im Resultat der schrittweisen Integration einer Folge A von Ontologien enthalten ist.

(It-Linkskonservierung) Es gibt eine Substitution σ, so dass gilt:

$$O\sigma \subseteq O \circ A$$

Ein Operator $\circ$, der das Postulat (It-Linksrekonstruierbarkeit) zur iterierten Rekonstruierbarkeit erfüllt, muss die Existenz einer Substitution ρ garantieren, so dass die initiale Ontologie O und die Menge der integrierten Ontologien $\tilde{A}$ in der Namensvariante des Integrationsergebnisses $(O \circ A)\rho$ enthalten sind.

(It-Linksrekonstruierbarkeit) Es gibt eine Substitution ρ, so dass gilt:

$$O \cup \tilde{A} \subseteq (O \circ A)\rho$$

Alle Reinterpretationsoperatoren erfüllen beide Postulate, wie aus der folgenden Proposition (verallgemeinert Proposition 5.2 von Eschenbach und Özçep (2009)) folgt:

Proposition 6.6. *Es seien $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine Ontologie und A eine endliche Folge von Mengen von Ontologieaxiomen O_i mit $\mathcal{V}(O_i) \subseteq \mathcal{V}_c$ und $\circ$ ein Reinterpretationsoperator für triggernde Ontologien. Dann gibt es Substitutionen σ und ρ, so dass gilt:*

1. $O\sigma \subseteq O \circ A$
2. $O \cup \tilde{A} \subseteq (O \circ A)\rho$
3. *Für alle Symbole $L \in \mathcal{V}(O) \cup \mathcal{V}_c$ gilt: $L = L\rho$.*

Beweis. Siehe S. 283.

6.3 Sequenzialisierbarkeit und Kumulierbarkeit

Es wurden in dieser Arbeit zwei grundsätzlich verschiedene Methoden zur Integration einer Senderontologie in eine Empfängerontologie definiert und analysiert, die beide auf Reinterpretation basieren. In der ersten Methode, der iterierten Integration, erhält der Empfänger schrittweise Axiome der Senderontologie, die er inkrementell ohne Zwischenspeicherung mittels eines Integrationsoperators integriert. In der zweiten Methode erhält der Empfänger die Senderontologie als Ganzes und integriert diese Ontologie mittels eine multiplen Integrationsoperators. Eine allgemeine Reduktionsbeziehung zwischen diesen beiden Methoden kann formal durch die Sequenzialisierungs- bzw. Kumulierungsbedingung beschrieben werden.

Ein Operator $\circ$ ist *sequenzialisierbar* (erfüllt (Sequenz)), wenn sich die Integration einer triggernden Ontologie O_2 äquivalent durch die iterierte Integration einer Folge von Axiomen aus O_2 beschreiben lässt.

(Sequenz) Für Ontologien $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \emptyset \rangle$ gibt es eine Folge von Sätzen A, so dass $\tilde{A} \subseteq O_2$ und $O_1 \circ O_2 \equiv_{\mathcal{V}_c} O_1 \circ A$.

Ein Operator $\circ$ ist *kumulierbar* (erfüllt (Kum)), wenn sich die iterierte Integration einer Folge von Axiomen äquivalent durch die einschrittige Integration einer Teilmenge aus Elementen der Folge beschreiben lässt.[7]

(Kum) Für Ontologien $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und Satzfolgen A mit $\mathcal{V}(A) \subseteq \mathcal{V}_c$ gibt es eine Menge $O_2 \subseteq \tilde{A}$, so dass $O_1 \circ A \equiv_{\mathcal{V}_c} O_1 \circ O_2$.

Die Sequenzialisierungs- und Kumulierungsbedingung werden in der klassischen Belief-Revision nicht explizit genannt, obwohl viele Sätze in der einen oder anderen Weise eine Aussage über diese Bedingungen beinhalten. Bereits die ergänzenden AGM-Postulate (S. 21) können als Postulate verstanden werden, die abgeschwächte Varianten von (Kum) bzw. (Sequenz) formulieren. Die ergänzenden AGM-Postulate spezifizieren das Resultat der Integration für eine Konjunktion von Triggern der Form $\alpha \wedge \beta$. Die Verallgemeinerung dieser Postulate auf triggernde Ontologien (S. 33) und die zusätzliche Abschwächung auf das öffentliche Vokabular $\mathcal{V}_c$ ergibt folgende an die Reinterpretation adaptierte Varianten:

(Reint-MR 7) $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O \circ (O_1 \cup O_2)) \subseteq \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}((O \circ O_1) \cup O_2)$

Postulat (Reint-MR 7) schätzt den Interfaceanteil von $O \circ (O_1 \cup O_2)$ nach oben durch die sequenzialisierte Integration von O_1 gefolgt von O_2 ab, wobei die zweite Integrationsmethode in der Vereinigung besteht.

(Reint-MR 8) Wenn $(O \circ O_1) \cup O_2 \not\models \perp$, dann gilt:

$$\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}((O \circ O_1) \cup O_2) \subseteq \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O \circ (O_1 \cup O_2))$$

Postulat (Reint-MR 8) schätzt den Interfaceanteil von $O \circ (O_1 \cup O_2)$ nach unten durch die sequenzialisierte Integration von O_1 gefolgt von O_2 ab, wobei die zweite Integrationsmethode eine Expansion ist. Die Unterabschätzung wird nur für den

[7] Die Kumulierungsbedingung ist Gegenstand des Theorems 8 von Boutilier (1993). Es besagt, dass die dort definierten natürlichen Revisionsoperatoren Bedingung (Kum) erfüllen (Boutilier, 1993, S. 524).

Fall postuliert, dass die aus der Integration von O_1 resultierende Ontologie nicht mit der zweiten triggernden Ontologie konfligiert.

Bereits in Beobachtung 4.5 (S. 108) wurde festgestellt, dass es Ontologien und Selektionsfunktionen gibt, so dass die Interfacerelativierung $(\otimes_2^{\overline{\gamma}})^{\mathcal{V}_c}$ der schwachen Typ-2-Operatoren die Postulate (MR 7) und (MR 8) nicht erfüllen. Das bedeutet insbesondere, dass es Ontologien und Selektionsfunktionen gibt, so dass die Typ-2-Operatoren nicht die Postulate (Reint-MR 7) und (Reint-MR 8) erfüllen. Das Gegenbeispiel geht auf Delgrande und Schaub (Delgrande und Schaub, 2003, S. 13) zurück und wird im Beweis zu Beobachtung 4.5 in Anhang B (S. 256) verwendet.

Wenn die Selektionsfunktionen, auf denen die Definition der Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien basieren, geeignet gewählt werden, resultieren Reinterpretationsoperatoren, die die ergänzenden Postulate erfüllen. Dieses Ergebnis ist vergleichbar mit einer Folgerung aus dem von AGM (Alchourrón et al., 1985) bewiesenen Theorem 2.15 (s. diese Arbeit, S. 27). Dieses besagt, dass ein Partial-Meet-Revisionsoperator (für Belief-Sets) alle AGM-Postulate (insbesondere die ergänzenden Postulate) genau dann erfüllt, wenn es als ein transitiv-relationaler Partial-Meet-Revisionsoperator definiert werden kann.

Definition 6.7. Eine Selektionsfunktion γ für Brückenaxiome wird *maximumsbasierte Selektionsfunktion für Brückenaxiome* genannt, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

1. $|\gamma(X)| = 1$ für alle $\emptyset \neq X \subseteq \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})$.

2. Sind BA_1 und BA_2 nicht-leere Mengen von Mengen von Brückenaxiomen aus $\mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})$, d.h. $BA_1, BA_2 \in \mathrm{Pot}(\mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}))\setminus\{\emptyset\}$, so dass es zu jeder Menge $X_2 \in BA_2$ eine Menge $X_1 \in BA_1$ mit $X_2 \subseteq X_1$ gibt, und ist $\gamma(BA_1) \subseteq BA_2$, dann ist $\gamma(BA_2) = \gamma(BA_1)$.

Auf der Basis dieser eingeschränkten Klasse von Selektionsfunktionen lässt sich zeigen:

Beobachtung 6.8. *Es seien Ontologien $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle$, $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \emptyset\rangle$ und $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \emptyset\rangle$ und eine maximumsbasierte Selektionsfunktion γ für Brückenaxiome gegeben. Dann gilt:*

1. *Wenn $(O\otimes_2^{\gamma}O_1)\cup O_2$ konsistent ist, dann gilt: $O\otimes_2^{\gamma}(O_1\cup O_2) = (O\otimes_2^{\gamma}O_1)\cup O_2$.*

2. *Wenn $(O\otimes_1^{\gamma}O_1)\cup O_2$ konsistent ist, dann gilt: $(O_2\cup O)\otimes_1^{\gamma}O_1 = O_2\cup(O\otimes_1^{\gamma}O_1)$.*

Beweis. Siehe S. 284.

Bemerkung 9. Aus der Beobachtung 6.8 folgt insbesondere, dass die Typ-2-Operatoren mit maximumsbasierter Selektionsfunktion nicht nur (Reint-MR 8), sondern sogar das ursprüngliche Postulat (MR 8) erfüllen. Außerdem gilt, dass die Typ-2-Operatoren mit maximumsbasierter Selektionsfunktion (Reint-MR 7) erfüllen, da im Fall, dass $(O \otimes_2^\gamma O_1) \cup O_2$ inkonsistent ist, trivialer Weise gilt:

$$\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O \otimes_2^\gamma (O_1 \cup O_2)) \subseteq \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}((O \otimes_2^\gamma O_1) \cup O_2)$$

Die ergänzenden Postulate (Reint-MR 7) und (Reint-MR 8) resultieren nur dann in einer Sequenzialisierungspezifikation für einen Operator $\circ$, wenn der zweite Schritt der Revision mit einer Expansion zusammenfällt. Daher drücken die Postulate (Reint-MR 7) und (Reint-MR 8) wesentlich schwächere Bedingungen aus als (Sequenz) und (Kum).

Für Typ-1-Operatoren lässt sich aufgrund der Monotonie eine weitere Eigenschaft beweisen, die die Aussage abzuleiten gestattet, dass Typ-1-Operatoren, eingeschränkt auf triggernde konzeptbasierte Literale, (Kum) erfüllen.

Beobachtung 6.9. *Sei A eine endliche Folge von konzeptbasierten Literalen, $\circ_1$ ein Typ-1-Operator. Dann gibt es eine Menge $\tilde{A}' \subseteq \tilde{A}$, so dass $O \cup \tilde{A}' \subseteq O \circ_1 A$ und $O \circ_1 A$ eine konservative Erweiterung von $O \cup \tilde{A}'$ ist.*

Beweis. Siehe S. 285.

Dass $O \circ_1 A$ eine konservative Erweiterung von $O \cup \tilde{A}'$ ist, impliziert insbesondere $O \circ_1 A \equiv_{\mathcal{V}_c} O \cup \tilde{A}'$. Aus Beobachtung 6.9 folgt damit, dass die sequenzielle Integration von konzeptbasierten Literalen mittels eines Typ-1-Operators bzgl. der öffentlichen Sprache $\mathcal{V}_c$ äquivalent durch die triviale Integration (genauer Vereinigung mit) einer Teilmenge der Folge beschrieben werden kann: $O \circ_1 A \equiv_{\mathcal{V}_c} O \circ A'$. Aus Beobachtung 6.9 folgt daher, dass Typ-1-Operatoren die Kumulierungsbedingung (Kum) erfüllen.

Für Typ-2-Operatoren $\otimes_2$ für triggernde konzeptbasierte Literale wird die Kumulierungseigenschaft nicht erfüllt. Der Grund liegt nicht in der Stärke der durch (Kum) formulierten Bedingung. Bereits für die wesentlich schwächere Kumulierungseigenschaft (Kum'-$\circ_2$) (s.u.) können Gegenbeispiele konstruiert werden. Die Bedingung (Kum'-$\circ_2$) schwächt (Kum) in zwei Richtungen ab: Zum einen werden nicht allgemein Folgen von Axiomen, sondern von konzeptbasierten Literalen betrachtet. Zum anderen gestattet (Kum'-$\circ_2$) für die sequenzielle und für die einschrittige Integration unterschiedliche Operatoren. (Kum'-$\circ_i$) fordert, dass sich die sequenzielle Integration einer Folge A mit einem (schwachen bzw. starken) Reinterpretationsoperator des Typs i, der für triggernde konzeptbasierte Literale erklärt ist, bzgl. der öffentlichen Sprache durch die einschrittige Integration eines (starken oder schwachen) Reinterpretationsoperators $\circ_i^\gamma$ modellieren lässt. Dabei darf die Selektionsfunktion γ in Abhängigkeit von der initialen Ontologie und der Sequenz gewählt werden. Die Idee ist, dass die zusätzliche Information, die sich aus der Reihenfolge der Literale in der Triggersequenz A ergibt, durch eine geeignete Wahl der Selektionsfunktion zurückgewonnen werden kann.

(Kum'-$\circ_i$) Sei $i \in \{1,2\}$. Sei $\circ_i \in \{\otimes_i, \odot_i\}$ und $\circ_i^\gamma = \otimes_i^\gamma$, falls $\circ_i = \otimes_i$, und $\circ_i^\gamma = \odot_i^\gamma$, falls $\circ_i = \odot_i$.
Für jede Ontologie $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle$ und endliche Folge von konzeptbasierten Literalen A mit $\mathcal{V}(A) \subseteq \mathcal{V}_c$ gibt es eine Teilmenge $O_2 \subseteq \tilde{A}$ und eine Selektionsfunktion γ, so dass gilt: $O \circ_i A \equiv_{\mathcal{V}_c} O \circ_i^\gamma O_2$.

Beobachtung 6.10. *Es gibt Ontologien $\mathcal{O}$ und Folgen von konzeptbasierten Literalen A, so dass (Kum'-$\circ_2$) nicht erfüllt wird.*

Beweis. Sei $O = \{\neg K(a), K(b)\}$ und $A = \langle K(a), \neg K(b)\rangle$. Dann gilt zwar $O \circ_2 K(a) \circ_2 \neg K(b) \not\models K(a)$, aber $O \circ_2^\gamma \tilde{A} \models K(a)$ für alle Selektionsfunktionen γ. □

In entsprechender Weise lässt sich auch die Sequenzialisierungsbedingung abschwächen.

(Sequenz'-$\circ_2$) Sei $i \in \{1,2\}$. Sei $\circ_i^\gamma \in \{\otimes_i^\gamma, \odot_i^\gamma\}$ und $\circ_i = \otimes_i$, falls $\circ_i^\gamma = \otimes_i^\gamma$ und $\circ_i = \odot_i$, falls $\circ_i^\gamma = \odot_i^\gamma$.
Für jede Ontologie $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle$ und $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \emptyset\rangle$, wobei O_2 nur konzeptbasierte Literale enthält, und alle Selektionsfunktion γ gilt: Es gibt eine endliche Folge von konzeptbasierten Literalen A mit $\tilde{A} \subseteq O_2$, so dass: $O_1 \circ_i^\gamma O_2 \equiv_{\mathcal{V}_c} O_1 \circ_i A$.

Aber auch hier zeigt ein einfaches Beispiel, dass für die schwachen und starken Typ-2-Operatoren im Allgemeinen nicht die Erfüllung der abgeschwächten Sequenzialisierungsbedingung gewährleistet werden kann.

Beobachtung 6.11. *Es gibt Ontologien $\mathcal{O}$ und eine Selektionsfunktion γ, so dass $\circ_2^\gamma$ nicht (Sequenz'-$\circ_2$) erfüllt.*

Beweis. Seien $O = \{K(a) \vee L(a), K(b), L(b)\}$, $O_1 = \{\neg K(a), \neg L(a)\}$ und γ für eine Full-Meet-Reinterpretation als Identitätsfunktion gewählt. Dann gilt einerseits $O \otimes_2^\gamma O_1 \not\models K(b), L(b)$, aber andererseits $(O \otimes_2 \neg K(a)) \otimes_2 \neg L(a) \models K(b)$ und $(O \otimes_2 \neg L(a)) \otimes_2 \neg K(a) \models L(b)$. Entsprechend lässt sich für die starken Operatoren $\odot_2^\gamma$ ein Gegenbeispiel konstruieren. □

Aus den beiden Beobachtungen folgt, dass für Typ-2-Operatoren eine allgemeine durch (Sequenz'-$\circ_2$) und (Kum'-$\circ_2$) formalisierte Sequenzialisierungs- und Kumulierungseigenschaft nicht erfüllt wird. Daher sind die sequenzielle Integration und die einschrittige (multiple) Integration mittels der in dieser Arbeit definierten Reinterpretationsoperatoren vom Typ-2 nicht nur formal-definitorisch, sondern auch inhaltlich verschiedene Methoden.

6.4 Stabilität

In der Literatur zur iterierten Revision werden Eigenschaften von Revisionsoperatoren für endliche Folgen von Triggern und die Beziehung zwischen iterierter Revision für endliche Folgen und einschrittiger Revision mit einer komplexen Formel oder Menge, die in einer natürlichen Weise mit der Folge der Trigger verknüpft ist, untersucht. Obwohl bereits aus Sequenzialisierungsbetrachtungen Eigenschaften für die Revision mit unendlichen Triggerfolgen ableitbar sind[8], ist eine (unabhängige) Analyse von iterierter Revision für unendliche Triggerfolgen gerechtfertigt – insbesondere dann, wenn keine einfachen Sequenzialisierungsaussagen für die Revisionsoperatoren beweisbar sind.

Die Analyse von unendlichen Folgen von Triggern und die Frage nach der Zuverlässigkeit („reliability“) von Revisionsmethoden wird erst mit den Arbeiten von Kelly (1995, 1998b,a) sowie Martin und Osherson (1997, 1998, 2000) und Zhang und Foo (2002) zu einem Thema der Belief-Revision. Die Untersuchung von unendlichen Folgen von Triggern und des in diesen Arbeiten bearbeiteten Stabilitätsaspekts ist auch für die iterierte Integration von Ontologien mittels Reinterpretationsoperatoren vom Typ 2 von Belang. Da Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 nicht monoton sind, können vorher integrierte Trigger durch nachfolgende Integration verloren gehen.[9] Durch wiederholtes Senden von Triggern kann dem Verlust entgegengewirkt werden. Da vor der Integration jedoch nicht bekannt ist, wie häufig derselbe Trigger zu senden ist, werden unendlichen Folgen von Triggern betrachtet. Durch die Reinterpretation werden im Laufe der sequenzialisierten Integration verschiedene Hypothesen über die semantischen Beziehungen der sender- und empfängerseitigen Konzepte getroffen. Ein absolutes Kriterium dafür, welche Menge von Hypothesen gut und welche schlecht sind, lässt sich nicht ohne weitere anwendungsspezifische Rahmenbedingungen und Heuristiken festlegen. Zwei mögliche Forderungen an die Auswahl der Hypothesen sind:

- Die Menge der Hypothesen ändert sich längerfristig nicht mehr, d.h., dass eine Adaption der Empfängerterminologie an die Senderontologie gewährleistet ist, die sich ab einem Integrationsschritt nicht mehr ändert;
- die Adaption an die Senderontologie sollte möglichst viel von der Terminologie der Empfängerontologie beibehalten.

Wie die Ergebnisse in diesem Abschnitt zeigen werden, sind beide Forderung nicht zwingend kompatibel: Schwache Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 für

[8] Siehe z.B. die Anmerkungen von Zhang und Foo (Zhang und Foo, 2002, Abschnitt 2) zur Beweisbarkeit der Stabilität von Revisionsoperatoren gemäß Nayak (1994) und der Instabilität der Operatoren von Boutilier (1993).

[9] Siehe Beispiel 6.16, S. 176.

triggernde konzeptbasierte Literale $\otimes_2$ sind stabil (Theorem 6.21). Auf der anderen Seite kann jedoch bei Integration mit $\otimes_2$ die Terminologie des Empfängers fast vollständig verloren gehen (Theorem 6.27). Starke Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 für triggernde konzeptbasierte Literale $\odot_2$ können mehr von der Terminologie des Empfängers konservieren, sind dafür aber instabil (Theorem 6.28). Diese Tatsachen deuten auf eine auch für reinterpretationsbasierte Integrationsoperatoren geltende, generelle Inkompatibilität für iterierbare Belief-Revisionsoperatoren hin, die Kelly (1998b) unter dem Terminus *induktive Amnesie* behandelt (siehe den folgenden Abschnitt 6.4.1).

6.4.1 Stabilität in der Belief-Revision-Literatur

Die Arbeiten von Kelly (1995, 1998b,a) und Martin und Osherson (1997, 1998, 2000) sind von der formalen Lerntheorie und dem Prinzip des induktiven Wissenerwerbs in der Wissenschaftstheorie motiviert. Der gemeinsame Rahmen für beide Ansätze ist, dass ein Agent (Wissenschaftler) auf der Grundlage eines unendlichen Datenstroms A eine korrekte Hypothese über mögliche Sachverhalte der Welt treffen soll. Vorausgesetzt wird dabei eine endliche Menge von verschiedenen und gemeinsam exhaustiven möglichen Weltzuständen $m_1, \ldots, m_n$ und eine passende Kodierung von Informationen α_i, die die möglichen Weltzustände m_i beschreiben und als Trigger für die Hypothesenbildung des Wissenschaftlers dienen. Nach jedem neuen Trigger α_i aus dem Datenstrom A, die der Wissenschaftler zu sehen bekommt, bildet er eine Hypothese darüber, welche der möglichen Weltzustände m_i tatsächlich vorliegt. Die Hypothesenbildung gilt als erfolgreich, wenn sie sich ab einem Punkt auf die korrekte Hypothese stabilisiert: D.h. es gibt eine Stelle i im Datenstrom A, bis zu der der Wissenschaftler die korrekte Hypothese gefunden hat und daher ab i nur noch korrekte Hypothesen bildet.

Kelly (1998b,a) untersucht verschiedene iterierbare Belief-Revisionsoperatoren $*$ als Methoden, die der Wissenschaftler zur Hypothesenbildung heranziehen kann. Der Wissenschaftler benutzt dabei nach jedem neuen Trigger α_i einen vorher fest gewählten Revisionsoperator $*$, um seinen epistemischen Zustand Ψ_{i-1} zum neuen Zustand $\Psi_i = \Psi_{i-1} * \alpha_i$ zu revidieren, in dem dann gewisse Hypothesen über die möglichen Zustände der Welt gelten. Die Hypothesenbildung erfolgt hier also auf der Basis eines epistemischen Zustandes des Wissenschaftlers und des aktuellen Triggers α_i. Das Hauptergebnis von Kelly (1998a) ist, dass Belief-Revisionsoperatoren, die in starkem Maße eine minimale Änderung von epistemischen Zuständen bewirken, an *induktiver Amnesie* leiden: Nur dann können auf solchen Belief-Revisionsoperatoren basierende Lernmethoden eine erfolgreiche Voraussage für die Triggerfolge treffen und damit Stabilisierung gewährleisten, wenn sie bereits Erlerntes vergessen (Kelly, 1998a, Proposition 12, S. 29).

Auch Martin und Osherson (1997, 2000) untersuchen in dem oben dargestellten Rahmenwerk das Lernverhalten, das sich durch Einsatz von Belief-Revisionsoperatoren ergibt. Die von ihnen erzielten Ergebnisse sind jedoch für die hier angestrebte Stabilitätsuntersuchung von iterierter Integration weniger relevant, da ihre Revisionsoperatoren als rechtes Argument nicht einzelne Sätze, sondern endliche Folge von Sätzen haben. Insbesondere erfolgt die Bildung der Hypothese direkt auf der Basis einer endlichen Anfangssequenz der Triggerhistorie. Daher ist auch eines der Hauptergebnisse, dass Belief-Revisionsoperatoren (im Sinne von Martin und Osherson (1997)) ideale Lernmethoden sind: Prinzipiell ist für alle möglichen Weltzustände ein Belief-Revisionsoperator definierbar, der zu einer sich stabilisierenden korrekten Hypothesenbildung führt (Martin und Osherson, 1997, Theorem 21).

Unter dem Begriff der Konvergenz behandeln Zhang und Foo (2002) ein allgemeineres Konzept als das der Stabilität. Für eine Folge von Mengen $\langle \Gamma_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ wird (wie üblich) der obere $\overline{\lim}_{i\to\infty}\Gamma_i$ und untere Grenzwert $\underline{\lim}_{i\to\infty}\Gamma_i$ definiert durch die beiden Gleichungen:[10] $\overline{\lim}_{i\to\infty}\Gamma_i = \bigcap_{i=0}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} \Gamma_j$ und $\underline{\lim}_{i\to\infty}\Gamma_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} \Gamma_j$. $\langle \Gamma_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ *konvergiert*, alternativ: $\lim_{i\to\infty} \Gamma_i$ existiert, genau dann, wenn oberer und unterer Grenzwert identisch sind. In diesem Fall wird $\lim_{i\to\infty} \Gamma_i = \overline{\lim}_{i\to\infty}\Gamma_i = \underline{\lim}_{i\to\infty}\Gamma_i$ gesetzt. Jede stabile Folge von Satzmengen im Sinne dieser Arbeit ist konvergent, aber nicht umgekehrt.

Zhang und Foo (2002) untersuchen die Konvergenz von Folgen von Satzmengen $\langle B_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$, die sich durch iterierte Anwendung eines Belief-Revisionsoperators $*$ auf eine Folge $\langle \alpha_i \rangle$ von Sätzen ergeben: $B_{i+1} = B_i * \alpha_{i+1}$. Die Autoren nennen die so erzeugte Folge $\langle B_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ (für den Spezialfall ihrer Operatoren) einen *Lernprozess*. Die von Zhang und Foo erzielten Ergebnisse für Konvergenz sind für solche Fälle von unendlichen Triggerfolgen formuliert, die eine Aufzählung aller in einer Interpretation $\mathcal{I}$ geltenden Sätze

$$t(\mathcal{I}) = \{\alpha \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}) \mid \mathcal{I} \models \alpha\}$$

enthalten. Die Idee ist, dass (genau) ein Modell die Zustände der Welt beschreibt und der Empfänger durch schrittweise Integration aller in dem Modell geltenden Sätze (im Grenzwert) vollständiges Wissen über die Welt erhalten soll. Im Unterschied zu Kelly (1995, 1998b,a) sowie Martin und Osherson (1997, 1998, 2000) wird damit eine wesentlich reichhaltigere Triggerfolge vorausgesetzt.

Theorem 6.12 besagt, dass ein Lernprozess die Menge der Sätze $t(\mathcal{I})$ durch die obere und untere Grenze approximiert. Falls die Differenz zwischen der Ausgangsmenge B_0 und der Menge $t(\mathcal{I})$ sogar endlich ist (was insbesondere dann der Fall ist, wenn B_0 endlich ist), dann konvergiert der Lernprozess.

[10] (Zhang und Foo, 2001, S. 544)

Theorem 6.12. *Sei B eine Menge von Sätzen über einem Vokabular $\mathcal{V}$ und $*$ ein Operator für B, der für alle Sätze $\alpha, \beta \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$ folgende Bedingungen erfüllt:*

1. $B * \alpha \models \alpha$ *(Schwache Erfolgsbedingung)*[11]
2. *Wenn* $B \not\models \neg\alpha$, *dann* $B * \alpha = B \cup \{\alpha\}$. *(Vakuität)*
3. $B * \alpha \not\models \bot$ *genau dann, wenn* $\not\models \neg\alpha$. *(Konsistenz)*[12]
4. *Wenn* $\alpha \equiv \beta$, *so auch* $B * \alpha \equiv B * \beta$. *(Rechtsextensionalität)*[13]

Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation für $\mathcal{V}$ und $A = \langle \alpha_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung aller Sätze in $t(\mathcal{I})$. Es sei $\langle B_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ ein zu $*$ gehöriger Lernprozess, d.h. die durch $B_0 = B$ und $B_{i+1} = B_i * \alpha_{i+1}$ definierte Folge. Dann gilt:

1. $\underline{\lim}_{i \to \infty} \mathrm{Cn}(B_i) \subseteq t(\mathcal{I}) \subseteq \overline{\lim}_{i \to \infty} \mathrm{Cn}(B_i)$
2. *Wenn $*$ zusätzlich die Inklusionseigenschaft erfüllt, d.h.*

   $B * \alpha \subseteq B \cup \{\alpha\}$ *(Inklusion)*

   gilt und $B_0 \setminus t(\mathcal{I})$ endlich ist, dann gilt $\lim_{i \to \infty} \mathrm{Cn}(B_i) = t(\mathcal{I})$.

Beweis. Siehe S. 285.

Bemerkung 10. Theorem 6.12 ist meine Reformulierung des Theorems 1 von Zhang und Foo. Sie formulieren ihr Theorem direkt für eine konkrete Klassen von Operatoren, obwohl im Beweis nicht auf die Konstruktion, sondern nur die Erfüllung der Postulate zurückgegriffen wird.

Der Beweis des Theorems nutzt wesentlich die Vollständigkeitseigenschaft von $t(\mathcal{I})$: Für alle α gilt $t(\mathcal{I}) \models \alpha$ oder $t(\mathcal{I}) \models \neg\alpha$. Außerdem benutzt der Beweis die Tatsache, dass für jeden Satz in $t(\mathcal{I})$ eine unendliche Menge von äquivalenten Sätzen aus $t(\mathcal{I})$ existiert, die in der Folge vorkommen.

Das zweite Theorem von Zhang und Foo (2002) trifft eine Aussage auch für den Fall, dass $B_0 \setminus t(\mathcal{I})$ nicht endlich ist. Während Theorem 1 auch abstrakt für solche Operatoren formuliert ist, die die genannten Postulate erfüllen, nehmen die Autoren in Theorem 2 auf konkrete Operatoren Bezug, die auf der Basis einer iterierbaren Struktur erklärt sind, die die epistemische Verankerung von Sätzen oder den Grad der Akzeptanz („degree of belief") spezifiziert. Wenn diese Operatoren die Voraussetzungen erfüllen, dass ein Trigger mit einer relativ hohen Akzeptanz eingeordnet wird und dass das wiederholte Einfügen eines Triggers

[11] Die stärkere Erfolgsbedingung für Belief-Bases B lautet $\alpha \in B * \alpha$; vgl. Postulat (HR 1), S. 30.

[12] Vgl. (HR 2), S. 30.

[13] Vgl. Postulat (AGM-R 6), S. 20.

nicht zu einer Minderung des Grads der Akzeptanz führt, kann die Konvergenz von Lernprozessen gezeigt werden (Zhang und Foo, 2002, Theorem 2, S. 554).[14]

In den (In-)Stabilitätsaussagen für die Reinterpretationsoperatoren kann und wird die Voraussetzung an die Triggersequenz, dass sie sich aus allen in einer Interpretation $\mathcal{I}$ geltenden Sätzen $t(\mathcal{I})$ zusammensetzt, nicht getroffen werden, da in dem intendierten Integrationsszenario die Trigger von Ontologien stammen. Eine Ontologie $\mathcal{O}$ ist in den meisten Fällen jedoch nicht vollständig, d.h. nicht für alle Sätze α gilt $O \models \alpha$ oder $O \models \neg\alpha$, daher kann in diesen Fällen auch keine Interpretation $\mathcal{I}$ existieren, so dass $O = t(\mathcal{I})$. Wenn man jedoch mit Zhang und Foo (2002) die genannte Voraussetzung an die Triggersequenz trifft, lässt sich für Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 durch leichte Modifikation des Beweises die erste Teilaussage von Theorem 6.12 zeigen – unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass B konsistent ist und jedes B_i reinterpretationskompatibel ist mit α_{i+1}.

Korollar 6.13. *Sei $\circ_2 \in \{\otimes_2^\gamma, \odot_2^\gamma\}$ ein Reinterpretationsoperator des Typs 2, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0 = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine konsistente Ontologie, $\mathcal{I}$ eine Interpretation für $\mathcal{V}$ und $A = \langle \alpha_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung aller Sätze in $t(\mathcal{I})$. Es sei $\langle O_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ mit $O_{i+1} = O_i \circ_2 \alpha_{i+1}$ der zu $\circ_2$ zugehörige Lernprozess, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: O_i und α_i sind reinterpretationskompatibel. Dann gilt: $\underline{\lim}_{i \to \infty} \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_i) \subseteq t(\mathcal{I}) \subseteq \overline{\lim}_{i \to \infty} \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_i)$.*

Die Konvergenz gemäß der zweiten Teilaussage hingegen lässt sich für Reinterpretationsoperatoren nicht (im Stile des Beweises zu Theorem 6.12) zeigen, da Reinterpretationsoperatoren nicht die hierfür nötige Vakuitäts- bzw. Inklusionseigenschaft besitzen.

6.4.2 Stabilität für Reinterpretationsoperatoren

Der Stabilitätsbegriff, der im Folgenden benutzt wird, ist eine Spezialisierung des Konvergenzbegriffs von Zhang und Foo und eine Vereinfachung des Stabilitätsbegriffs von Martin und Osherson und Kelly. Eine Folge gilt als stabil, wenn sie sich ab einem Schritt nicht mehr ändert.

Definition 6.14. Sei $\langle B_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen. $\langle B_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ *stabilisiert sich in Schritt i* oder *wird stabil in Schritt i* ($i \in \mathbb{N}$) genau dann, wenn gilt:

$$B_{i+m} = B_i, \text{ für alle } m \in \mathbb{N}$$

$\langle B_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *stabil*, wenn es ein i gibt, so dass sich $\langle B_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ sich in Schritt i stabilisiert.

[14] Die Details der Konstruktion sind für die Reinterpretationsoperatoren nicht relevant, da diese nicht auf eine zusätzliche Struktur zurückgreifen.

Der Begriff der Stabilität lässt sich insbesondere auf Folgen von Mengen von Ontologieaxiomen $\langle O^n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ anwenden, die sich durch Integration von Folgen A ergeben, $O^n = O \circ A^n$. Für solche Folgen lässt sich ein einfaches hinreichendes und notwendiges Kriterium für Stabilität angeben.

Beobachtung 6.15. *Sei $\tilde{A}_i$ die Menge aller konzeptbasierten Literale, die ab Position i in der Folge von konzeptbasierten Literalen A erscheinen. Dann stabilisiert sich $\langle O \circ A^n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann in Schritt i, wenn $\tilde{A}_i \subseteq O \circ A^i$.*

Stabilität für Folgen von Mengen von Ontologieaxiomen, die auf Typ-1-Operatoren $\circ = \circ_1$ basieren, kann aufgrund der fehlenden Adaption an die Senderterminologie nicht garantiert werden: Da Typ-1-Operatoren monoton sind, wird bei einem konfligierenden Trigger α, der in einem späteren Schritt erneut gesendet wird, derselbe Konflikt auftreten. Für Typ-2-Operatoren sind die Chancen für Stabilität aussichtsreicher, da diese sich an die Senderontologie adaptieren. Die Erfüllung des Erfolgspostulats garantiert, dass ein Trigger nach der Integration in der ursprünglichen Form im Resultat enthalten ist. Wie bereits an verschiedenen Beispielen gesehen (und nochmals explizit im folgenden Beispiel aufgeführt), können nachfolgende Integrationen zum Verlust vorher integrierter Trigger führen.

Beispiel 6.16. Seien $O = \{K(a)\}$ und $A = \langle K(b), \neg K(a)\rangle$. Dann ist $O \odot_2 A = \{K'(a), K'(b), \neg K(a), K \sqsubseteq K', K' \sqsubseteq K \sqcup K'\} \not\models K(b)$.

Mit der wiederholten Integration kann dem Verlust vorher integrierter Trigger entgegengewirkt werden. Im obigen Beispiel 6.16 etwa gilt, dass die einmalige Wiederholung der Triggersequenz zum Erfolg führt:

$$\tilde{A} \subseteq (O \odot_2 A) \odot_2 A = \{K'(a), K'(b), \neg K(a), K \sqsubseteq K', K' \sqsubseteq K \sqcup K', K(b)\}$$

Es werden im Folgenden nur die Typ-2-Operatoren auf Stabilität hin untersucht. Aufgrund der einfacheren Komplexität werden zusätzlich nur Typ-2-Operatoren für triggernde konzeptbasierte Literale betrachtet.

Wenn die Menge $\tilde{A}$ der in A enthaltenen Trigger unendlich ist, lässt sich die Stabilität gemäß Definition 6.14 für (endliche) Ontologien nicht beweisen; da unendlich viele neue Trigger zu der endlichen Ontologie hinzukommen, wächst die Ontologie mit fortschreitender Zahl von integrierten Triggern. (Im Unterschied hierzu kann Konvergenz für Typ-2-Operatoren für unendliche Mengen nicht im Voraus ausgeschlossen werden.) Daher wird im weiteren Verlauf vorausgesetzt, dass $\tilde{A}$ eine endliche Menge von konzeptbasierten Literalen ist.

Wenn die Menge von Triggern inkonsistent ist, kann Stabilität ebenfalls nicht gewährleistet werden. Daher wird zusätzlich angenommen, dass $\tilde{A}$ konsistent ist.[15]

[15] Auch in der Literatur zur iterierten Revision ist diese Annahme zu finden (Delgrande et al., 2006).

Diese Annahme ist dann gerechtfertigt, wenn man zum einen weiß, dass die Trigger von einer Ontologie stammen, die konsistent ist, und zum anderen bekannt ist, dass die Übertragung der Trigger fehlerfrei verläuft. Trotz dieser Annahmen kann es für die Typ-2-Operatoren $\otimes_2, \odot_2$ zu Instabilitäten kommen, da diese nicht Konstanten reinterpretieren können. Wenn aus der Empfängerontologie z.B. folgt, dass zwei Konstanten a, b dasselbe Objekt bezeichnen, $a \doteq b$, aber der Sender mit a, b verschiedene Objekte bezeichnet, wird der Empfänger diesen Unterschied nicht mittels eines Typ-2-Operators für triggernde konzeptbasierte Literale korrigieren können.

Beispiel 6.17. Sei $O = \{R(c, a), R(c, b), (\leq 1R)(c)\}$. O besagt, dass c in R-Relation zu a und b steht und dass es höchstens ein Individuum gibt, zu dem c in R-Relation steht. Daraus folgt, dass $O \models (a \doteq b)$. Falls A die unendliche Folge $\langle K(a), \neg K(b), K(a), \neg K(b), \dots \rangle$ ist, die auf der endlichen Menge von konzetbasierten Literalen $\tilde{A} = \{K(a), \neg K(b)\}$ basiert, ist Stabilität für solche Operatoren nicht erfüllt, die nur Konzeptsymbole reinterpretieren.

Um diese Fälle von interontologischen Differenzen bzgl. der Identität von Konstanten aus der Stabilitätsbetrachtung abzufangen, werden die implizit in der Triggersequenz A enthaltenen Annahmen über die Nichtidentität von Individuen durch „unique name assumptions" (UNA) expliziert:[16]

$$\text{una}(A) = \{(a \not\doteq b) \mid K(a), \neg K(b) \in \tilde{A}, \text{ für } K, a, b \in \mathcal{V}\}$$

Stabilität eines Operators $\circ$ bzgl. der in einer Folge A implizit enthaltenen UNA ist dann gegeben, wenn die induzierte Folge stabil ist unter der Voraussetzung, dass in jedem Integrationsstadium eine mit $\text{una}(A)$ kompatible Ontologie resultiert.

Definition 6.18. Ein Integrationsoperator $\circ$ heißt *stabil* genau dann, wenn für alle Mengen von Ontologienaxiomen O, Folgen A von konzeptbasierten Literalen mit endlichem und konsistentem $\tilde{A}$ gilt, dass $\langle O \circ A^n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ sich stabilisiert. Wenn $\langle O \circ A^n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ sich unter der zusätzlichen Bedingung stabilisiert, dass $O \circ A^n \cup \text{una}(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konsistent ist, heißt $\circ$ *UNA-stabil.* $\circ$ wird *(UNA-)instabil* genannt, wenn er nicht (UNA-)stabil ist.

Stabilität der schwachen Typ-2-Operatoren für triggernde konzeptbasierte Literale

Eines der Hauptresultate in den Aufsätzen von Özçep und Eschenbach (2007) und Eschenbach und Özçep (2009) ist die UNA-Stabilität der Typ-2-Operatoren für triggernde konzeptbasierte Literale $\otimes_2$. Der Beweis, den Özçep und Eschenbach

[16]Vgl. Anhang A, S. 235.

(2007) geben, basiert auf einer syntaktischen Aufteilung der Mengen von Ontologieaxiomen O^n und einer hierfür angepassten Konstruktion eines Modells. Ich skizziere in diesem Unterabschnitt den einfacheren Beweis von Eschenbach und Özçep (2009).[17]

Die Kernidee des Beweises ist, ein monoton fallendes Maß über der Menge der in der Integration entstehenden Mengen $O^n = O \otimes_2 A^n$ zu konstruieren. Gemessen wird dabei die Anzahl der für einen Konflikt zwischen der Menge von Ontologieaxiomen O^n und $\tilde{A}$ verantwortlichen Literale $\mathrm{CL}(O^n, A)$. Diese Menge wird wie folgt definiert:

Definition 6.19. Sei $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine Ontologie, A eine Folge von konzeptbasierten Literalen $\mathcal{V}(\tilde{A}) \subseteq \mathcal{V}_c$. Die Menge der in einem Konflikt zwischen A und $\mathcal{O}$ essentiell beteiligten Literale $\mathrm{CL}(O, A)$ ist gegeben durch die Menge aller Literale, die in einer inklusionsminimalen Teilmenge von A enthalten sind, welche mit $O \cup \mathrm{una}(A)$ konfligiert.

$$\begin{aligned}\mathrm{CL}(O, A) \quad = \quad & \bigcup \{M \subseteq \tilde{A} \mid O \cup \mathrm{una}(\tilde{A}) \cup M \models \bot \text{ und} \\ & \text{es gibt kein } M' \subset M, \text{ so dass } O \cup \mathrm{una}(\tilde{A}) \cup M' \models \bot\}\end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass sich die Anzahl der konfligierenden Literale im Laufe der Integration schrittweise verkleinert. Genauer gilt sogar:

Lemma 6.20. *(Eschenbach und Özçep, 2009) Seien $\mathcal{V}$ ein Vokabular, $K, K' \in \mathcal{V}$ Konzeptsymbole und $a \in \mathcal{V}$ eine Konstante. Sei O eine Menge von Ontologieaxiomen über $\mathcal{V}$ und A eine Folge von konzeptbasierten Literalen $\tilde{A}$, so dass $\mathcal{V}(O \cup \tilde{A}) \subseteq \mathcal{V} \setminus \{K'\}$.*

1. *Wenn $\alpha \in \tilde{A}$ und $O_1 = O \cup \{\alpha\}$, dann $\mathrm{CL}(O_1, A) \subseteq \mathrm{CL}(O, A) \setminus \{\alpha\}$.*
2. *Wenn $K(a) \in \tilde{A}$ und $O_2 = O_{[K/K']} \cup \{K(a), K' \sqsubseteq K\}$, dann $\mathrm{CL}(O_2, A) \subseteq \mathrm{CL}(O, A) \setminus \{K(b) \mid \text{für Konstanten } b \in \mathcal{V}\}$.*
3. *Wenn $\neg K(a) \in \tilde{A}$, und $O_3 = O_{[K/K']} \cup \{\neg K(a), K \sqsubseteq K'\}$, dann $\mathrm{CL}(O_3, A) \subseteq \mathrm{CL}(O, A) \setminus \{\neg K(b) \mid \text{für Konstanten } b \in \mathcal{V}\}$.*

Aus Lemma 6.20 folgt insbesondere $|\,\mathrm{CL}(O^{n+1}, A)| \leq |\,\mathrm{CL}(O^n, A)|$; wenn der Übergang von O^n zu $O^{n+1} = O^n \otimes_2 \alpha_{n+1}$ durch eine echte Reinterpretation erfolgt, gilt wegen der Teilaussagen 2 und 3 sogar

$$|\,\mathrm{CL}(O^{n+1}, A)| < |\,\mathrm{CL}(O^n, A)| \tag{6.1}$$

[17] Für Details dieses auf C. Eschenbach zurückgehenden Beweises siehe man in den Anhang von (Eschenbach und Özçep, 2009).

Wenn nur endlich viele echte Reinterpretationen in der Integration von A in O vorkommen, gibt es ab einem Schritt i nur noch Expansionen. Da $\tilde{A}$ endlich ist, gilt dann ab einem Schritt $k \geq i$ $\tilde{A} \subseteq O^k$; damit ist k der Schritt, ab dem sich O^n stabilisiert. Wäre $\langle O^n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ UNA-instabil, müsste es folglich unendlich oft eine echte Reinterpretation geben. Das ist aber wegen der in (6.1) gegebenen Beziehung und der Endlichkeit von $\tilde{A}$ nicht möglich. Daraus folgt die UNA-Stabilität von $\otimes_2$.

Theorem 6.21. *(Eschenbach und Özçep, 2009) Die schwachen Operatoren des Typs 2 für triggernde konzeptbasierte Literale $\otimes_2$ sind UNA-stabil.*

Aus Lemma 6.20 folgt außerdem eine Verallgemeinerung des Erfolgspostulats auf iterierte Reinterpretation: Die wiederholte Integration einer Folge A von konzeptbasierten Literalen führt zur erfolgreichen Integration aller Elemente in $\tilde{A}$.

Korollar 6.22. *(Eschenbach und Özçep, 2009) Sei $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine konsistente Ontologie und A eine endliche Folge von konzeptbasierten Literalen, so dass $(O \otimes_2 A) \cup \mathrm{una}(A)$ konsistent ist. Dann gilt:*

$$(O \otimes_2 A) \otimes_2 A \models \tilde{A}$$

Stabilität von $\otimes_2$ für Ontologien in $\mathcal{ALC}$

Für Ontologien, in denen keine Identitäten zwischen Konstanten folgerbar sind, vereinfacht sich die Stabilitätsaussage für die schwachen Typ-2-Operatoren für triggernde konzeptbasierte Literale (Theorem 6.21), da nicht mehr auf die UNA zurückgegriffen werden muss. Ich zeige im Folgenden, dass diese Vereinfachung für alle Ontologien gilt, die in der Beschreibungslogik $\mathcal{ALC}$ dargestellt sind.[18] Korollar 6.24 expliziert die Aussage, dass sich aus keiner Ontologie über $\mathcal{ALC}$ Identitäten zwischen Konstanten folgern lassen. Zum Beweis wird über Induktion das folgende Lemma gezeigt:

Lemma 6.23. *Sei $\mathcal{V}$ ein nichtlogisches Vokabular für die Beschreibungslogik $\mathcal{ALC}$. Zu einer Interpretation $\mathcal{I}$ für $\mathcal{V}$ und Konstanten $a, c \in \mathcal{V}$ mit $a^{\mathcal{I}} = c^{\mathcal{I}}$ gibt es eine Interpretation $\mathcal{I}'$, so dass $d_c = c^{\mathcal{I}'} \neq a^{\mathcal{I}'} = a^{\mathcal{I}}$ und für alle Individuen $d \neq d_c \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ und alle Konzepte C gilt:*

(I) $d \in C^{\mathcal{I}}$ *genau dann, wenn* $d \in C^{\mathcal{I}'}$, *und*

(II) $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$ *genau dann, wenn* $d_c \in C^{\mathcal{I}'}$.

Beweis. Siehe S. 286.

[18] Vgl. Tabelle A.1, S. 227 in Anhang A.

Korollar 6.24. *Sei $\mathcal{V}$ eine Menge von nichtlogischen Symbolen für die Beschreibungslogik $\mathcal{ALC}$. Zu einer Interpretation $\mathcal{I}$ für $\mathcal{V}$ und Konstanten $a, c \in \mathcal{V}$ gibt es eine Interpretation $\mathcal{I}'$, so dass $c^{\mathcal{I}'} \neq a^{\mathcal{I}'}$ und für alle Sätze α (TBox- und ABox-Axiome) über $\mathcal{V}$ gilt: $\mathcal{I} \models \alpha$ genau dann, wenn $\mathcal{I}' \models \alpha$.*

Beweis. Siehe S. 180.

Hieraus ergibt sich als Korollar die Stabilität von Folgen, die mit einer in $\mathcal{ALC}$ formulierten Empfängerontologie starten.

Korollar 6.25. *Für jede Ontologie $\mathcal{O}_0 = \langle O_0, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ in der beschreibungslogischen Sprache $\mathcal{ALC}$ und alle unendlichen Folgen A von konzeptbasierten Literalen in $\mathcal{V}_c$ mit endlichem $\tilde{A}$ stabilisiert sich die Folge $\langle O \otimes_2 A^i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$, kurz: $\otimes_2$ ist stabil für Ontologien in $\mathcal{ALC}$.*

Schwache Typ-2-Operatoren $\otimes_2$ sind schwach

Die Stabilität von Typ-2-Operatoren kann im Wesentlichen auf die rigorose Konfliktbehandlung zurückgeführt werden, die in Lemma 6.20.1 und 6.20.2 festgehalten ist. Viele Literale aus der Ontologie O^n, die nicht für einen Konflikt mit dem Trigger α_n verantwortlich gemacht werden können, gehen durch die Konfliktauflösung verloren. Diese Tatsache führt zu einer radikalen Adaption der Empfängerterminologie an die Senderterminologie, infolge der (reinterpretierte) Konzepte der Empfängerterminologie keinen Bezug zu den neuen disambiguierten Konzepten in der öffentlichen Sprache haben. Diese negative Eigenschaft wird durch das folgende Beispiel 6.26 veranschaulicht und durch das anschließende Theorem 6.27 auf abstrakter Ebene expliziert.

Beispiel 6.26. In einem Onlinebuchhandel, der auf eine Menge von Ontologieaxiomen O_2 zugreift, soll ein Softwareagent, der auf eine von O_2 verschiedene Menge von Ontologieaxiomen O_1 zugreift, ein billiges Buch zur Thermodynamik kaufen. Hierzu sendet der Softwareagent eine Anfrage an den Onlinebuchhandel, alle Bücher im Format *Billig*(a), wobei a ein Platzhalter für den Bezeichner eines Buches ist, aufzulisten.

Der Softwareagent hat ein sehr einfaches Konzept davon, wann ein Buch billig ist: Es basiert nur auf dem Preis des Buches und gilt bereits dann als billig, wenn es weniger als 5 Euro kostet. Außerdem wird angenommen, dass der Softwareagent bereits weiß, dass th_1 mehr als 5 Euro kostet und folglich nicht billig ist, und dass th_2 weniger als 5 Euro kostet und demnach billig ist.

$$O_1 = \{Billig \doteq KostetWA\_5, \neg KostetWA\_5(th_1), KostetWA\_5(th_2)\}$$

Das Billig-Konzept in der Ontologie O_2 ist nicht allein auf den Preis ausgerichtet, sondern wird in Abhängigkeit vom Bindungstyp des Buches (Hardcover, Softcover, Booklet) festgelegt. In O_2 ist festgelegt, dass diese Buchtypen alle exklusiv und gemeinsam exhaustiv sind. Außerdem wird die Ordnungsbeziehung der Preiskonzepte terminologisch festgelegt. Das Buch th_1 ist ein Hardcover-Buch, kostet weniger als 8 Euro und ist daher gemäß dem Billig-Konzept von O_2 als billig anzusehen. Das Booklet th_2 hingegen kostet zwar nur 3 Euro, ist aber gemäß O_2 nicht billig.

$$\begin{aligned} O_2 \;=\; & \{ \mathit{Billig} \doteq (\mathit{KostetWA\_5} \sqcap \mathit{SoftC}) \sqcup (\mathit{KostetWA\_8} \sqcap \mathit{HardC}) \sqcup \\ & (\mathit{KostetWA\_3} \sqcap \mathit{Booklet}), \\ & \mathit{SoftC} \sqsubseteq \neg \mathit{HardC}, \mathit{Booklet} \doteq \neg(\mathit{SoftC} \sqcup \mathit{HardC}), \\ & \mathit{KostetWA\_3} \sqsubseteq \mathit{KostetWA\_5}, \mathit{KostetWA\_5} \sqsubseteq \mathit{KostetWA\_8}, \\ & \mathit{HardC}(th_1), \mathit{KostetWA\_8}(th_1), \mathit{Booklet}(th_2), \neg \mathit{KostetWA\_3}(th_2) \} \end{aligned}$$

Der Onlinebuchhandel schickt auf die Anfrage des Softwareagenten die Folge A.

$$A \;=\; \langle \mathit{Billig}(th_1), \neg \mathit{Billig}(th_2) \rangle$$

Der Softwareagent integriert A mittels eines schwachen Typ-2-Operators $\otimes_2$ in seine Ontologie. Bereits die Integration von $\mathit{Billig}(th_1)$ erfordert eine Reinterpretation des Konzeptsymbols *Billig*. Das für die Reinterpretation eingeführte Symbol Billig' steht nun für das ursprüngliche Billigkonzept des Softwareagenten.

$$\begin{aligned} O_1 \otimes_2 \mathit{Billig}(th_1) \;=\; & \{ \mathit{Billig}' \doteq \mathit{KostetWA\_5}, \neg \mathit{KostetWA\_5}(th_1), \\ & \mathit{KostetWA\_5}(th_2), \mathit{Billig}(th_1), \mathit{Billig}' \sqsubseteq \mathit{Billig} \} \end{aligned}$$

Abbildung 6.1 veranschaulicht die Beziehung zwischen den disambiguierten Konzepten $K = \mathit{Billig}$ und $K' = \mathit{Billig}'$ mittels eines Fragments aus den Konzeptverbänden der Mengen von Ontologieaxiomen O_1 und $O_1 \otimes_2 \mathit{Billig}(th_1)$.

Auch die Integration des zweiten Triggers $\neg \mathit{Billig}(th_2)$ erfordert eine Reinterpretation von *Billig*. Die resultierende Menge von Ontologieaxiomen $O_1 \otimes_2 A$ enthält damit ein weiteres Übergangskonzept Billig'', das das zwischenzeitlich erworbene Billigkonzept des Softwareagenten bezeichnet.

$$\begin{aligned} O_1 \otimes_2 A \;=\; & \{ \mathit{Billig}' \doteq \mathit{KostetWA\_5}, \neg \mathit{KostetWA\_5}(th_1), \mathit{KostetWA\_5}(th_2), \\ & \mathit{Billig}''(th_1), \mathit{Billig}' \sqsubseteq \mathit{Billig}'', \\ & \neg \mathit{Billig}(th_2), \mathit{Billig} \sqsubseteq \mathit{Billig}'' \} \end{aligned}$$

Die aus der Integration von A resultierende Menge von Ontologieaxiomen des Softwareagenten $O_1 \otimes_2 A$ enthält nun keine semantische Beziehung (in Form einer Subsumptionsbeziehung) mehr zwischen dem in $K' = \mathit{Billig}'$ konservierten Billigkonzept des Softwareagenten und dem adaptierten Billigkonzept $K = \mathit{Billig}$.

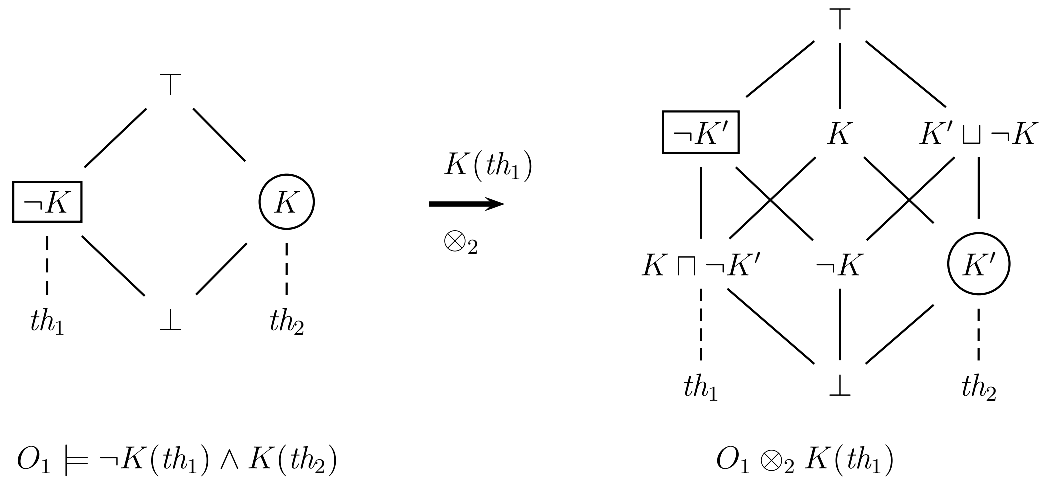


Abbildung 6.1: Teile aus den Konzeptverbänden zu den Mengen von Ontologieaxiomen O_1 und $O_1 \otimes_2 \mathit{Billig}(\mathit{th}_1) = O_1 \otimes_2 K(\mathit{th}_1)$ von Beispiel 6.26. Das Konzeptsymbol *Billig* wird der Übersichtlichkeit wegen durch K repräsentiert.

Abbildung 6.2 veranschaulicht diesen Sachverhalt mittels des induzierten Teilkonzeptverbands bzgl. der Menge von Symbolen $\{K, K', K''\}$.

Die im Beispiel veranschaulichte Unabhängigkeit zwischen dem neuen K-Konzept und dem ursprünglichen K-Konzept der initialen Ontologie, das in K' konserviert ist, lässt sich gemäß Theorem 6.27 auch auf Modellebene nachvollziehen.

Theorem 6.27. *(Eschenbach und Özçep, 2009) Sei $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine konsistente Ontologie, A eine endliche konsistente Folge von konzeptbasierten Literalen über $\mathcal{V}_c$, $K \in \mathcal{V}_c$ ein Konzeptsymbol, das bei der Integration von A in O mittels $\otimes_2$ zweimal reinterpretiert wurde und $\tilde{A}_K = \{\beta \in \tilde{A} \mid \beta \text{ enthält syntaktisch } K\}$ die Menge der Literale, die K enthalten. Sei $\mathcal{I}$ ein Modell von $(O \otimes_2 A) \cup \mathrm{una}(A)$ und $\mathcal{I}^A_K \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ eine Menge, so dass gilt:*
$\{a^{\mathcal{I}} \mid K(a) \in \tilde{A}\} \subseteq \mathcal{I}^A_K$ und $\{a^{\mathcal{I}} \mid \neg K(a) \in \tilde{A}\} \cap \mathcal{I}^A_K = \emptyset$.
Definiere eine Modifikation $\mathcal{J}$ von $\mathcal{I}$ durch:

$$
\begin{array}{rcll}
K^{\mathcal{J}} & = & \mathcal{I}^A_K & \\
(K'')^{\mathcal{J}} & = & (K'')^{\mathcal{I}} \cup \mathcal{I}^A_K, & \textit{falls } K'' \in \mathcal{V}_i, K \sqsubseteq K'' \in O \otimes_2 A \\
(K'')^{\mathcal{J}} & = & (K'')^{\mathcal{I}} \cap \mathcal{I}^A_K, & \textit{falls } K'' \in \mathcal{V}_i, K'' \sqsubseteq K \in O \otimes_2 A
\end{array}
$$

Dann ist $\mathcal{J}$ ein Modell von $(O \otimes_2 A) \cup \mathrm{una}(A) \cup \tilde{A}_K$.

In dem konstruierten Modell $\mathcal{J}$ von Theorem 6.27 wird die Extension des zweifach reinterpretierten Konzeptsymbols K, $K^{\mathcal{J}} = \mathcal{I}^A_K$, völlig unabhängig von der

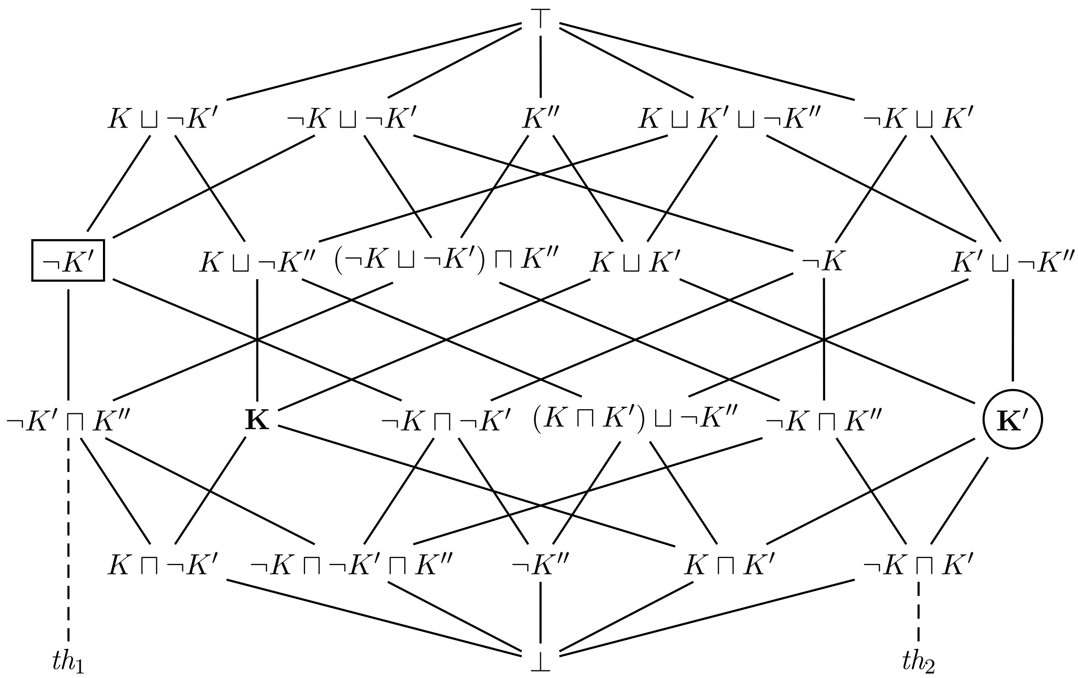


Abbildung 6.2: Teilkonzeptverband bzgl. $\{K, K', K''\}$ für die Menge von Ontologieaxiomen $O_1 \otimes_2 A = O_1 \otimes_2 K(th_1) \otimes_2 \neg K(th_2)$ aus dem Onlinebuchhandel-Beispiel 6.26. Die fett markierten Symbole $K = \mathit{Billig}$ bzw. $K' = \mathit{Billig}'$ bezeichnen das neue Billigkonzept bzw. das in einer Namensvariante konservierte ursprüngliche Billigkonzept des Softwareagenten.

Extension von $(K')^{\mathcal{I}} = (K')^{\mathcal{J}}$ gewählt. Allein A und $\mathcal{I}$ bezogen auf die Konstruktion resultieren in Beschränkungen bzgl. der Wahl von $\mathcal{I}_K^A$. Das alte K-Konzept des Empfängers hat keinen Einfluss auf die Semantik des neuen K-Konzepts.

Instabilität der Operatoren $\odot_2$ und $\oplus_2^{\mathrm{expl}}$

Starke Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 $\odot_2$ realisieren aufgrund des zusätzlichen Brückenaxioms zur Oberabschätzung einen weniger rigorosen Mechanismus zur Konfliktauflösung als die schwachen Reinterpretationsoperatoren $\otimes_2$. Diese Stärke führt jedoch dazu, dass eine monotone Abnahme in der Menge $\mathrm{CL}(O^n, A)$ von Literalmengen, die für einen Konflikt zwischen O^n und $\tilde{A}$ verantwortlich gemacht werden können, nicht gegeben ist. Tatsächlich können für die starken Operatoren bei geeigneter Wahl von Ontologien und Folgen von Triggern Konflikte unendlich oft reproduziert werden, so dass ein instabiles Verhalten resultiert. Theorem 6.28 zeigt, dass bereits der Typ-2-Operator $\oplus_2^{\mathrm{expl}}$, der zur Bildung des zusätzlichen Brückenaxioms nur die explizit in der Ontologie enthaltenen ABox-Axiome der Form $C(a)$ berücksichtigt, instabil ist. Die hierfür konstruierte Menge von Ontologieaxiomen O basiert auf einer monadischen Beschreibungslogik, d.h. O enthält keine Rollensymbole und gestattet nur boolesche Konzeptkonstruktoren. Aus dieser Tatsache lässt sich daher folgern, dass auch die starken Reinterpretationsoperatoren $\odot_2$ instabil sind.

Theorem 6.28. *(Eschenbach und Özçep, 2009) Die starken Typ-2-Reinterpretationsoperatoren für triggernde konzeptbasierte Literale $\odot_2$ und die Typ-2-Reinterpretationsoperatoren $\oplus_2^{\mathrm{expl}}$, die Oberabschätzungen basierend auf explizit vorhandenen ABox-Axiomen der Form $C(a)$ nutzen, sind instabil.*

Beweis. Siehe S. 289.

7 Sphärenbasierte Reinterpretation

7.1 Motivation der sphärenbasierten Reinterpretation

In den folgenden Abschnitten wird eine Klasse von Reinterpretationsoperatoren definiert und analysiert, die auf der Idee der sphärenbasierten Konzeptrevision bzw. -kontraktion gemäß Wassermann und Fermé basiert (s. Abschnitt 2.2). Da die zu reinterpretierenden nichtlogischen Symbole ihre Bedeutung in einer Ontologie erhalten, wird der Ansatz von Wassermann und Fermé auf die sphärenbasierte Konzeptrevision- und -kontraktion innerhalb einer Ontologie erweitert.

Mit der Entwicklung des sphärenbasierten Reinterpretationsansatzes wird die bisherige Analyse der Reinterpretationsoperatoren durch zwei Fragestellungen erweitert. Die erste Fragestellung greift das Problem der minimalen Änderungen unter einer nun lokalen Perspektive auf. Statt wie bisher die durch Reinterpretation bewirkte Änderung einer Ontologie auf Minimalität zu untersuchen, wird mit den Sphärensystemen eine lokal minimale Änderung der Konzepte angestrebt. Das durch Sphärenreinterpretation erzielte neue Konzept soll minimal von dem initialen Konzept abweichen. Die zweite Fragestellung greift das Problem auf, Präferenzstrukturen, die hier durch Sphärensysteme repräsentiert werden, im Rahmen einer sequenziellen Integration zu dynamisieren. In der Sphärenrevision gemäß Grove (1988) und Wassermann und Fermé (1999) wird ein Sphärensystem, das zur Revision benutzt wird, vorausgesetzt. Dieses Sphärensystem ist jedoch nicht auch ein Sphärensystem für das resultierende Belief-Set bzw. das resultierende

Konzeptkomplex. In diesem Abschnitt wird diese Einschränkung aufgehoben, indem von einem vorgegebenen Sphärensystem ausgehend (genauer einer Sphärenkollektion (s. Abschnitt 7.3.1, Definition 7.11)) jeweils für die Folgeontologie im Rahmen einer iterierten Integration ein Folgesphärensystem (genauer eine Folgesphärenkollektion) definiert wird.

Das folgende Beispiel soll die sphärenbasierte Reinterpretation motivieren.

Beispiel 7.1. Gegeben sind eine Ontologie $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ mit internem Vokabular $\mathcal{V}_i = \{Student', Wissenschaftler'\}$ und öffentlichem Vokabular $\mathcal{V}_c = \mathcal{V}(O)$; gemäß O sind alle Studenten keine Wissenschaftler und Peter ist ein Wissenschaftler (und somit kein Student). Der konfligierende Trigger α, der besagt, dass Peter ein Student ist, soll in die Ontologie integriert werden.

$$\begin{aligned} O &= \{\mathit{Student} \sqsubseteq \neg\, \mathit{Wissenschaftler}, \mathit{Wissenschaftler}(\mathit{peter})\} \\ \alpha &= \mathit{Student}(\mathit{peter}) \end{aligned}$$

Als Grund für den Konflikt zwischen O und α können unterschiedliche Lesarten des Konzeptsymbols *Student* bzw. der Konstanten *peter* angenommen werden. Ich betrachte in diesem Beispiel nur den Fall, dass einzig Konzeptsymbole reinterpretiert werden können und daher der Konflikt auf eine unterschiedliche Lesart des Konzeptsymbols *Student* zurückgeführt werden kann. Um eine zum Trigger kompatible Lesart des Konzeptsymbols *Student* zu finden, wird die Triggerinformation in die beiden Bestandteile, das Konzeptsymbol *Student* und die Konstante *peter*, dekomponiert. Unter der Annahme, dass das Studentenkonzept des Triggers nur unwesentlich verschieden ist von dem Studentenkonzept der Ontologie, kann wie auch bei den globalen Reinterpretationsoperatoren die Vermutung getroffen werden, dass das Studentenkonzept des Triggers weiter ist als das Studentenkonzept der Ontologie. Hierfür wird das Studentenkonzept des Triggers durch ein minimal schwächeres Oberkonzept des Studentenkonzepts in der Ontologie O approximiert.

Zur Bestimmung der Approximation benutzen die von Özçep (2006) definierten sphärenbasierten Reinterpretationsoperatoren[1] einen auf Sphären beruhenden Konzeptkontraktionsoperator. Das Studentenkonzept des Triggers wird durch eine Sphärenkontraktion des Studentenkonzeptes der Ontologie approximiert. Hierfür ist ein Sphärensystem $\mathcal{S}$ für das Studentenkonzept vorzugeben und ein Konzeptkontraktionsoperator $\ominus_{\mathcal{S}}$ bzgl. dieses Sphärensystems zu definieren. Der Trigger für die sphärenbasierte Konzeptkontraktion (bzw. -revision) in Wassermanns und Fermés Ansatz ist eine Konzeptbeschreibung. Um diesen Ansatz verwenden zu können, muss folglich aus dem Trigger α eine Konzeptbeschreibung C_α extrahiert werden, mit der das Studentenkonzept der Ontologie bzgl. eines Sphärensystems

[1]Özçep (2006) nennt die Operatoren lokal. Ich ersetze die Redeweise hier durch die eindeutigere der sphärenbasierten Reinterpretationsoperatoren.

kontrahiert wird. Die einzige verfügbare Information, die zur Bildung von C_α zur Verfügung steht, ist die Triggerkonstante *peter*. Das Wissen um die Konstante *peter* ist in dem spezifischsten Konzept[2] bzgl. O $\mathrm{msc}_O(\mathit{peter})$ vorhanden. Eine der im spezifischsten Konzept genannten Eigenschaften von *peter* verursacht den Konflikt mit dem Trigger, d.h. eine der Eigenschaften von *peter* ist nicht kompatibel mit dem Studentenkonzept der Ontologie. Um eine sichere Auflösung der Inkonsistenz zu gewährleisten, kann eine Kontraktion des Studentenkonzepts mit der Negation des spezifischsten Konzepts von *peter* angesetzt werden. Folglich ist das extrahierte Konzept $C_\alpha = \neg\, \mathrm{msc}_O(\mathit{peter})$.

Wenn die Ontologie in einer Beschreibungslogik formuliert ist, die Nominalkonstruktionen[3] gestattet, lässt sich der Konflikt zwischen der Ontologie und dem Trigger, $O \models \neg \mathit{Student}(\mathit{peter})$, auch beschreiben durch $O \models \{\mathit{peter}\} \sqsubseteq \neg \mathit{Student}$ und äquivalent durch $O \models \mathit{Student} \sqsubseteq \neg\{\mathit{peter}\}$. Aus letzterer Darstellung wird ersichtlich, dass die zum Widerspruch führende Eigenschaft des Studentenkonzepts in O ihr Nicht-*peter*-Sein ist und daher der Konflikt durch eine Kontraktion von *Student* mit $\neg\{\mathit{peter}\}$ möglich ist. In Logiken, die keine Nominalkonstruktion gestatten, kann $\neg\{\mathit{peter}\}$ durch das spezifischste Konzept in O $\neg\, \mathrm{msc}_O(\mathit{peter})$ approximiert werden und es ergibt sich wieder der oben geschilderte Teilschritt zur Konfliktauflösung.

Der sphärenbasierte Reinterpretationsansatz, welcher in diesem Abschnitt entwickelt wird, kann in folgende Teilschritte zerlegt werden. Gegeben seien eine Ontologie $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und ein (konzeptbasiertes) Literal $\alpha = \hat{K}(a)$.

1. Es wird die in O verfügbare Information über die Triggerkonstante a in Form des spezifischsten Konzeptes $\mathrm{msc}_O(a)$ zusammengetragen.

2. Die zur Disambiguierung nötige zweite Lesart von $\hat{K}$ wird als Resultat der Sphärenkontraktion von $\hat{K}$ mit $\neg\, \mathrm{msc}_O(a)$ bezüglich eines für $\hat{K}$ vorgegeben Sphärensystems in O angesetzt.

3. Eine Hypothese über die semantische Beziehung der beiden Lesarten von $\hat{K}$ wird durch Subsumptionsbeziehungen angesetzt.

Der folgende Abschnitt 7.2 entwickelt das technische Rahmenwerk für die im zweiten Teilschritt benötigte Konzeptkontraktion.

7.2 Konzeptrevision in einer Ontologie

Obwohl das Vorbild für die hier entwickelte Konzeptrevision und -kontraktion der Ansatz von Wassermann und Fermé (1999) ist, muss diese dahingehend angepasst

[2]Vgl. Anhang A, Definition A.17, S. 236.
[3]Vgl. Tabelle A.1, S. 227 im Anhang A.

werden, dass die Ontologie, in der das Konzept eingebettet ist, in die Definition des Sphärensystems und der Kontraktion einbezogen wird. Der hierfür verwendete Konzeptbegriff ist wesentlich einfacher als der von Wassermann und Fermé (1999) bzw. Gärdenfors (2000). Konzepte sind diejenigen Dinge, die durch ein Konzeptsymbol oder eine Konzeptbeschreibung ausgedrückt werden können. Den Konzeptbegriff von Wassermann und Fermé modelliere ich durch Konzeptrepräsentationen. Eine *Konzeptrepräsentation* $\underline{C}$ ist eine Menge von Konzeptbeschreibungen in einer beschreibungslogischen Sprache. Konzeptrepräsentationen werden mit unterstrichenen Buchstaben bezeichnet. Für die Definition der „möglichen Objekte" greife ich auf Groves ursprüngliche Idee maximal konsistenter Mengen zurück, passe den Begriff eines möglichen Objekts jedoch so an, dass er im Rahmen der Revision/Kontraktion von Konzepten in einer Ontologie $\mathcal{O}$ benutzt werden kann.

In diesem wie in den folgenden Abschnitten des Kapitels 7 wird wie bisher angenommen, dass die auftretenden Ontologien in einer Beschreibungslogik repräsentiert werden. Sofern Beschreibungslogiken mit speziellen Eigenschaften nötig sind, wird das im jeweiligen Kontext explizit erwähnt.

Es bezeichne $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine Ontologie. Die im Folgenden definierten Begriffe sind alle abhängig von einem Vokabular $\mathcal{V}_{rel} \subseteq \mathcal{V}_i \cup \mathcal{V}_c$, dem relevanten Vokabular. Für die sphärenbasierte Reinterpretation im einschrittigen Fall wird $\mathcal{V}_{rel} = (\mathcal{V}(O) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c$ gesetzt. Im mehrschrittigen Fall wird das relevante Vokabular in Abhängigkeit von der resultierenden Ontologie neu definiert. Eine Menge $X \subseteq \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_{rel})$ von Konzeptbeschreibungen heißt $(\mathcal{O}, \mathcal{V}_{rel})$-*abgeschlossen* genau dann, wenn für alle Konzeptbeschreibungen $D, E_1, E_2 \in X$ und für alle Konzeptbeschreibungen E in $\mathrm{Konz}(\mathcal{V}_{rel})$ gilt: Wenn $O \models D \sqsubseteq E$, dann auch $E \in X$ und wenn $E_1, E_2 \in X$, dann auch $E_1 \sqcap E_2 \in X$. $X \subseteq \mathrm{Konz}((\mathcal{V}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c)$ heißt $\mathcal{O}$-*abgeschlossen*, wenn es $(\mathcal{O}, (\mathcal{V}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c)$-*abgeschlossen* ist. Für eine Konzeptbeschreibung $C \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_{rel})$ bezeichne

$$C^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}} = \{D \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_{rel}) \mid O \models C \sqsubseteq D\}$$

den $(\mathcal{O}, \mathcal{V}_{rel})$-*Abschluss* von C, und abkürzend bezeichne für die Konzeptbeschreibung $C \in \mathrm{Konz}((\mathcal{V}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c)$ $C^{\Uparrow}_{\mathcal{O}} = C^{\Uparrow}_{\mathcal{O},(\mathcal{V}(\mathcal{O})\cap\mathcal{V}_i)\cup\mathcal{V}_c}$ den $\mathcal{O}$-*Abschluss* von C. Der Abschlussoperator lässt sich auf Konzeptrepräsentationen $\underline{C}$, also beliebige Mengen von Konzeptbeschreibungen, erweitern.

$$\begin{aligned}
\underline{C}^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}} &= \{D \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_{rel}) \mid \text{Es gibt eine endliche Teilmenge } Y \subseteq \underline{C}, \text{ so dass} \\
&\qquad \text{gilt: } O \models \textstyle\bigsqcap Y \sqsubseteq D\} \\
\underline{C}^{\Uparrow}_{\mathcal{O}} &= \underline{C}^{\Uparrow}_{\mathcal{O},(\mathcal{V}(\mathcal{O})\cap\mathcal{V}_i)\cup\mathcal{V}_c}
\end{aligned}$$

Für den Fall, dass $Y = \emptyset$ gilt, wird wie üblich $\bigsqcap \emptyset = \top$ vereinbart. Unmittelbar aus der Definition folgt, dass der $\mathcal{O}$-Abschluss einer Konzeptrepräsentation $\mathcal{O}$-abgeschlossen ist. Der Operator $(\cdot)^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}}$ ist ein logischer Folgerungsoperator über der Menge aller Konzeptbeschreibungen Konz($\mathcal{V}_{rel}$). Er erfüllt die drei Axiome für einen Tarskischen Folgerungsoperator (Definition 2.1, S. 16).

Beobachtung 7.2. *Es bezeichne* $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ *eine Ontologie und sei* $\mathcal{V}(O) \subseteq \mathcal{V}_{rel} \subseteq \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i$. *Für alle* $\underline{C}, \underline{C}_1, \underline{C}_2 \subseteq \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_{rel})$ *gilt:*

1. $\underline{C} \subseteq \underline{C}^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}}$
2. *Aus* $\underline{C}_1 \subseteq \underline{C}_2$ *folgt* $(\underline{C}_1)^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}} \subseteq (\underline{C}_2)^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}}$.
3. $\left(\underline{C}^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}}\right)^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}} = \underline{C}^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}}$

Beweis. Der erste Punkt folgt aus der Tatsache, dass für alle $D \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_{rel})$ gilt $O \models D \sqsubseteq D$. Der zweite folgt direkt aus der Definition und der dritte Punkt folgt mit der Transitivität von $\sqsubseteq$ und der Tatsache, dass $C_1 \sqsubseteq D_1$ und $C_2 \sqsubseteq D_2$ die Beziehung $C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2$ implizieren. □

Entsprechend lässt sich für Konstanten c der $(\mathcal{O}, \mathcal{V}_{rel})$-Abschluss definieren durch $c^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}} = \{C \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_{rel}) \mid O \models C(c)\}$. (Gestattet man die Nominalkonstruktion, folgt direkt $c^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}} = \{c\}^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}}$). Die über (7.1) definierte Relation $\sim_{\mathcal{O}}$ ist eine Äquivalenzrelation.

$$C_1 \sim_{\mathcal{O}} C_2 \text{ gdw. } O \models C_1 \doteq C_2 \tag{7.1}$$

Es bezeichne $\overline{C}$ die Äquivalenzklasse von C bzgl. dieser Relation. Dann bezeichnet $\overline{C}^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}} = \{\overline{D} \mid D \in C^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}}\}$ die Menge aller Äquivalenzklassen von möglichen Abschwächungen der Konzeptbeschreibung C bzgl. $\mathcal{O}$. Für die einfache Ontologie aus Beispiel 7.1 ergibt sich der $\mathcal{O}$-Abschluss der Äquivalenzklasse von *Student* zu

$$\overline{Student}^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}} = \{\overline{Student}, \overline{Student \sqcup Wissenschaftler}, \overline{\neg Wissenschaftler}, \overline{\top}\}$$

Eine Menge $X \subseteq \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_{rel})$ heißt *konsistent* genau dann, wenn $\perp \notin X$. $X \subseteq \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_{rel})$ heißt *maximal* $(\mathcal{O}, \mathcal{V}_{rel})$*-konsistent* genau dann, wenn X konsistent, $(\mathcal{O}, \mathcal{V}_{rel})$-abgeschlossen und inklusionsmaximal in diesen Eigenschaften ist, d.h. wenn für alle $(\mathcal{O}, \mathcal{V}_{rel})$-abgeschlossenen $Y \subseteq \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_{rel})$ aus $X \subset Y$ die Inkonsistenz von Y folgt. Die Menge aller maximal $(\mathcal{O}, \mathcal{V}_{rel})$-abgeschlossener Mengen X werde mit $M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}}$ bezeichnet.

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}} &= \{X \subseteq \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_{rel}) \mid X \text{ ist } (\mathcal{O}, \mathcal{V}_{rel})\text{-abgeschlossen}\} \\ M_{\mathcal{O}} &= M_{\mathcal{O},(\mathcal{V}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c} \end{aligned}$$

Die Menge $M_{\mathcal{O}}$ beschreibt die Menge aller unter den durch die Ontologie $\mathcal{O}$ vorgegebenen Einschränkungen möglichen Objekte. Dabei sind die möglichen Objekte

$X \in M_{\mathcal{O}}$ durch in $\mathcal{O}$ vorkommende Eigenschaften charakterisiert. Die folgende Beobachtung formalisiert die Aussage, dass die Menge der möglichen Objekte bzgl. einer Ontologie eine Teilmenge der möglichen Objekte bzgl. einer kleineren Ontologie bilden.

Beobachtung 7.3. *Gegeben seien Ontologien* $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$, $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ *und das Vokabular* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i$. *Dann gilt: Wenn* $O_1 \subseteq O_2$, *dann* $M_{\mathcal{O}_2,\mathcal{V}} \subseteq M_{\mathcal{O}_1,\mathcal{V}}$.

Beweis. Siehe S. 290.

Beobachtung 7.5 hält fest, wie sich die Menge der möglichen Welten ändert, wenn (bei gleicher Axiomenmenge) das Vokabular, bzgl. dem die möglichen Welten gebildet werden, vergrößert wird. Zum Beweis wird Lemma 7.4 genutzt.

Lemma 7.4. *Sei* $\mathcal{O} = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ *eine Ontologie,* $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i$. *Es werde angenommen, dass der Folgerungsoperator* $(\cdot)^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_i \cup \mathcal{V}_c}$ *die Interpolationseigenschaft (siehe Definition A.35, S. 245) erfüllt. Wenn* $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$, *dann folgt für alle* $Y \in M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_2}$, *dass* $Y \cap \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_1) \in M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1}$.

Beweis. Siehe S. 290.

Beobachtung 7.5. *Sei* $\mathcal{O} = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ *eine Ontologie,* $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i$. *Es werde angenommen, dass der Folgerungsoperator* $(\cdot)^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_i \cup \mathcal{V}_c}$ *die Interpolationseigenschaft (siehe Definition A.35, S. 245) erfüllt. Wenn* $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$, *dann gilt für die Funktion* $F_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2} : M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1} \xrightarrow{inj} \mathrm{Pot}(M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_2})$ *mit* $X \mapsto F_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2}(X) = \{Y \in M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_2} \mid Y \supseteq X\}$, *dass* $M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_2} = \biguplus_{X \in M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1}} F_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2}(X)$

Beweis. Siehe S. 290.

Das folgende Beispiel demonstriert die Konstruktion der möglichen Objekte.

Beispiel 7.6. Die Ontologie des Beispiels 7.1 wird leicht abgewandelt, indem die Menge des nichtlogischen, öffentlichen Vokabulars $\mathcal{V}_c$ um das Konzeptsymbol *UniAng* (Universitätsangehöriger) erweitert wird. Es sei $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine Ontologie mit $O = \{\mathit{Student} \sqsubseteq \neg\mathit{Wissenschaftler}, \mathit{Wissenschaftler}(\mathit{peter})\}$ und seien $\mathcal{V}_c = \mathcal{V}(O) \cup \{\mathit{UniAng}\}$ sowie $\mathcal{V}_i = \emptyset$ und die Beschreibungslogik, in der O formuliert ist, enthalte als Konzeptkonstruktoren nur $\sqcap$, $\sqcup$, $\neg$. Dann lässt sich die Menge $M_{\mathcal{O}}$ der möglichen Objekte in der Ontologie dieses Beispiels tabellenartig erfassen, indem für die drei atomaren Konzepte jeweils angegeben wird, ob das mögliche Objekt es instanziiert oder nicht. Da jedes der atomaren Konzepte zu jeweils verschiedenen Äquivalenzklassen bzgl. $\sim_{\mathcal{O}}$ gehört, können die atomaren Konzepte selbst (statt ihrer Äquivalenzklassen) in der Tabelle aufgeführt werden.

Zum Beispiel bedeutet der Eintrag in der Zeile für X_1, dass das mögliche Objekt X_1 dadurch charakterisiert ist, dass es Student, kein Wissenschaftler und ein Universitätsangehöriger ist.

Mögliches Objekt	*Student*	*Wissenschaftler*	*UniAng*
X_1	$+$	$-$	$+$
X_2	$+$	$-$	$-$
X_3	$-$	$-$	$-$
X_4	$-$	$-$	$+$
X_5	$-$	$+$	$+$
X_6	$-$	$+$	$-$

Die durch *peter* bezeichnete Person kann durch eines der Objekte X_5 oder X_6 repräsentiert sein. Ein bzgl. der Ontologie $\mathcal{O}$ unmögliches Objekt ist beispielsweise X^* mit

Nicht möglich	*Student*	*Wissenschaftler*	*UniAng*
X^*	$+$	$+$	$+$

da es in der Ontologie wegen $\mathit{Student} \sqsubseteq \neg \mathit{Wissenschaftler}$ keine Objekte geben kann, die sowohl Studenten als auch Wissenschaftler sind.

Die Grovesche Modellklammer $[\cdot]$ wird so adaptiert, dass sie eine Ontologie $\mathcal{O}$ als Parameter bekommt. Für Konzeptrepräsentationen $\underline{C}$ wird $[\underline{C}]^{\mathcal{O}}$ definiert durch die Menge aller möglichen Objekte $X \in M_{\mathcal{O}}$, die kompatibel sind mit $\underline{C}$.

$$[\underline{C}]^{\mathcal{O}} = \{X \in M_{\mathcal{O}} \mid \underline{C} \subseteq X\}$$

Für Konzeptbeschreibungen C ist $[C]^{\mathcal{O}}$ eine Abkürzung von $[C^{\Uparrow}_{\mathcal{O}}]^{\mathcal{O}}$. Der an Konzeptbeschreibungen angepasste Sphärenbegriff ist in der folgenden Definition festgehalten.

Definition 7.7. (Adaption von Grove (1988), Wassermann und Fermé (1999)) Für eine Ontologie $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und eine Teilmenge $\mathcal{W} \subseteq M_{\mathcal{O}}$ wird ein Mengensystem $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Pot}(M_{\mathcal{O}})$ ein Sphärensystem für $\mathcal{W}$ in $\mathcal{O}$ genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mathcal{S}$ ist bzgl. Inklusion total geordnet.
2. $\mathcal{W}$ ist inklusionsminimal in $\mathcal{S}$.
3. $M_{\mathcal{O}}$ ist inklusionsmaximal in $\mathcal{S}$.
4. Für alle Konzeptbeschreibungen C gilt: Wenn es eine Sphäre $S \in \mathcal{S}$ gibt mit $[C]^{\mathcal{O}} \cap S \neq \emptyset$, dann gibt es eine inklusionsminimale Sphäre $S_{min} \in \mathcal{S}$ mit $[C]^{\mathcal{O}} \cap S_{min} \neq \emptyset$.

Die Funktion $c_{\mathcal{S}}$ wähle zu jedem $[C]^{\mathcal{O}}$ die gemäß 4. existierende minimale Sphäre aus, deren Schnitt mit $[C]^{\mathcal{O}}$ nicht leer ist. Es wird $c_{\mathcal{S}}(\emptyset) = M_{\mathcal{O}}$ gesetzt. Es sei weiter $f_{\mathcal{S}}([C]^{\mathcal{O}}) = c_{\mathcal{S}}([C]^{\mathcal{O}}) \cap [C]^{\mathcal{O}}$.

Einem Sphärensystem $\mathcal{S}$ kann eine duale Kette von Konzeptrepräsentationen $\mathcal{T}$ zugeordnet werden.

$$\mathcal{T} = \{\bigcap S \mid S \in \mathcal{S}\}$$

In den Beispielen werde ich zur Beschreibung eines Sphärensystems die Repräsentation durch eine duale Kette von Konzeptrepräsentationen heranziehen. Da in den Beispielen Konzeptrepräsentationen $\bigcap S \in \mathcal{T}$ äquivalent durch einzelne Konzeptbeschreibungen K_S ausdrückbar sind ($(\bigcap S)^{\Uparrow}_{\mathcal{O}} = (K_S)^{\Uparrow}_{\mathcal{O}}$), werde ich Sphärensysteme durch die repräsentierenden Konzeptbeschreibungen $\{K_S \mid S \in \mathcal{S}\}$ beschreiben.

Beispiel 7.8. Gegeben sei die Ontologie $\mathcal{O}$ aus dem Beispiel 7.6. Die Menge möglicher Objekte $M_{\mathcal{O}}$ ergibt sich wie in der Tabelle von Beispiel 7.6. Die Menge der möglichen Objekte, die Studenten sind, ist gegeben durch

$$[\mathit{Student}]^O = \{X_1, X_2\} = \{\langle +\mathit{St}, -\mathit{Wi}, +\mathit{Uni}\rangle, \langle +\mathit{St}, -\mathit{Wi}, -\mathit{Uni}\rangle\}$$

Ein mögliches Sphärensystem $\mathcal{S}$ für $[\mathit{Student}]$ ist

$$\mathcal{S} = \{[\mathit{Student}]^{\mathcal{O}}, [\mathit{Student}]^{\mathcal{O}} \cup \{\langle -\mathit{St}, +\mathit{Wi}, +\mathit{Uni}\rangle, \langle -\mathit{St}, +\mathit{Wi}, -\mathit{Uni}\rangle\}, M_{\mathcal{O}}\}$$

Eine duale Kette von Konzeptbeschreibungen ist

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \{\mathit{Student}, \mathit{Student} \sqcup \mathit{Wissenschaftler}, \top\}$$

Mit der Anpassung des Begriffs eines möglichen Objekts bzgl. einer Ontologie lassen sich sphärenbasierte Revisions- und Kontraktionsoperatoren für Konzepte in einer Ontologie definieren.

Definition 7.9. Es bezeichne $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle$ eine Ontologie. Es sei $\underline{C}$ eine $\mathcal{O}$-abgeschlossene Konzeptrepräsentation und D eine Konzeptbeschreibung aus $\mathrm{Konz}((\mathcal{V}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c)$. Weiter sei $\mathcal{S}$ ein Sphärensystem für $[\underline{C}]^{\mathcal{O}}$ in $\mathcal{O}$. Dann ist der *sphärenbasierte Operator zur Revision von $\mathcal{O}$-abgeschlossenen Konzeptrepräsentationen* $@_{\mathcal{S}}$ und (über die Harper-Identität) der *sphärenbasierte Operator zur Kontraktion von $\mathcal{O}$-abgeschlossenen Konzeptrepräsentationen* $\ominus_{\mathcal{S}}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \underline{C} \,@_{\mathcal{S}}\, D &= \bigcap \big(f_{\mathcal{S}}([D]^{\mathcal{O}})\big) \\ \underline{C} \ominus_{\mathcal{S}} D &= (\underline{C} \,@_{\mathcal{S}}\, \neg D) \cap \underline{C} \end{aligned}$$

Die Revision und Kontraktion von nicht abgeschlossenen Konzeptrepräsentationen und – als Spezialfall – von einzelnen Konzeptbeschreibungen definiert man durch Bildung des $\mathcal{O}$-Abschlusses. Für den Fall einer einzelnen Konzeptbeschreibung C lauten die Definitionen

$$\begin{aligned} C \circledast_{\mathcal{S}} D &= C^{\Uparrow}_{\mathcal{O}} \circledast_{\mathcal{S}} D \\ C \ominus_{\mathcal{S}} D &= C^{\Uparrow}_{\mathcal{O}} \ominus_{\mathcal{S}} D \end{aligned}$$

Konzeptrevisions- und Konzeptkontraktionsoperatoren liefern als Resultat eine Konzeptrepräsentation, d.h. eine (möglicherweise) unendliche Menge von Konzeptbeschreibungen. Im Folgenden werde ich den Fall, dass die Konzeptrepräsentation endlich repräsentierbar ist, gesondert betrachten.

Da der $\mathcal{O}$-Abschlussoperator $(\cdot)^{\Uparrow}_{\mathcal{O}}$ ein Folgerungsoperator ist (siehe Beobachtung 7.2), gelten für die Operatoren $\circledast_{\mathcal{S}}$ und $\ominus_{\mathcal{S}}$ genau die Postulate, die auch für Groves und Wassermanns/Fermés Operatoren gelten. Für die Definition der Ontologieintegrationsoperatoren benötige ich den Konzeptkontraktionsoperator $\ominus_{\mathcal{S}}$. In den Beweisen wird auch auf die Konzeptrevision eingegangen. Ich führe die von $\ominus_{\mathcal{S}}, \circledast_{\mathcal{S}}$ erfüllten Postulate im Folgenden noch einmal auf, da die ursprünglichen, von AGM (Alchourrón et al., 1985) gelisteten Postulate für Sätze und nicht für Konzepte formuliert sind.[4] Ich beschränke mich auf den Fall, dass die Konzeptrepräsentation aus genau einer Konzeptbeschreibung C besteht, da nur dieser Fall im Folgenden betrachtet wird.

Beobachtung 7.10. *(Im Wesentlichen Grove (1988)) Es sei $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine Ontologie. Es seien $C, D \in \mathrm{Konz}((\mathcal{V}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c)$ Konzeptbeschreibungen und $\mathcal{S}$ ein Sphärensystem für $[\underline{C}]^{\mathcal{O}}$ in $\mathcal{O}$.*

1. *$C \ominus_{\mathcal{S}} D$ und $C \circledast_{\mathcal{S}} D$ sind $\mathcal{O}$-abgeschlossen.* *(Abschluss)*
2. *$C \ominus_{\mathcal{S}} D \subseteq C^{\Uparrow}_{\mathcal{O}}$ und $C \circledast_{\mathcal{S}} D \subseteq \{C, D\}^{\Uparrow}_{\mathcal{O}}$.* *(Inklusion)*
3. *Wenn $D \notin C^{\Uparrow}_{\mathcal{O}}$, d.h. wenn $O \not\models C \sqsubseteq D$, dann gilt $C \ominus_{\mathcal{S}} D = C$.*
   Wenn $\neg D \notin C^{\Uparrow}_{\mathcal{O}}$, d.h. wenn $O \not\models C \sqsubseteq \neg D$, dann gilt $C \circledast_{\mathcal{S}} D = \{C, D\}^{\Uparrow}_{\mathcal{O}}$.
   (Vakuität)
4. *Wenn $O \not\models D \doteq \top$, dann $D \notin C \ominus_{\mathcal{S}} D$.*
   $D \in C \circledast_{\mathcal{S}} D$. *(Erfolg)*
5. *Wenn $O \models D_1 \doteq D_2$, dann $C \ominus_{\mathcal{S}} D_1 = C \ominus_{\mathcal{S}} D_2$ und $C \circledast_{\mathcal{S}} D_1 = C \circledast_{\mathcal{S}} D_2$.*
   (Rechtsextensionalität)
6. *$C^{\Uparrow}_{\mathcal{O}} \subseteq (C \ominus_{\mathcal{S}} D \cup \{D\})^{\Uparrow}_{\mathcal{O}}$* *(Wiedergewinnung)*

[4] Vgl. Abschnitt 2.1, S. 19 ff. und S. 21 ff.

7. *$C \circledast_{\mathcal{S}} D$ ist konsistent genau dann, wenn $O \not\models D \doteq \bot$.* *(Konsistenz)*

8. $C \ominus_{\mathcal{S}} D_1 \cap C \ominus_{\mathcal{S}} D_2 \subseteq C \ominus_{\mathcal{S}} (D_1 \sqcap D_2)$. *(Konjunktion 1)*

9. $C \circledast_{\mathcal{S}} (D_1 \sqcap D_1) \subseteq ((C \circledast_{\mathcal{S}} D_1) \cup \{D_2\})^{\Uparrow}_{O}$ *(Konjunktion 1)*

10. *Falls $O \not\models C \sqsubseteq D_1$, ist $C \ominus_{\mathcal{S}} (D_1 \sqcap D_2) \subseteq C \ominus_{\mathcal{S}} D_1$.* *(Konjunktion 2)*

11. *Falls $\neg D_2 \notin C \circledast_{\mathcal{S}} D_1$, dann $(C \circledast_{\mathcal{S}} D_1 \cup \{D_2\})^{\Uparrow}_{O} \subseteq C \circledast_{\mathcal{S}} (D_1 \sqcap D_2)$.* *(Konjunktion 2)*

Beweis. Folgt aus Korollar 2.25. □

Sphärenbasierte Kontraktionsoperatoren können wie ihre klassischen Pendants nur dann eine erfolgreiche Entfernung des Triggers D garantieren, wenn D nicht tautologisch ist, d.h. hier, wenn D in O nicht äquivalent zum universellen Konzept $\top$ ist. Entsprechend können sphärenbasierte Konzeptrevisionsoperatoren nur dann ein konsistentes Ergebnis garantieren, wenn der Trigger D in O nicht äquivalent zum leeren Konzept $\bot$ ist. Beispielsweise ist $\neg(\mathit{Student} \sqcap \mathit{Wissenschaftler})$ in der Ontologie des Beispiels 7.1 äquivalent zum universellen Konzept. Daher würde eine Kontraktion des Konzeptes *Student* mit dem Konzept $\neg(\mathit{Student} \sqcap \mathit{Wissenschaftler})$ eine Konzeptrepräsentation ergeben, die sich durch *Student* beschreiben lässt, und eine Revision von *Student* mit dem leeren Konzept $\mathit{Student} \sqcap \mathit{Wissenschaftler}$ eine Konzeptrepräsentation, die durch das leere Konzept $\bot$ beschreibbar ist.

7.3 Sphärenbasierte Reinterpretationsoperatoren

Basierend auf den Konzeptkontraktionsoperatoren können sphärenbasierte Reinterpretationsoperatoren für triggernde konzeptbasierte Literale definiert werden. Die folgenden Definitionen erweitern die lokalen Operatoren von Özçep (2006). Im ersten Unterabschnitt werden Operatoren definiert, die sich zur Revision einer Ontologie mit einem konzeptbasierten Literal eignen. Diese Operatoren basieren auf einer Konzeptkontraktion bzgl. eines Sphärensystems und sind daher wie auch die sphärenbasierten Operatoren von Grove, Wassermann und Fermé nicht iterierbar. Im zweiten Unterabschnitt wird daher der Begriff eines Sphärensystems in einer in der Literatur bekannten Weise (Peppas, 2004) verschärft und auf der Grundlage des verschärften Sphärenbegriffs ein Vorschlag für iterierbare, sphärenbasierte Ontologieintegrationsoperatoren für konzeptbasierte Literale gegeben, die die Sphärenkollektionen vom vorhergehenden zum nachfolgenden Schritt nur minimal ändern.

Für alle im Folgenden definierten sphärenbasierten Operatoren werden ein öffentliches Vokabular $\mathcal{V}_c$, ein davon disjunktes, internes Vokabular $\mathcal{V}_i$ sowie eine Funktion $\Phi \in \mathrm{Ear}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ zur eindeutigen Ambiguitätsauflösung (gemäß Gleichung (3.2), S. 76) vorausgesetzt. Alle im Folgenden definierten sphärenbasierten Reinterpretation haben wie auch die globalen Reinterpretationsoperatoren diese Funktion Φ als Parameter. Der Übersichtlichkeit halber wird dieser Parameter in der Operatorbezeichnung weggelassen.

7.3.1 Operatoren für den einschrittigen Fall

Definitionen

Gegeben sind ein triggerndes konzeptbasiertes Literal α, $\mathcal{V}(\alpha) \subseteq \mathcal{V}_c$ und eine Ontologie $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$. Die Ontologie sei in einer beschreibungslogischen Sprache formuliert, so dass $(\cdot)^{\Uparrow}_{\mathcal{O}}$ die Interpolationseigenschaft (Definition A.35, S. 245) erfüllt. Die Ontologie $\mathcal{O}$ wird mit einer Struktur in Form einer Familie von Sphärensystemen ausgestattet. Für jedes Konzeptsymbol K aus dem gemeinsamen Vokabular $\mathcal{V}_c$ gebe es ein Sphärensystem für $[K]^{\mathcal{O}}$ und ein Sphärensystem für $[\neg K]^{\mathcal{O}}$. Es wird also jedem Konzeptliteral über $\mathcal{V}_c$ (jeder Konzeptbeschreibung der Form K oder $\neg K$ für $K \in \mathcal{V}_c$)[5] ein Sphärensystem zugeordnet. Konzeptliteralen $\hat{K}$, die nicht in der Ontologie vorkommen, wird das triviale Sphärensystem $\{[\hat{K}]^{\mathcal{O}}, M_{\mathcal{O}}\}$, repräsentiert durch $\{\hat{K}, \top\}$, zugewiesen.

Definition 7.11. Es sei $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine Ontologie. Eine *Sphärenkollektion* $\mathbb{S}$ *von* $\mathcal{O}$ *für konzeptbasierte Literale über* $\mathcal{V}_c$ ist eine Familie von Sphärensystemen $\langle \mathbb{S}(\hat{K}) \rangle_{\hat{K} \in \mathrm{KLit}(\mathcal{V}_c)}$ für jede einem Konzeptliteral $\hat{K} \in \mathrm{KLit}(\mathcal{V}_c)$ entsprechende Menge $[\hat{K}]^{\mathcal{O}}$. Eine Ontologie $\mathcal{O}$ zusammen mit einer Sphärenkollektion für $\mathcal{O}$ wird *eine durch Sphären strukturierte Ontologie* genannt und als Paar $\langle \mathcal{O}, \mathbb{S} \rangle$ notiert.

Für die folgenden Definitionen der Reinterpretationsoperatoren gibt es keine weitere Beschränkung an die Beschaffenheit der Sphärenkollektion. Man beachte, dass der hier definierte Begriff einer Sphärenkollektion syntaktisch in dem Sinne ist, dass eine Sphärenkollektion verschiedenen Konzeptliteralen $\hat{K}_1, \hat{K}_2$, deren mögliche Welten identisch sind, $[\hat{K}_1]^{\mathcal{O}} = [\hat{K}_2]^{\mathcal{O}}$, verschiedene Sphärensysteme zuweisen kann. Diese Festlegung lässt sich solange vertreten, wie die Konzeptliterale nicht unabhängig von jeglicher Ontologie äquivalent sind, $\models K_1 \equiv K_2$, da in diesem Fall $\hat{K}_1$ und $\hat{K}_2$ dieselben Sphärensysteme zugewiesen werden sollten. Für Konzeptliterale ist jedoch $\models \hat{K}_1 \equiv \hat{K}_2$ genau dann der Fall, wenn sie identisch sind, $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$, so dass $\hat{K}_1$ und $\hat{K}_2$ tatsächlich dasselbe Sphärensystem zugewiesen bekommen. Die syntaktisch orientierte Festlegung der Sphärenkollektion führt insbesondere dazu, dass die in diesem Abschnitt definierten sphärenbasierten Reinterpretationsoperatoren folgende verschärfte Version der Extensionalität nicht erfüllen:

[5] Vgl. Anhang A, S. 225.

Für alle Axiome α, β gilt: Wenn $O \cup \{\beta\} \models \alpha$ und $O \cup \{\alpha\} \models \beta$, dann $O \circ \alpha \equiv O \circ \beta$.

Allerdings ist diese verschärfte Version der Extensionalität eine Eigenschaft, die auch von den klassischen Belief-Revision-Funktionen über Belief-Sets nicht erfüllt wird. Das folgende Beispiel für aussagenlogische Full-Meet-Kontraktion $\sim$ (Definition 2.9, S. 25) belegt diese Tatsache.

Beispiel 7.12. Sei $BS = \mathrm{Cn}(\{p \to q\})$ ein aussagenlogisches Belief-Set. Dann gilt $BS \cup \{q \to p\} \models p \to p$ und $BS \cup \{p \to p\} \models q \to p$. Auf der einen Seite ist $BS \sim (p \to p) = BS \cap \mathrm{Cn}(\neg(p \to p)) = BS$. Auf der anderen Seite aber $BS \sim (q \to p) = BS \cap \mathrm{Cn}(\neg(q \to p)) \neq BS$, da $q \to p \notin BS \sim (q \to p)$.

Ich wähle die syntaktisch orientierte Festlegung der Sphärenkollektion, da sich eine einfachere Definition der Folgesphärenkollektion im Rahmen der iterierten Anwendung von sphärenbasierten Operatoren (Abschnitt 7.3.2) ergibt.

Für strukturierte Ontologien ist der Äquivalenzbegriff anzupassen. Diese Anpassung ist für die Formulierung des Postulats zur Linksextensionalität in Beobachtung 7.17 nötig. Zwei strukturierte Ontologien $\langle \mathcal{O}_1, \mathbb{S}_1 \rangle$ und $\langle \mathcal{O}_2, \mathbb{S}_2 \rangle$ sind äquivalent, kurz $\langle \mathcal{O}_1, \mathbb{S}_1 \rangle \hat{\equiv} \langle \mathcal{O}_2, \mathbb{S}_2 \rangle$, genau dann, wenn die zu Grunde liegenden Ontologien (ohne die Struktur) äquivalent sind und zusätzlich die Sphärenkollektionen identisch sind, kurz $\mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2$. Strukturierte Ontologien sind die Basis für die Definition der sphärenbasierten Reinterpretationsoperatoren. Die folgende Definition 7.13 komplettiert die Entwicklung des dreischrittigen Ansatzes der sphärenbasierten Reinterpretation (S. 187).

Definition 7.13. Gegeben seien $\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i$ mit $\mathcal{V}_c \cap \mathcal{V}_i = \emptyset$ sowie eine Funktion $\Phi \in \mathrm{Ear}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$ zur eindeutigen Ambiguitätsauflösung (gemäß 3.2, S. 76). Es sei eine strukturierte Ontologie $\langle \mathcal{O}, \mathbb{S} \rangle$ mit $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ und Sphärenkollektion $\mathbb{S}$ für konzeptbasierte Literale über $\mathcal{V}_c$ vorgegeben. Es sei $K \in \mathcal{V}_c$ ein Konzeptsymbol sowie $a \in \mathcal{V}_c$ eine Konstante, für die das spezifischste Konzept $\mathrm{msc}_O(a)$ existiert. Es sei $\sigma = \Phi(\{K\}, \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}(O))$ und abkürzend $K' = \sigma(K)$. Es stehe $\hat{K}$ für ein Konzeptliteral mit $\mathcal{V}(\hat{K}) = K$ und $\hat{K}'$ für ein Konzeptliteral mit $\hat{K}' = \mathcal{V}(K')$. Dann werden die *sphärenbasierten Reinterpretationsoperatoren des Typs 1* $\odot_{1,\mathbb{S}} = \odot^{\Phi}_{1,\mathbb{S}}$ *und des Typs 2* $\odot_{2,\mathbb{S}} = \odot^{\Phi}_{2,\mathbb{S}}$ für konzeptbasierte Literale definiert durch

$$O \odot_{1,\mathbb{S}} \hat{K}(a) = \begin{cases} O \cup \{\hat{K}(a)\} & \text{falls } O \cup \{\hat{K}(a)\} \text{ konsistent,} \\ O \otimes_1 \hat{K}(a) \cup \{\hat{K}' \sqsubseteq C \mid C \in \hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$O \odot_{2,\mathbb{S}} \hat{K}(a) = \begin{cases} O \cup \{\hat{K}(a)\} & \text{falls } O \cup \{\hat{K}(a)\} \text{ konsistent,} \\ O \otimes_2 \hat{K}(a) \cup & \\ \{\hat{K} \sqsubseteq C \mid C \in (\hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\, \mathrm{msc}_O(a))_{[K/K']}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist $\hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)$ endlich repräsentierbar, dann gibt es eine Konzeptbeschreibung $C_{(\hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\, \mathrm{msc}_O(a))}$ mit $(C_{(\hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\, \mathrm{msc}_O(a))})^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}} = \hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)$. Durch Bestimmung einer Normalform (oder einer Ordnung) lässt sich ein solches Konzept C mit $C^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}} = \hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)$ auswählen. Die Definitionen bekommen damit die kompaktere Form

$$O \odot_{1,\mathbb{S}} \hat{K}(a) = \begin{cases} O \cup \{\hat{K}(a)\} & \text{falls } O \cup \{\hat{K}(a)\} \text{ konsistent,} \\ O \otimes_1 \hat{K}(a) \cup \{\hat{K}' \sqsubseteq C_{\hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$O \odot_{2,\mathbb{S}} \hat{K}(a) = \begin{cases} O \cup \{\hat{K}(a)\} & \text{falls } O \cup \{\hat{K}(a)\} \text{ konsistent,} \\ O \otimes_2 \hat{K}(a) \cup \{\hat{K} \sqsubseteq (C_{\hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)})_{[K/K']}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die von Özçep (2006) definierten lokalen Operatoren setzen andere Brückenaxiome an. Statt das neue Symbol K' durch Subsumptionen abzuschätzen, wird angenommen, dass das Ergebnis der Konzeptkontraktion $\hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)$ gerade die Bedeutung der anderen Lesart von K ist. Daher definiert Özçep (2006) die sphärenbasierten Operatoren für den Konsistenz- und den Inkonsistenzfall über die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} O \odot_{1,\mathbb{S}} \hat{K}(a) &= O \cup \{\hat{K}'(a), \hat{K}' \doteq \hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)\} \\ O \odot_{2,\mathbb{S}} \hat{K}(a) &= O_{[K/K']} \cup \{\hat{K}(a), \hat{K} \doteq (\hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\, \mathrm{msc}_O(a))_{[K/K']}\} \end{aligned}$$

Mit dieser Definition wird auch der Konsistenzfall abgedeckt. In diesem Fall folgt mit Beobachtung 7.10.3, dass $\hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)$ durch $\hat{K}$ repräsentiert werden kann und daher die Einführung des neuen Symbols redundant ist, da gilt: $O \odot_{i,\mathbb{S}} \hat{K}(a) \models K' \doteq K$. Insbesondere folgt für den Typ-1-Operator im Konsistenzfall, dass die Menge der in der öffentlichen Sprache folgerbaren Sätze von $O \odot_{1,\mathbb{S}} \hat{K}(a)$ durch $O \cup \{\hat{K}(a)\}$ repräsentiert wird, kurz $O \odot_{1,\mathbb{S}} \hat{K}(a) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c) = O \cup \{\hat{K}(a)\}$.

Diese Variante der Operatoren hat den Vorteil, dass die Komplexität des von der Ontologie erzeugten Konzeptverbandes nicht erhöht wird, da das Konzeptliteral $\hat{K}'$ (bzw. $\hat{K}$) durch $\doteq$ als äquivalent zu einem Konzept der Ontologie erklärt wird. Die für $\hat{K}'$ eingeführte Äquivalenz ist allerdings nicht definitorisch, d.h. die Bedeutung des neuen Symbols K' wird nicht eindeutig bestimmt durch die Bedeutung der anderen Symbole in $O \odot_{1,\mathbb{S}} \hat{K}(a)$. Denn hierfür müsste $O \odot_{1,\mathbb{S}} \hat{K}(a)$ u.a. eine konservative Erweiterung von O sein, was – wie das Beispiel 7.15 (S. 198) zeigen wird – nicht der Fall ist.

Eigenschaften der sphärenbasierten Operatoren für den einschrittigen Fall

Sphärenbasierte Operatoren des Typs 1 und Typs 2 sind wie auch im Fall der schwachen und starken Operatoren strukturell ähnlich in dem Sinne, dass gilt

$$(O \odot_{1,\mathbb{S}} \alpha)_{[K/K',K'/K]} = O \odot_{2,\mathbb{S}} \alpha \tag{7.2}$$

Direkt aus den Definitionen folgt, dass die sphärenbasierten Operatoren stärker als die schwachen Reinterpretationsoperatoren sind. Sie ergänzen die Abschätzungen der schwachen Operatoren um weitere Brückenaxiome, die sich aus einer sphärenbasierten Kontraktion des triggernden Konzeptliterals (K bzw. $\neg K$) mit der Negation des spezifischsten Konzepts ergeben. Tatsächlich sind die sphärenbasierten Operatoren $\odot_{i,\mathbb{S}}$ auch stärker als die korrespondierenden globalen starken Operatoren $\odot_i$.

Beobachtung 7.14. *Die sphärenbasierten Operatoren $\odot_{i,\mathbb{S}}$, $i \in \{1, 2\}$, sind stärker als die starken Operatoren $\odot_i$, d.h. für Ontologien O und konzeptbasierte Literale α gilt*

$$\mathrm{Mod}(O \odot_{i,\mathbb{S}} \alpha) \subseteq \mathrm{Mod}(O \odot_i \alpha)$$

Beweis. Siehe S. 290.

In einigen Fällen können die sphärenbasierten Operatoren zu gleichen Resultaten führen wie die korrespondierenden globalen starken Operatoren. Das gilt insbesondere dann, wenn die Sphärenkollektionen aus trivialen Sphärensystemen, repräsentiert durch $\{\hat{K}, \top\}$, bestehen. Wie das folgende Beispiel zeigt, sind die sphärenbasierten Operatoren jedoch echt stärker als die korrespondierenden globalen starken Operatoren.

Beispiel 7.15. Gegeben sind die Menge der Ontologieaxiome O und der Trigger α. Außerdem wird eine Repräsentation des Sphärensystems $\mathbb{S}(\mathit{Student})$ für das Konzeptsymbol *Student* in einer sonst nicht näher spezifizierten Sphärenkollektion $\mathbb{S}$ vorgegeben.

$$\begin{aligned}
O &= \{\mathit{Student} \sqsubseteq \neg\,\mathit{Wissenschaftler}, \mathit{Student} \sqsubseteq \mathit{UniAng}, \\
&\quad\ \mathit{Wissenschaftler}(\mathit{peter}), \mathit{Wissenschaftler}(\mathit{emel}), \mathit{UniAng}(\mathit{emel})\} \\
\alpha &= \mathit{Student}(\mathit{peter}) \\
\mathbb{S}(\mathit{Student}) &= \{\mathit{Student}, \mathit{UniAng}, \top\}
\end{aligned}$$

Ein spezifischstes Konzept von *peter* ist $\mathrm{msc}_O(\mathit{peter}) = \mathit{Wissenschaftler}$. Das Ergebnis der Kontraktion von *Student* mit der Negation des spezifischsten Konzepts $\neg\,\mathit{Wissenschaftler}$ im Sphärensystem $\mathbb{S}(\mathit{Student})$ liefert eine Konzeptrepräsentation, die durch $\mathit{Student} \sqcup (\mathit{UniAng} \sqcap \mathit{Wissenschaftler})$ beschrieben werden

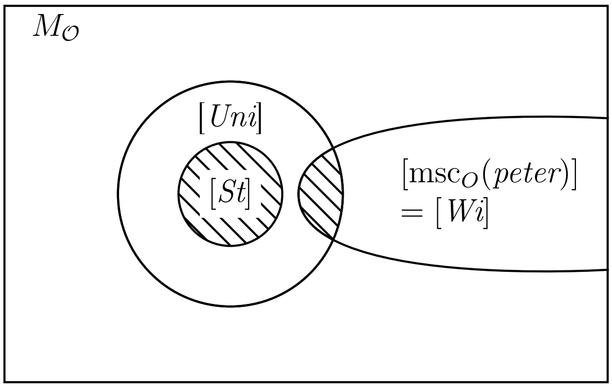


Abbildung 7.1: Veranschaulichung der Konzeptkontraktion von Beispiel 7.15

kann. Abbildung 7.1 veranschaulicht diese Konzeptkontraktion. Das Resultat des sphärenbasierten Reinterpretationsoperators des Typs 1 liefert u.a. eine Oberabschätzung des senderseitigen Studentenkonzepts *Student′* durch das Konzept $Student \sqcup (UniAng \sqcap Wissenschaftler)$.

$$\begin{aligned} O\odot_{1,\mathbb{S}}Student(peter) \ \equiv\ & O \cup \{Student'(peter), Student \sqsubseteq Student', \\ & Student' \sqsubseteq Student \sqcup (UniAng \sqcap Wissenschaftler)\} \end{aligned}$$

Im Gegensatz dazu liefert der starke Operator des Typs 1 $\odot_1$ eine schwächere Abschätzung des triggerseitigen Studentenkonzepts *Student′* durch das Konzept $Student \sqcup Wissenschaftler$.

$$\begin{aligned} O \odot_1 Student(peter) \ =\ & O \cup \{Student'(peter), Student \sqsubseteq Student', \\ & Student' \sqsubseteq Student \sqcup Wissenschaftler\} \end{aligned}$$

Folglich gilt $\mathrm{Mod}(O\odot_1 Student(peter)) \not\subseteq \mathrm{Mod}(O\odot_{1,\mathbb{S}}Student(peter))$. Insbesondere folgt, dass zwar $O\odot_{1,\mathbb{S}}Student(peter) \models UniAng(peter)$; aber es gilt nicht, dass $O \odot_1 Student(peter) \models UniAng(peter)$.

Das Beispiel zeigt außerdem, dass die sphärenbasierten Reinterpretationsoperatoren des Typs 1 im Unterschied zu den starken Operatoren $\odot_1$ im Inkonsistenzfall keine konservative Erweiterung der initialen Ontologie liefern. Zwar ist das Ergebnis der Kontraktion des Triggerkonzepts *Student* in dem Sinne minimal, dass nur die bzgl. des Sphärensystems $\mathbb{S}(Student)$ minimale Abschwächung zur Reinterpretation gewählt wird. Jedoch führt die Approximation der a charakterisierenden Eigenschaften durch das spezifischste Konzept $\mathrm{msc}_O(a)$ dazu, dass insgesamt im Resultat viel mehr folgerbar ist als tatsächlich inhärent im Trigger und in der Ontologie vorhanden war. Bezogen auf das Beispiel 7.15 gilt $O\odot_{1,\mathbb{S}}Student(peter) \models UniAng(peter)$, obwohl weder in der Ontologie noch im

Trigger eine Rechtfertigung dafür vorliegt, dass Peter ein Universitätsangehöriger sein könnte.

Beobachtung 7.16. *Es gibt eine strukturierte Ontologie $\langle\langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle, \mathbb{S}\rangle$ und einen Trigger α, so dass $O\odot_{i,\mathbb{S}}\alpha$ auch im Inkonsistenzfall keine konservative Erweiterung von O ist.*

Trotz dieser Eigenschaft der auf Sphären basierenden Reinterpretationsoperatoren kann die Konsistenz des Reinterpretationsresultats gewährleistet werden. Diese und andere die AGM-Postulate betreffende Eigenschaften sind in der folgenden Beobachtung festgehalten:

Proposition 7.17. *Es seien strukturierte Ontologien $\langle\mathcal{O}, \mathbb{S}\rangle$, $\langle\mathcal{O}_1, \mathbb{S}_1\rangle$ und $\langle\mathcal{O}_2, \mathbb{S}_2\rangle$, mit $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle$, $\mathcal{O}_1 = \langle O_1, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle$ und $\mathcal{O}_2 = \langle O_2, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle$. Weiter seien α und β konzeptbasierte Literale über $\mathcal{V}_c$. Dann gilt: $\odot_{1,\mathbb{S}}$ erfüllt (Reint 1a), (Reint 1b), (Reint 2), (Reint 3), (Reint 4a) (und damit (Reint 5a), (Reint 6a)), (Reint 5b), (Reint 6b) und (Reint 7), aber nicht (Reint 4b). $\odot_{2,\mathbb{S}}$ erfüllt (Reint 1a), (Reint 1b), (Reint 2), (Reint 4b) (und damit (Reint 5b), (Reint 6b)), (Reint 5a), (Reint 5b) und (Reint 7), aber nicht (Reint 4a) und (Reint 3). Im Einzelnen gilt:*

1. *Wenn $\langle\mathcal{O}_1, \mathbb{S}_1\rangle \stackrel{\sim}{\equiv} \langle\mathcal{O}_2, \mathbb{S}_2\rangle$ und $\mathcal{V}(O_1) \cap \mathcal{V}_i = \mathcal{V}(O_2) \cap \mathcal{V}_i$ gelten, dann gilt auch $(O_1\odot^{\Phi}_{i,\mathbb{S}_1}\alpha) \equiv (O_2\odot^{\Phi}_{i,\mathbb{S}_2}\alpha)$.* *(Reint-Linksextensionalität)*
2. *Wenn $\alpha \equiv \beta$, dann $(O\odot_{i,\mathbb{S}}\alpha) \equiv (O\odot_{i,\mathbb{S}}\beta)$.* *(Reint-Rechtsextensionalität)*
3. *$O\odot_{i,\mathbb{S}}\alpha = O \cup \{\alpha\}$ gdw. $O \cup \{\alpha\}$ konsistent ist.* *(Reint-Vakuität)*
4. *$O\odot_{1,\mathbb{S}}\alpha \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O)) \subseteq O \cup \{\alpha\}$* *(Reint-Inklusion)*
5. *$O\odot_{2,\mathbb{S}}\alpha \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O)) \not\subseteq O \cup \{\alpha\}$, falls $O \cup \{\alpha\}$ inkonsistent ist.* *(Nichtinklusion)*
6. *$O \subseteq O\odot_{1,\mathbb{S}}\alpha$* *(Reint-Monotonie)*
7. *$\alpha \in O\odot_{2,\mathbb{S}}\alpha$* *(Reint-Erfolg)*
8. *Es gibt Substitutionen σ_1, σ_2, so dass $O\sigma_1 \subseteq O\odot_{1,\mathbb{S}}\alpha$ und $O\sigma_2 \subseteq O\odot_{2,\mathbb{S}}\alpha$.* *(Reint-Linkskonservierung)*
9. *Es gibt Substitutionen σ_1, σ_2, so dass $\alpha\sigma_1 \in O\odot_{1,\mathbb{S}}\alpha$ und $\alpha\sigma_2 \in O\odot_{2,\mathbb{S}}\alpha$.* *(Reint-Rechtskonservierung)*
10. *Es gibt Substitutionen σ_1, σ_2, so dass $O \subseteq (O\odot_{1,\mathbb{S}}\alpha)\sigma_1$ und $O \subseteq (O\odot_{2,\mathbb{S}}\alpha)\sigma_2$.* *(Reint-Linksrekonstruierbarkeit)*

11. *Es gibt Substitutionen* σ_1, σ_2*, so dass* $\alpha \in (O \odot_{1,\mathbb{S}} \alpha)\sigma_1$ *und* $\alpha \in (O \odot_{2,\mathbb{S}} \alpha)\sigma_2$. *(Reint-Rechtsrekonstruierbarkeit)*

12. $O \odot_{i,\mathbb{S}} \alpha$ *ist konsistent gdw.* O *konsistent ist.* *(Reint-Konsistenz)*

Beweis. Siehe S. 291.

Die Erfüllbarkeit der Konsistenzeigenschaft hängt wesentlich davon ab, dass die Sphärenkollektion der Ontologie relativ zum Vokabular $(\mathcal{V}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c$ definiert wird und nicht Symbole einbezieht, die für die Disambiguierung genutzt werden. Wenn für die Bildung der möglichen Objekte auch das neu eingeführte Symbol K' einbezogen werden dürfte, könnte die Konsistenzeigenschaft zerstört werden, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 7.18. Gegeben ist eine Ontologie $\mathcal{O}$ mit öffentlichem Vokabular $\mathcal{V}_c = \{St, Wi, peter\}$, internem Vokabular $\mathcal{V}_i = \{St'\}$ und Axiomen O, die besagen, dass alle Studenten keine Wissenschaftler sind und Peter ein Wissenschaftler ist. Der Trigger ist $\alpha = Student(peter)$ und $Student'$ ist das für die Reinterpretation benutzte Symbol.

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \langle O, \{St, Wi, peter\}, \{St'\}\rangle \\ O &= \{St \sqsubseteq \neg Wi, Wi(peter)\} \\ \alpha &= St(peter) \end{aligned}$$

Anders als in den Definitionen der sphärenbasierten Reinterpretationsoperatoren wird für die Definition der Sphärenkollektion die Menge der möglichen Objekte $M_{\mathcal{O}, \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i}$ und nicht $M_{\mathcal{O}} = M_{\mathcal{O}, (\mathcal{V}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c}$ benutzt und durch eine Kette von repräsentierenden Konzeptbeschreibungen wie folgt festgelegt:

$$\mathbb{S} = \{\{Wi, \top\}, \{\neg Wi, \top\}, \{\neg St, \top\}, \{St, St \sqcup (Wi \sqcap \neg St'), \top\}\}$$

Die zweite Sphäre zum Studentenkonzept wird repräsentiert durch das Konzept $St \sqcup (Wi \sqcap \neg St')$ und enthält u.a. das problematische $\neg St'$. Das Ergebnis der sphärenbasierten Reinterpretation des Typs 1 bzgl. dieser Sphärenkollektion ist eine inkonsistente Ontologie.

$$O \odot_{1,\mathbb{S}} \alpha \equiv \{St \sqsubseteq \neg Wi, Wi(peter), St'(peter), St \sqsubseteq St', St' \sqsubseteq St \sqcup (Wi \sqcap \neg St')\}$$

7.3.2 Iterierbare sphärenbasierte Operatoren

Da Sphärenkollektionen $\mathbb{S}$ relativ zu einer Ontologie $\mathcal{O}$ definiert werden, ist eine Sphärenkollektion für $\mathcal{O}$ nicht zwingend eine Sphärenkollektion für die aus einer sphärenbasierten Ontologieintegration resultierende Ontologie mit der Menge der

Ontologieaxiome $O\odot_{i,\mathbb{S}}\alpha$. Die im vorherigen Abschnitt definierten Operatoren sind daher nicht iterierbar. Tatsächlich wird in den Definitionen 7.13 als Resultat der Ontologieintegration nur eine Menge von Axiomen $O\odot_{i,\mathbb{S}}\alpha$ spezifiziert und keine strukturierte Ontologie angegeben. Diese Lücke soll im Folgenden geschlossen werden. Um Iteration zu gewährleisten, ist es ausreichend, 1) festzusetzen, dass das interne und externe Vokabular der vorhergehenden Ontologie für die resultierende strukturierte Ontologie übernommen werden, und 2) darüber hinaus anzugeben, wie eine Sphärenkollektion zu der Menge der resultierenden Ontologieaxiome in $O\odot_{i,\mathbb{S}}\alpha$ aussehen könnte.

Damit die unveränderte Übernahme des internen und öffentlichen Vokabulars der Vorgängerontologie durchgeführt werden kann, greife ich (wie auch im Falle der globalen Reinterpretationsoperatoren) auf zwei Annahmen zurück, die die Reichhaltigkeit der Vokabulare der initialen Ontologie $\mathcal{O}^0 = \mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ betreffen.

1. Das öffentliche Vokabular $\mathcal{V}_c$ umfasst das Vokabular, in der die Trigger formuliert sind.

2. Das interne Vokabular $\mathcal{V}_i$ ist so reichhaltig, dass unendlich häufige Reinterpretationen möglich sind. Zu diesem Zwecke wird angenommen, dass für alle Konzeptsymbole $K \in \mathcal{V}_c$ unendlich viele verschiedene Symbole $K^1, K^2, K^3, \dots \in \mathcal{V}_i$ existieren und dass für alle $K, L \in \mathcal{V}_c$ aus $K \neq L$ folgt: $K^i \neq L^j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

Eine mögliche Basis zur Konstruktion der jeweils folgenden Sphärenkollektion ist die vorhergehende Sphärenkollektion. Ich werde eine sehr konservative Änderung der Sphärenkollektion vorstellen, unter der sich die Folgesphärenkollektion nur minimal von der Vorgängersphärenkollektion unterscheidet. Hierfür wird eine Änderung am Begriff des Sphärensystems vorgenommen. An Sphärensysteme wird eine zusätzliche Bedingung gestellt, die Peppas (2004) eingeführt hat. Mit dieser Bedingung kann garantiert werden, dass die für die Iteration nötige Festlegung der Folgesphärenkollektion tatsächlich eine Sphärenkollektion ist.

Es gibt zwei äquivalente Formulierungen dieser Bedingung, (SW) und (SV). Beide Bedingungen bilden jeweils eine stärkere Variante der vierten Bedingung an Sphärensysteme (Minimalität). Sei $\mathcal{S}$ ein Sphärensystem für eine Menge von möglichen Welten $\mathcal{W} \subseteq M_{\mathcal{O}}$.

(SW) $\mathcal{S}$ ist wohlgeordnet bzgl. $\subseteq$, d.h. jede nichtleere Menge von $\mathcal{S}$ hat ein Minimum bzgl. $\subseteq$.

(SV) Für jede nichtleere Menge $\mathcal{W}' \subseteq M_{\mathcal{O}}$ gibt es eine kleinste Sphäre in $\mathcal{S}$, so dass $\mathcal{S} \cap \mathcal{W}' \neq \emptyset$.

Die Bedingung (SV) fordert im Gegensatz zu der vierten Bedingung an Sphärensysteme für beliebige Mengen von möglichen Objekten $\mathcal{W}'$ und nicht nur durch Konzeptbeschreibungen D repräsentierbare Mengen von möglichen Welten $[D]^O$ die Existenz einer minimalen Sphäre, deren Schnitt mit $\mathcal{W}'$ nicht leer ist. Revisionsoperatoren, die über Sphärensysteme erklärt werden, welche die Bedingung (SV) (bzw. (SW)) erfüllen, bilden eine echte Unterklasse der auf gewöhnlichen Sphärensystemen basierenden Revisionsoperatoren. D.h., wenn ein Revisionsoperator $*$ auf einem Sphärensystem basiert, das nicht (SV) erfüllt, kann nicht garantiert werden, dass es ein Sphärensystem gibt, das (SV) erfüllt und denselben Revisionsoperator $*$ induziert (Peppas, 2004, Theorem 4.2). Revisionsoperatoren, die auf der Basis von Sphärensystemen erklärt werden, die (SV) (bzw. (SW)) erfüllen, nennt Peppas *gutartig* (im englischen Wortlaut „well behaved"). Entsprechend nenne ich eine Sphärenkollektionen, die nur aus wohlgeordneten Sphärensystemen besteht, *gutartig*.

Die Definitionen der Folgesphärenkollektion für Typ-1- und Typ-2-Operatoren sind verschieden. Ich beginne mit der Definition der Folgesphärenkollektion für Typ-1-Operatoren, für die ich die Beobachtungen 7.3 und 7.5 (S. 190) ausnutze. Es sei O die Menge der Axiome der initialen Ontologie und es bezeichne $O_{res} = O \odot_{1,\mathbb{S}} \alpha$ das Resultat der Integration bzgl. des Typ-1-Operators. Im Konsistenzfall ist $O_{res} = O \cup \{\alpha\}$, insbesondere $O \subseteq O_{res}$ und $(\mathcal{V}(O) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c = (\mathcal{V}(O_{res}) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c$. Daher folgt aus Beobachtung 7.3, dass $M_{O_{res}} \subseteq M_O$. Ein neues Sphärensystem $\mathbb{S}'(\hat{K})$ für $\hat{K}$ kann somit durch Schnittbildung mit $M_{O_{res}}$ aus dem alten Sphärensystem $\mathbb{S}(\hat{K})$ konstruiert werden (s. Gleichung (7.3)).

Im Inkonsistenzfall kann die Beobachtung 7.5 zur Definition der Folgesphärenkollektion benutzt werden. Abbildung 7.2 veranschaulicht die folgende Konstruktion der Folgesphärenkollektion für Typ-1-Operatoren im Inkonsistenzfall anhand eines Sphärensystems aus drei Sphären $S_1, S_2, M_{\mathcal{O}}$. Die in der Sphärenkollektion der ursprünglichen Ontologien definierten Sphärensysteme beziehen sich auf die Menge der möglichen Welten $M_{\mathcal{O}}$, die für das Vokabular $\mathcal{V}_1 = (\mathcal{V}(O) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c$ erklärt sind. Durch Erweiterung des Vokabulars auf $\mathcal{V}_2 = (\mathcal{V}(O_{res}) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c$ werden die möglichen Objekte bzgl. $\mathcal{O}$ vervielfacht zu der Menge $M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_2}$. Diese Vervielfachung wird durch die in Beobachtung 7.5 definierte Funktion $F = F_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2}$ mit $F(X) = \{Y \in M_{\mathcal{O}_{res},\mathcal{V}_2} \mid Y \supseteq X\}$ für $X \in M_{\mathcal{O}}$ vorgenommen. Da die Sphären aus möglichen Objekten $X \in M_{\mathcal{O}}$ bestehen, kann die Funktion F zur Überführung der Sphäre S in eine neue Sphäre $\bigcup F[S]$ bzgl. $M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_2}$ benutzt werden. Die Schnittbildung der Sphären $\bigcup F[S]$ mit $M_{\mathcal{O}_{res}}$ schließlich passt die Sphären auch auf die resultierende Ontologie $\mathcal{O}_{res}$ an, so dass die neue Sphäre $S' = \bigcup F[S] \cap M_{\mathcal{O}_{res}}$ resultiert (s. Gleichung (7.4)).

Definition 7.19. Seien $\mathcal{V}_1 = (\mathcal{V}(O) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c$, $\mathcal{V}_2 = (\mathcal{V}(O) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c \cup \{K'\}$ und $F = F_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2}$ mit $F(X) = \{Y \in M_{\mathcal{O}_{res},\mathcal{V}_2} \mid Y \supseteq X\}$ die gemäß Beobach-

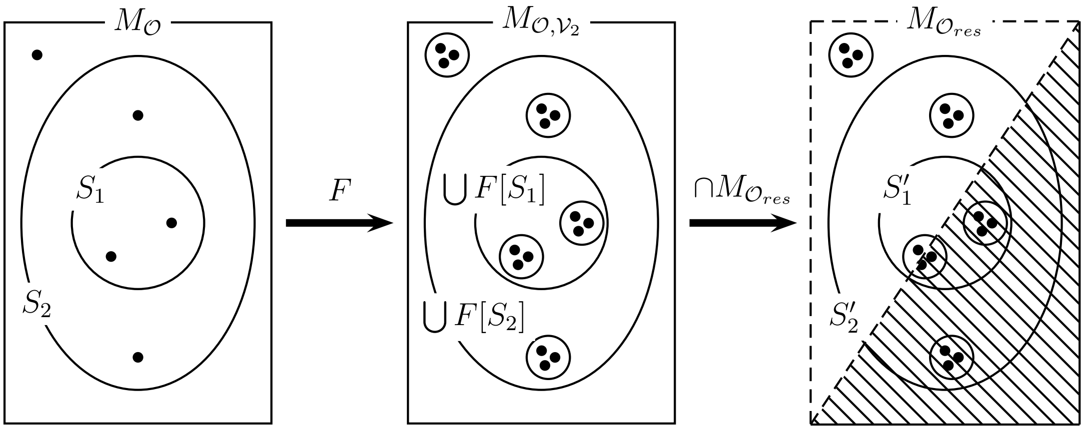


Abbildung 7.2: Veranschaulichung der Folgesphärenkollektion für Typ-1-Operatoren im Inkonsistenzfall

tung 7.5 definierte Funktion. Sei $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine Ontologie und $\alpha = \hat{K}(a)$ ein (konzeptbasiertes) Literal über $\mathcal{V}_c$; für die Konstante $a \in \mathcal{V}_c$ existiere das spezifischste Konzept $\mathrm{msc}_{O}(a)$. Es sei weiter $\mathbb{S}$ eine gutartige Sphärenkollektion bzgl. $\mathcal{O}$ für konzeptbasierte Literale über $\mathcal{V}_c$. Für Typ-1-Operatoren $\odot_{1,\mathbb{S}}$ wird die *Folgesphärenkollektion* $\mathbb{S}'$ *von* $O_{res} = O \odot_{1,\mathbb{S}} \alpha$ wie folgt festgelegt.

Falls $O \cup \{\alpha\}$ konsistent ist, wird für alle Konzeptliterale $\hat{L}$ mit $L \in \mathcal{V}_c$ das Folgesphärensystem $\mathbb{S}'(\hat{L})$ definiert durch

$$\mathbb{S}'(\hat{L}) = \{S \cap M_{\mathcal{O}_{res}} \mid S \in \mathbb{S}(\hat{L})\} \tag{7.3}$$

Falls $O \cup \{\alpha\}$ inkonsistent ist, wird für alle Konzeptliterale $\hat{L}$ mit $L \in \mathcal{V}_c$ das Folgesphärensystem $\mathbb{S}'(\hat{L})$ definiert durch

$$\mathbb{S}'(\hat{L}) = \{\bigcup F[S] \cap M_{\mathcal{O}_{res}} \mid S \in \mathbb{S}(\hat{L})\} \tag{7.4}$$

Es bleibt zu zeigen, dass das so definierte Mengensystem $\mathbb{S}'$ tatsächlich eine gutartige Sphärenkollektion ist.

Beobachtung 7.20. *Es bezeichne* $\mathbb{S}'$ *die gemäß Definition 7.19 festgelegte Menge. Dann ist* $\mathbb{S}'$ *eine gutartige Sphärenkollektion.*

Beweis. Siehe S. 292.

Für Typ-2-Operatoren kann im Konsistenzfall die Konstruktion des Typ-1-Operators übernommen werden. Im Inkonsistenzfall wird eine andere Konstruktion gebraucht, da Typ-2-Operatoren nicht die Monotonie erfüllen. Es bezeichne jetzt $O_{res} = O \odot_{2,\mathbb{S}} \alpha$ das Resultat der Integration des Triggers $\alpha = \hat{K}(a)$ gemäß dem sphärenbasierten Operator des Typs 2. In der Konstruktion der Folgesphärenkollektion für Typ-2-Operatoren im Inkonsistenzfall wird danach unterschieden, ob das Sphärensystem für ein Konzeptliteral $\hat{L}$ verschieden von oder identisch mit dem triggernden Konzeptliteral $\hat{K}$ ist.

Falls $\hat{L}$ nicht das triggernde Konzeptsymbol K enthält, wird der in Abbildung 7.2 veranschaulichten zweischrittigen Konstruktion ein weiterer Schritt vorgeschaltet, der die Vokabulardynamik in der ursprünglichen Ontologie berücksichtigt. Die beiden relevanten Vokabulare werden abkürzend bezeichnet mit $\mathcal{V}_1 = (\mathcal{V}(O_{[K/K']}) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c \setminus \{K\}$ und $\mathcal{V}_2 = (\mathcal{V}(O_{[K/K']}) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c$. Die Axiommenge $O_{[K/K']}$ wird der Ontologie $\mathcal{O}_{[K/K']} = \langle O_{[K/K']}, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ zugeordnet. Jede Sphäre S aus dem Sphärensystem $\mathbb{S}(\hat{L})$ der ursprünglichen Ontologie $\mathcal{O}$ wird durch die Substitution $[K/K']$ zu einer neuen Menge $S_{[K/K']}$. $S_{[K/K']}$ enthält mögliche Objekte über dem Vokabular $\mathcal{V}_1$, in dem K nicht mehr vorkommt. Daher ist $S_{[K/K']}$ keine Sphäre aus einer Sphärenkollektion zu der Ontologie $\mathcal{O}_{[K/K']}$, welche die Bildung der möglichen Objekte über dem Vokabular $\mathcal{V}_2$ erfordert. Abhilfe für dieses Problem schafft erneut die in Beobachtung 7.5 definierte Funktion $F = F_{\mathcal{O}_{[K/K']},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2}$. Dieser zweite Schritt der Konstruktion entspricht dem ersten Schritt der Konstruktion für den Typ-1-Operator. Das Bild von $S_{[K/K']}$ unter $\bigcup F_{\mathcal{O}_{[K/K]},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2}$ wird anschließend mit der Menge der möglichen Welten der resultierenden Ontologie geschnitten $\bigcup F[S_{[K/K']}] \cap M_{\mathcal{O}_{res}}$. Insgesamt lässt sich die dreischrittige Konstruktion durch die Abbildung dyn definieren.

$$\mathrm{dyn} : \mathrm{Pot}(M_{\mathcal{O}}) \longrightarrow \mathrm{Pot}(M_{\mathcal{O}_{res}}), \quad S \mapsto \mathrm{dyn}(S) = \bigcup F[S_{[K/K']}] \cap M_{\mathcal{O}_{res}}$$

Falls das Konzeptliteral $\hat{L}$, für das das Folgesphärensystem zu definieren ist, das triggernde Konzeptsymbol K enthält, ist eine andere Konstruktion nötig. Da im Typ-2-Operator K internalisiert wird, müssen Sphärensysteme für K und $\neg K$ neu definiert werden. Zur Erläuterung der Konstruktion betrachte ich den Fall, dass der Trigger α das positive konzeptbasierte Literal $K(a)$ ist. In diesem Fall ist das Resultat (s. Definition 7.13)

$$O_{res} = O_{K/K'} \cup \{K(a), K' \sqsubseteq K\} \cup \{K \sqsubseteq C \mid C \in (K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \mathrm{msc}_O(a))_{[K/K']}\}$$

Das neue Sphärensystem $\mathbb{S}'(\neg K)$ von $\neg K$ lässt sich aus dem alten Sphärensystem $\mathbb{S}(\neg K)$ konstruieren. Alle Sphären in $\mathbb{S}(\neg K)$ werden durch dyn (Substitution, Vervielfachung durch Funktion F, Schnittbildung mit $M_{\mathcal{O}_{res}}$) modifiziert, so dass ein neues Mengensystem $\mathrm{dyn}(\mathbb{S}(\neg K))$ entsteht. Die mit $\neg K$ kompatiblen möglichen Welten $[\neg K]^{\mathcal{O}_{res}}$ bzgl. $\mathcal{O}_{res}$ werden als kleinste Sphäre unter das Mengensystem $\mathrm{dyn}(\mathbb{S}(\neg K))$ gehängt, so dass das neue Sphärensystem $\mathbb{S}'(\neg K) = \{[K]^{\mathcal{O}_{res}}\} \cup \mathrm{dyn}(\mathbb{S}(\neg K))\}$ für $\neg K$ bzgl. der Ontologie $\mathcal{O}_{res}$ entsteht. Das „Darunterhängen“ ist möglich, da $\mathcal{O}_{res} \models \neg K' \sqsubseteq \neg K$ gilt.

Das neue Sphärensystem $\mathbb{S}'(K)$ für das positive Konzeptliteral K entsteht aus dem alten System $\mathbb{S}(K)$, indem $[K]^{\mathcal{O}_{res}}$ unter $\text{dyn}(K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \text{msc}_O(a))$ angehängt wird. Das ursprüngliche Sphärensystem von K wird folglich durch dyn modifiziert, alle Sphären, die eine Untermenge von $\text{dyn}(K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \text{msc}_O(a))$ bilden, gelöscht, $[K]^{\mathcal{O}_{res}}$ als kleinste Sphäre und $\text{dyn}(K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \text{msc}_O(a)))$ als zweitkleinste Sphäre deklariert.

Definition 7.21. Sei $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine Ontologie und $\alpha = \hat{K}(a)$ ein (konzeptbasiertes) Literal über $\mathcal{V}_c$; für die Konstante $a \in \mathcal{V}_c$ existiere das spezifischste Konzept $\text{msc}_O(a)$. Es seien $\mathcal{V}_1 = (\mathcal{V}(O_{[K/K']}) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c \setminus \{K\}$ und $\mathcal{V}_2 = (\mathcal{V}(O_{[K/K']}) \cap \mathcal{V}_i) \cup \mathcal{V}_c$ und $F = F_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2}$ mit $F(X) = \{Y \in M_{\mathcal{O}_{res},\mathcal{V}_2} \mid Y \supseteq X\}$ die gemäß Beobachtung 7.5 definierte Funktion. Es sei weiter $\mathbb{S}$ eine gutartige Sphärenkollektion bzgl. $\mathcal{O}$ für konzeptbasierte Literale über $\mathcal{V}_c$. Für Typ-2-Operatoren $\odot_{2,\mathbb{S}}$ wird die *Folgesphärenkollektion* $\mathbb{S}'$ *von* $O_{res} = O \odot_{1,\mathbb{S}} \alpha$ wie folgt festgelegt.

Falls $O \cup \{\alpha\}$ konsistent ist, wird für alle Konzeptliterale $\hat{L}$ mit $L \in \mathcal{V}_c$ das Folgesphärensystem $\mathbb{S}'(\hat{L})$ definiert durch

$$\mathbb{S}'(\hat{L}) = \{S \cap M_{\mathcal{O}_{res}} \mid S \in \mathbb{S}(\hat{L})\}$$

Falls $O \cup \{\alpha\}$ inkonsistent ist und $\hat{L} \in \text{KLit}(\mathcal{V}_c)$ mit $L \neq K$, wird festgesetzt

$$\mathbb{S}'(\hat{L}) = \{\text{dyn}(S) \mid S \in \mathbb{S}(\hat{L})\}.$$

Falls $O \cup \{\alpha\}$ inkonsistent ist und $L = K$, wird festgesetzt

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}'(\overline{\hat{K}}) &= \{[\overline{\hat{K}}]^{\mathcal{O}_{res}}\} \cup \{\text{dyn}(S) \mid S \in \mathbb{S}(\overline{\hat{K}})\} \\
\mathbb{S}'(\hat{K}) &= \{[\hat{K}]^{\mathcal{O}_{res}}\} \cup \{\text{dyn}(\hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\, \text{msc}_O(a))\} \cup \\
&\quad \{\text{dyn}(S) \mid S \in \mathbb{S}(\hat{K}) \text{ und } \text{dyn}(S) \supseteq \text{dyn}(\hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\, \text{msc}_O(a))\}
\end{aligned}$$

Die einzigen Sphärensysteme in der Folgesphärenkollektion $\mathbb{S}$, die gegenüber der Vorgängersphärenkollektion $\mathbb{S}$ auf der Konzeptbeschreibungsebene sichtbarer Weise verändert werden, sind die Sphärensysteme für die Konzeptliterale, die das Konzeptsymbol K des Triggers enthalten. Auch die für Typ-2-Operatoren definierte Folgesphärenkollektion ist gutartig.

Beobachtung 7.22. *Es sei* $\mathbb{S}'$ *das in Definition 7.21 festgelegte Mengensystem. Dann ist* $\mathbb{S}'$ *eine gutartige Sphärenkollektion.*

Aufgrund der unterschiedlichen Konstruktionen der Folgesphärenkollektionen sind Typ-1 und Typ-2-Operatoren nicht mehr strukturell äquivalent. Die Konstruktion der Folgesphärenkollektionen eignen sich dafür, die im Laufe der Integration einer Triggersequenz gewonnene Information zur Bildung einer zur Triggersequenz passenden Sphärenkollektion zu nutzen. Das folgende Beispiel demonstriert die Definitionen an einer strukturierten Ontologie, die mit einer trivialen Sphärenkollektion $\mathbb{S}_{triv} = \{\{[K]^{\mathcal{O}}, M_{\mathcal{O}}\}, \{[\neg K]^{\mathcal{O}}, M_{\mathcal{O}}\} \mid K \in \mathcal{V}_c\}$ initialisiert wird. Die duale Repräsentation von $\mathbb{S}_{triv}$ ist gegeben durch $\{\{K, \top\}, \{\neg K, \top\} \mid K \in \mathcal{V}_c\}$.

Beispiel 7.23. Die Ontologie und der Trigger seien wie in Beispiel 7.15 definiert (S. 198) und $O_{res} = O \odot_{2,\mathbb{S}} St(peter)$. Die triviale Sphärenkollektion hat die Form

$$\mathbb{S} = \{\{St, \top\}, \{\neg St, \top\}\{Uni, \top\}, \{\neg Uni, \top\}, \{Wi, \top\}, \{\neg Wi, \top\}\}$$

Nach der Revision mit dem sphärenbasierten Typ-2-Operator $\odot_{2,\mathbb{S}}$ ändern sich im Wesentlichen die Sphärenkollektionen für St und $\neg St$. Das Resultat der Revision und eine Repräsentation der Folgesphärenkollektion durch Konzeptbeschreibungen lauten:

$$\begin{aligned} O_{res} &= O_{[St/St']} \cup \{St(peter), St' \sqsubseteq St, St \sqsubseteq (St' \sqcup Wi)\} \\ \mathbb{S}' &= \{\{St, St \sqcup Wi, \top\}, \{\neg St, \neg St', \top\}\{Uni, \top\}, \{\neg Uni, \top\}, \\ &\quad \{Wi, \top\}, \{\neg Wi, \top\}\} \end{aligned}$$

Für die Definition der iterierten Anwendung von sphärenbasierten Operatoren hat sich die Wohlordnungseigenschaft als hilfreich erwiesen. In dem Fall, dass Iteration ausschließlich für strukturierte Ausgangsontologien betrachtet wird, deren Sphärenkollektion aus endlichen Sphärensystemen bestehen (wie z.B. die triviale Sphärenkollektion), ist die Wohlordnungseigenschaft für die Sphärenkollektionen von vornherein erfüllt, da dann die im Laufe der sequenziellen Integration erzeugten Sphärensysteme alle endlich sind.

Die oben gegebenen Definitionen der Folgesphärenkollektion für Typ-1- und Typ-2-Operatoren sind als ein Vorschlag zu verstehen, mit dem die sphärenbasierten Operatoren iterierbar gemacht werden können. Mit den Definitionen habe ich eine weitgehend konservative Strategie gewählt, die auf der Vorgängersphärenkollektion aufsetzt. Diese Strategie kann in ungünstigen Fällen dazu führen, dass die Folgesphärensysteme für die triggernden Konzeptliterale $\hat{K}$ auf triviale Sphärensysteme $\{\hat{K}, \top\}$ reduziert werden und damit die initiale Sphärenkollektion verloren geht.

Tatsächlich reicht die in Definition 7.21 gegebene Konstruktion der Folgesphärenkollektion nicht aus, Stabilität für sphärenbasierte Operatoren des Typs 2 zu erzielen. Mit dem gleichen Gegenbeispiel zur Instabilität von starken Operatoren wie in Theorem 6.28 (S. 184) lässt sich die Instabilität der sphärenbasierten Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 zeigen.

Theorem 7.24. *Die sphärenbasierten Reinterpretationsoperatoren des Typs 2, $\odot_{2,\mathbb{S}}$, sind nicht stabil.*

8 Abschluss und Ausblick

Die Integration von Information aus verschiedenen (heterogenen) Wissensquellen soll in einer neuen Wissensbasis resultieren, die konsistent ist. Daher ist für eine adäquate Integration die Behandlung von Konflikten zwischen den zu integrierenden Wissensquellen nötig. In dieser Arbeit wurde auf den speziellen Fall fokussiert, dass die Wissensquellen gut entwickelte Ontologien für dieselbe Domäne sind, deren Terminologien verwandt sind, und dass mögliche Konflikte zwischen diesen durch die Ambiguität in der öffentlichen Sprache erklärt werden können. In dieser Arbeit wurde ein formales Modell entwickelt, aus dem Operatoren für die adäquate Integration zweier Ontologien mit verwandten Terminologien resultieren (Kapitel 3). Als wesentliche Bestandteile der Modellierung haben sich das Konzept der Reinterpretation von nichtlogischen Symbolen und das aus der Belief-Revision stammende Konzept der Konfliktauflösung erwiesen.

Dem Ansatz der Belief-Revision folgend wurden die Reinterpretationsoperatoren zunächst durch Postulate spezifiziert (Abschnitt 3.1), die im beschriebenen Integrationsszenario ein adäquates Verhalten festlegen sollen. Während einige der in der klassischen Belief-Revision geltenden Postulate auch für das Integrationsszenario übernommen werden konnten, mussten andere Postulate (wie z.B. das Postulat zur Konsistenz) angepasst und weitere Postulate (wie z.B. die Postulate zur Konservierung und Rekonstruierbarkeit) neu definiert werden. Die in den Postulaten explizierte Forderung, beide Ontologien in ihrer ursprünglichen Form im Integrationsresultat zu konservieren, kann bei gleichzeitiger Forderung nach der Konsistenz des Integrationsresultats nicht durch einen einzelnen Operator erfüllt werden. Aus diesem Grunde bietet sich für jede Sorte (schwach, stark) von

Reinterpretationsoperatoren die Definition jeweils zweier verschiedener Typen an, Typ-1- und Typ-2-Operatoren. Typ-1-Operatoren realisieren eine konservative Integration, in der an der Terminologie der Empfängerontologie festgehalten wird. Diese Konservativität der Typ-1-Operatoren führt jedoch zu einer Gedächtnislosigkeit bzgl. Konflikten; wird ein Teil der Senderontologie bzw. die gesamte Menge an Axiomen der Senderontologie ein weiteres Mal mit dem Typ-1-Operator integriert, sind dieselben Konflikte erneut zu behandeln. Für Integrationsszenarien, in denen hinter der verschickten Information verschiedene Ontologien stehen, die eventuell miteinander inkompatibel sind, kann sich die konservative Strategie der Typ-1-Operatoren als hilfreich erweisen. Für Integrationsszenarien, in denen gesichert ist, dass die Information von genau einer Senderontologie stammt, eignen sich eher die Typ-2-Operatoren, da sie zu einer Adaption an die Terminologie der Senderontologie führen. Die Adaption durch die Typ-2-Operatoren (für triggernde Literale) ist jedoch minimal in dem Sinne, dass nur für solche Konflikte eine Adaption erfolgt, die echt in einem Konflikt involviert sind (Proposition 3.17).

Typ-1- und Typ-2-Operatoren erfüllen jeweils die beiden Klassen von Postulaten, die in Abschnitt 3.1 als Adäquatheitskriterien für die Integration zweier gut entwickelter Ontologien mit verwandten Terminologien beschrieben wurden (Beobachtungen 3.13, 3.28) und sind damit als geeignete Kandidaten für die Integration zweier Ontologien zu verstehen. Das wesentliche Unterscheidungsmerkmal der in dieser Arbeit entwickelten Reinterpretationsoperatoren zu verwandten Ansätzen (Delgrande und Schaub, 2003; Qi et al., 2006; Goeb et al., 2007) ist die Konservierung bzw. Rekonstruierbarkeit beider Ontologien im bzw. aus dem Integrationsresultat – beides Eigenschaften, die Operatoren in dem intendierten Integrationsszenario erfüllen sollten.

Die Konstruktion aller Reinterpretationsoperatoren basiert auf der Entkopplung der Ontologien gefolgt von der konsistenten Kopplung der Konzepte (Rollen und Individuen) durch semantische Beziehungen in Form von Brückenaxiomen. Reinterpretationsoperatoren treffen hierzu automatisch Hypothesen über die semantischen Beziehungen, die allein durch die Heuristik geleitet sind, dass die Terminologien verwandt sind. Abhängig von der Filterungsmethode, mit der die Hypothesen zur Erfüllung der Konsistenzbedingung ausgedünnt werden, können verschieden starke Reinterpretationsoperatoren definiert werden. Die Ausdünnung der Hypothesenmenge erfolgt durch Mechanismen, wie sie auch für die Partial-Meet-Revision von AGM benutzt wird. Wie in Abschnitt 4.2 gezeigt wurde, ist die Beziehung der Reinterpretationsoperatoren zur Revision noch stärker; Reinterpretationsoperatoren lassen sich explizit als Operatoren definieren, mit denen eine Ausgangsmenge an Hypothesen revidiert wird (Propositionen 4.15, 4.17). Auch wenn die Objekte der Integration Ontologien sind, sind Hypothesen über semantische Beziehungen Gestand der Revision. Dass diese Darstellbarkeit nicht auf eine idiosynkratische Definition der Reinterpretationsoperatoren zurückzuführen ist, wurde u.a. dadurch gezeigt, dass die Operatoren von Delgrande und Schaub (2003), die auch Reinterpretation nutzen, ebenfalls als Revisionsoperatoren für Brückenaxiome dargestellt werden können (Proposition 4.20).

Da Reinterpretationsoperatoren aufgrund der Entkopplung der Ontologien zu einer Erweiterung des Vokabulars um interne Symbole führen, können Reinterpretationsoperatoren im engeren Sinne nicht als Belief-Revisionsfunktionen für zwei Ontologien verstanden werden. Beschreibt man jedoch nur die Wirkung der Reinterpretationsoperatoren auf den öffentlichen Anteil der Ontologien, lassen sich die so eingeschränkten Reinterpretationsoperatoren wie Revisionsoperatoren behandeln und durch klassische Revisionspostulate spezifizieren. Für schwache Reinterpretationsoperatoren, die auf endlichen, aussagenlogischen Wissensbasen operieren, lassen sich die eingeschränkten Operatoren eindeutig als Funktionen über endlichen Repräsentationen der öffentlichen Anteile der Wissensbasen definieren (Beobachtung 4.2). Für starke Reinterpretationsoperatoren lässt sich keine vergleichbare Aussage treffen, da die internen Symbole auch Auswirkungen auf den öffentlichen Teil des Integrationsresultats haben.

Nicht für alle endlichen prädikatenlogischen Wissensbasen über einem internen und öffentlichen Vokabular ist eine Repräsentation der öffentlichen Sätze, die aus der Wissensbasis folgen, durch eine endliche Menge von Sätzen der öffentlichen Sprache möglich. Daher ist selbst für schwache Reinterpretationsoperatoren keine endliche Darstellung des auf die öffentliche Sprache eingeschränkten Reinterpretationsoperators möglich. Für Beschreibungslogiken kann für eine Wissensbasis nicht einmal eine Darstellung des öffentlichen Anteils durch eine beliebige (endliche oder unendliche) Menge von Sätzen in der öffentlichen Sprache garantiert werden. Aus diesen Beobachtungen folgt, dass die internen Symbole (im Fall der Prädikaten- und Beschreibungslogik) eine wichtige Rolle für die (endliche) Repräsentierbarkeit der Wissensbasen haben. Daher sollten die internen Symbole im Integrationsresultat konserviert werden und nicht wie im Falle der aussagenlogischen Revisionsoperatoren von Delgrande und Schaub (2003) aus dem Resultat gestrichen werden. Aus diesem Grunde ist die Methode, den auf die öffentliche Sprache eingeschränkten Anteil eines Reinterpretationsoperators zu untersuchen, nur eingeschränkt nützlich bzw. nutzbar.

Die in Abschnitt 3.1 beschriebenen (zwei Klassen von) Postulate(n) bilden nur eine Menge von notwendigen Kriterien für die Integration zweier Ontologien, jedoch keine hinreichenden Kriterien; insbesondere können mit ihnen Reinterpretationsoperatoren nicht von simplen Entkopplungsoperatoren unterschieden werden. Hierfür sind weitere Postulate wie die in Kapitel 5 entwickelte Reinterpretationsrelevanz (ReintRel) nötig, mit denen die Eigenschaft der Reinterpretationsoperatoren, nur für Konflikte relevante Anteile der Empfängerontologie aus dem Integrationsresultat zu streichen, expliziert werden. (ReintRel) beschreibt einen minimalen Verlust von Axiomen der Empfängerontologie. Wie sich gezeigt hat, erfüllen die simplen Entkopplungsoperatoren im Allgemeinen nicht die Reinterpretationsrelevanz; die schwachen Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien hingegen erfüllen das Postulat (ReintRel) (Theorem 5.19).

Das Postulat (ReintRel) hat die in der Belief-Revision oft genannte Eigenschaft einer Black-Box-Spezifikation, da sie nur auf die Ontologien und nicht auf die Konstruktion der Reinterpretationsoperatoren (insbesondere die Hypothesen) zurückgreift. Das Postulat (ReintRel) ist insofern untypisch mit Blick auf die Postulate der klassischen Belief-Revision, als es für die Beschreibung der Relevanzbedingungen auf die Prädikatenlogik zurückgreift und damit eventuell über die Logik, in der die Ontologien formuliert sind (z.B. eine Beschreibungslogik), hinausgeht.

Der Unterschied zwischen starken und schwachen Reinterpretationsoperatoren ist nicht nur anhand ihrer unterschiedlichen Definitionen beschreibbar, sondern wird auch auf Postulatsebene reflektiert. Das hierzu eingeführte erweiterte Inklusionspostulat gibt eine obere Schranke für das Integrationsresultat: Es fordert, dass den Ausgangsontologien nur eine solche Menge an Axiomen hinzugefügt werden darf, die durch die Ausgangsontologien festgelegt wird. Wie gezeigt wurde, erfüllen die schwachen Reinterpretationsoperatoren diese Form der Minimalität (Proposition 5.29), die starken Reinterpretationsoperatoren im Allgemeinen jedoch nicht. Die erweiterten Inklusionspostulate realisieren eine sehr starke Form von Minimalität, deren Plausibilität in dieser Arbeit nicht diskutiert wurde. Die erweiterten Inklusionspostulate sind als formales Mittel zu verstehen, die schwachen von den starken Reinterpretationsoperatoren zu unterscheiden. Operatoren, die die erweiterten Inklusionspostulate nicht erfüllen, dürfen nicht als ungeeignete Operatoren angesehen werden. Da die starken Reinterpretationsoperatoren stärkere Hypothesen über die semantischen Beziehungen der disambiguierten Konzepte und Rollen treffen als die korrespondierenden schwachen Reinterpretationsoperatoren, führen sie auch zu neuen Axiomen, die nicht durch die konsistente Kombination der Axiome in den Ausgangsontologien erschlossen werden kann.

Die Reinterpretationsrelevanz und die erweiterten Inklusionspostulate spezifizieren eine globale Form von minimaler Änderung der Empfängerontologie, für die im Wesentlichen der Verlust bzw. die Hinzunahme von (neuen) Axiomen ausschlaggebend ist. Eine lokale Form von minimaler Änderung lässt sich mittels des Sphärenansatzes beschreiben (Kapitel 7). In diesem erweiterten Setting ist die Empfängerontologie mit einer zusätzlichen Struktur, einer Sphärenkollektion, ausgestattet. Konflikte zwischen einem triggernden Literal und der Empfängerontologie werden – wie bei allen Reinterpretationsoperatoren auch – auf die Ambiguität von nichtlogischen Symbolen zurückgeführt. Der entscheidende Unterschied ist, dass die Auswahl der Brückenaxiome für das disambiguierte Konzeptsymbol durch die Sphären bestimmt wird; dabei wird das Konzept des ambigen Symbols in der Empfängerontologie lokal gemäß dem zugehörigen Sphärensystem soweit abgeschwächt, bis eine konsistente Ontologie resultiert. Als Grenzfall enthalten die sphärenbasierten Reinterpretationsoperatoren die starken Reinterpretationsoperatoren für triggernde Literale und erfüllen den Basissatz an Postulaten für Reinterpretationsoperatoren (Proposition 7.17).

Anhand des Sphärenansatzes zeigt sich, dass Reinterpretation auch auf strukturierte Ontologien anwendbar ist. Die in Form einer Sphärenkollektion hinzugefügte Struktur für eine Ontologie ist allerdings lokal, da sie nur lokal die Konzepte in einer Ontologie und nicht die Ontologie selber strukturiert. Qi und Kollegen (Qi et al., 2006) betrachten Revisionsoperatoren für geschichtete Wissensbasen, bei denen die Schichten durch eine Präferenzrelation geordnet sind. Eine natürliche globale Schichtung bietet sich auch für das Resultat von Reinterpretationsoperatoren an: Auf oberster (mit höchster Präferenz) werden die entkoppelten Ontologien positioniert; auf einer niedrigeren Schicht werden die Brückenaxiome angeordnet, da sie als Hypothesen eingeführt wurden, die in nächsten Schritten verworfen werden können.

In dem für diese Arbeit relevanten Integrationsszenario wurde die Integration einer Senderontologie in die Empfängerontologie beschrieben. Diese Integration kann einschrittig, durch einmalige Integration der gesamten Menge der Axiome aus der Senderontologie, oder alternativ sequenziell durch schrittweise Integration von einzelnen Teilmengen der Axiome erfolgen. In diesem alternativen Fall ist die iterierte Anwendbarkeit der Reinterpretationsoperatoren – wie in dieser Arbeit geschehen – zu garantieren und sind zusätzliche Postulate zu entwickeln, die ein adäquates Resultat garantieren. In der Literatur zur Belief-Revision bilden die Iterationspostulate von Darwiche und Pearl (1994) den Ausgangspunkt für eine eingehende Untersuchung iterierter Revision. Nach Anpassung der Postulate an die Reinterpretation zeigt sich, dass es im Kontext des Integrationsszenarios, das in dieser Arbeit vorausgesetzt wird, keine guten Gründe gibt, an den ersten beiden Postulate (Reint-DP 1) und (Reint-DP 2) festzuhalten. Tatsächlich erfüllen auch die Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien diese Postulate nicht. Reinterpretationsoperatoren für triggernde konzeptbasierte Literale erfüllen (Reint-DP 1); das ist allerdings auf die geringe Komplexität des Triggers zurückzuführen (siehe Tabelle 6.1).

Obwohl die adaptieren Postulate (Reint-DP 3) und (Reint-DP 4) von Darwiche und Pearl auch für die Integrationsoperatoren im hier zu Grunde gelegten Integrationsszenario wünschenswerte Eigenschaften festzulegen scheinen, zeigen die konstruierten Beispiele, dass (Reint-DP 3) und (Reint-DP 4) nicht zu der Grundidee der uniformen Reinterpretation passen, die für die Konservierung und Rekonstruierbarkeit der Ontologien nötig ist. Dass die Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 für triggernde Ontologien (Reint-DP 3) und (Reint-DP 4) im Allgemeinen nicht erfüllen, ist zum einen darauf zurückzuführen, dass sie eine uniforme Reinterpretation realisieren. Zum anderen ist jedoch festzustellen, dass sie das Integrationsresultat völlig unabhängig von der Reinterpretationshistorie bestimmen. Zwar speichern die Reinterpretationsoperatoren im Integrationsresultat mittels Substitutionsvarianten verschiedene Versionen der Ontologien aus verschiedenen Phasen der Integration und machen sie über mehrere Schritte hinweg zugänglich (Proposition 6.6); doch lassen die Reinterpretationsoperatoren die Substitutionsvarianten der Ontologien für die iterierte Reinterpretation im Wesentlichen ungenutzt. Durch Zeitmarker für die neuen internen Symbole könnten zusätzliche Strategien und Reinterpretationsoperatoren entwickelt werden; steht etwa eine neue Reinterpretation an, bei der eine Konfliktauflösung durch die Reinterpretation genau eines Symbols s_1 oder s_2 möglich ist, könnten die Zeitmarker der internen Symbole, die bei vorherigen Reinterpretationen von s_1 und s_2 eingeführt wurden, bei der Entscheidung für die Reinterpretation des einen oder anderen Symbols benutzt werden.

Unter manchen Umständen kann für einen (Revisions-)Operator gezeigt werden, dass die iterierte Anwendung auf eine Folge von Sätzen durch die Revision mit einer Teilmenge der Folge darstellbar ist (Kumulierungsbedingung) und umgekehrt die Revision mit einer Menge von Sätzen durch die iterierte Anwendung auf eine Folge über dieser Menge simuliert werden kann (Sequenzialisierungsbedingung). Eine derart starke Aussage (weder in der einen noch in der anderen Richtung) gilt für Reinterpretationsoperatoren im Allgemeinen nicht. Nur im Falle der Reinterpretationsoperatoren des Typs 1 für triggernde konzeptbasierte Literale lässt sich eine Kumulierungsaussage beweisen (Beobachtung 6.9). Es ist jedoch möglich, schwächere Aussagen über die Beziehung von iterierter und einschrittiger Reinterpretation zu zeigen, indem nachgewiesen wird, dass Reinterpretationsoperatoren unter bestimmten Voraussetzungen an die Selektionsfunktionen die Postulate (Reint-MRev 7) und (Reint-MRev 8) erfüllen (Beobachtung 6.8).

Neben den klassischen Iterationspostulaten wurde zur Auswertung der Reinterpretationsoperatoren auch die in der Belief-Revision eher selten benutzte Eigenschaft der Stabilität in Betracht gezogen. Während für Typ-1-Operatoren Stabilität von vornherein ausgeschlossen werden kann, stellt sich die Sachlage für Typ-2-Operatoren komplizierter dar. Für schwache Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 (für triggernde konzeptbasierte Literale) kann Stabilität bewiesen werden, sofern die Triggerfolge auf einer konsistenten Menge von Literalen basiert, deren implizite Annahmen über die Nichtidentitäten der Konstanten (implizite UNA) mit der Ausgangsontologie kompatibel ist (Theorem 6.21). Der Stabilität der schwachen Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 steht allerdings die Tatsache gegenüber, dass das Integrationsresultat eventuell keine Bezüge mehr zu den Konzepten der Empfängerontologie enthält: Infolge der Adaption an die Senderterminologie kann ein in Konflikten involviertes Konzeptsymbol K im Integrationsresultat keinen Bezug mehr zum ursprünglichen K-Konzept des Empfängers aufweisen (Theorem 6.27). Die starken Reinterpretationsoperatoren des Typs 2 (für triggernde Literale) postulieren zwar stärkere Beziehungen zwischen den disambiguierten Konzepten, können dafür aber Stabilität nicht garantieren, wie das Gegenbeispiel von Theorem 6.28 zeigt. Diese Fakten scheinen eine bekannte Diskrepanz zwischen stabilem und nichtamnestischem Verhalten (für Revisionsfunktionen) zu bestätigen, auf die bereits in den Arbeiten von Kelly (Kelly, 1998b,a) hingewiesen wird.

A Mathematische und logische Grundlagen

Dieser Anhang versammelt alle mathematischen und formallogischen Terme, Konzepte und Ergebnisse, die ich in der Entwicklung meines formalen Ansatzes zur reinterpretationsbasierten semantischen Integration verwende.

Abschnitt A.1 beschreibt die nötigen Grundbegriffe der Mengenlehre. Abschnitt A.2 führt Grundbegriffe der Aussagenlogik, der Prädikatenlogik und der für die Wissensrepräsentation wichtigen Beschreibungslogiken ein. Insbesondere wird hier der für den Reinterpretationsansatz relevante Begriff der Substitution aufgegriffen. In Abschnitt A.3 wird der Begriff eines Folgerungsoperators expliziert, und es werden verschiedene Eigenschaften, die in der Belief-Revision für diesen angenommen werden, formuliert. Der für den Reinterpretationsansatz wichtige Begriff der (dualen) Restmenge, der auf einem Folgerungsoperator basiert, wird ebenfalls hier beschrieben und für die Definition der Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien in Abschnitt 3.3 benutzt.

A.1 Mengen, Relationen und Funktionen

Mengen können Elemente enthalten. Zum Beispiel enthält die Menge $\{1, 2, 3\}$ genau die Elemente $1, 2, 3$. Dass die Zahl 2 in der Menge $\{1, 2, 3\}$ enthalten ist, wird durch die Elementbeziehung $\in$ ausgedrückt: $2 \in \{1, 2, 3\}$. Mengen sind extensional bzgl. $\in$, d.h. die Identität einer Menge ist eindeutig durch die Menge der in ihr enthaltenen Elemente bestimmt. Statt durch eine explizite Auflistung der Elemente kann eine Menge auch intensional durch die Angabe einer Eigenschaft

P, die die Elemente der Menge erfüllen müssen, definiert werden; z.B. bezeichnet $\{x \in X \mid P(x)\}$ diejenige Menge aller in X enthaltenen Elemente, die die Eigenschaft P haben. In dieser Arbeit benutze ich die üblichen mengentheoretischen Operationen. Für zwei Mengen X, Y sei $X \cup Y = \{z \mid z \in X$ oder $z \in Y\}$ die *Vereinigung* von X, Y, $X \cap Y = \{z \mid z \in X$ und $z \in Y\}$ der *Schnitt* von X, Y und $X \setminus Y = \{z \in X \mid z \notin Y\}$ das *relative Komplement* von X bzgl. Y. $X \mathbin{\Delta} Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ ist die *symmetrische Differenz* von X und Y. Die *leere Menge* $\emptyset$ ist die eindeutig bestimmte Menge ohne Elemente. Zwei Mengen X, Y heißen *disjunkt*, wenn sie kein gemeinsames Element enthalten, $X \cap Y = \emptyset$. $Z = X \uplus Y$ wird als Abkürzung für $Z = X \cup Y$ und $X \cap Y = \emptyset$ benutzt. In diesem Fall bilden X, Y eine *Partition* von Z. X ist eine *Teilmenge* von Y, kurz $X \subseteq Y$, genau dann, wenn alle Elemente aus X in Y enthalten sind. X ist eine *echte Teilmenge* von Y, kurz $X \subset Y$, genau dann, wenn $X \subseteq Y$ aber nicht $Y \subseteq X$. Die *Potenzmenge* $\mathrm{Pot}(X)$ einer Menge X ist die Menge aller Teilmengen von X, $\mathrm{Pot}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$. Das *kartesische Produkt* $X \times Y$ zweier Mengen ist die Menge aller Paare $\langle x, y\rangle$ mit erstem Element aus X und zweitem Element y aus Y: $X \times Y = \{\langle x, y\rangle \mid x \in X, y \in Y\}$.

Eine n-stellige *Relation* R ist eine Teilmenge eines n-fachen kartesischen Produktes von n Mengen: $R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$. Ist $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in R$, dann wird diese Beziehung auch als $R(x_1, \ldots, x_n)$ notiert. Sind alle X_i gleich der Menge X, so wird R eine n-stellige Relation über dem Grundbereich X genannt. Folgende Eigenschaften einer 2-stelligen Relation R über dem Grundbereich X werden häufig verwendet:

- R ist genau dann *reflexiv*, wenn für alle $x \in X$ gilt: $R(x, x)$.
- R ist genau dann *symmetrisch*, wenn für alle $x, y \in X$ gilt: Wenn $R(x, y)$, dann $R(y, x)$.
- R ist genau dann *antisymmetrisch*, wenn für alle $x, y \in X$ gilt: Wenn $R(x, y)$ und $R(y, x)$, dann $x = y$.
- R ist genau dann *transitiv*, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt: Wenn $R(x, y)$ und $R(y, z)$, dann auch $R(x, z)$.
- R ist genau dann eine *Äquivalenzrelation*, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- R ist genau dann eine *partielle Ordnung*, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Eine Äquivalenzrelation R über X induziert eine Partition von X. Ist R eine Äquivalenzrelation, so bezeichnet $[x]_R = \{y \in X \mid R(x, y)\}$ die zu x zugehörige *Äquivalenzklasse*. Die Menge der Äquivalenzklassen bildet eine Partition von X.

Sei Y eine Teilmenge von X, für die eine partielle Ordnung R gegeben ist. $p \in X$ ist eine *obere Schranke* von Y, falls für alle $q \in Y$ gilt $R(q,p)$. Ein Element $p \in X$ ist die *kleinste obere Schranke* (oder das *Supremum*) von Y, falls p eine obere Schranke von Y ist und für alle oberen Schranken q von Y gilt $R(p,q)$. Entsprechend werden die Begriffe der *unteren Schranke* und der *größten unteren Schranke* (*Infimum*) definiert.

Eine Menge X mit einer partiellen Ordnung R ist ein *Verband* genau dann, wenn für je zwei Elemente aus X das Supremum und das Infimum existieren.

Funktionen $f : X \longrightarrow Y$, $x \mapsto f(x)$ sind Objekte, die einen *Definitionsbereich (Domäne)* $\mathrm{dom}(f) = X$, einen *Bildbereich (Kodomäne)* $\mathrm{codom}(f) = Y$ und eine *Funktionsvorschrift* besitzen, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet, kurz $x \mapsto f(x)$. Für $Z \subseteq X$ bezeichnet $f[Z] = \{f(x) \mid x \in Z\}$ das Bild von Z unter f. Falls der Definitionsbereich einer Funktion ein n-faches kartesisches Produkt $X^n = X \times \cdots \times X$ von X mit sich ist, wird f eine *n-stellige Funktion* genannt. Zur Andeutung der Stelligkeit benutzte ich auch eine Klammer-Punkt-Notation. Ist f z.B. eine einstellige Funktion, wird sie auch mit $f(\cdot)$ bezeichnet, ist sie eine zweistellige Funktion, schreibe ich $f(\cdot,\cdot)$. Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ ist *injektiv* genau dann, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ aus $x_1 \neq x_2$ auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt. Die Funktion f ist *surjektiv* genau dann, wenn es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt, so dass $f(x) = y$. Schließlich heißt f *bijektiv* genau dann, wenn f injektiv und surjektiv ist. Die *Identitätsfunktion* id_X mit Domäne und Kodomäne X bildet alle Elemente auf sich ab: $id(x) = x$ für alle $x \in X$.

Eine Menge X ist *endlich*, wenn jede injektive Abbildung von X in sich auch bijektiv ist, ansonsten ist sie *unendlich*. Für endliche Mengen X bezeichnet $|X|$ die Anzahl der in ihr enthaltenen Elemente. $\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$.

Das Beweisprinzip der Induktion über $\mathbb{N}$, auf das ich häufiger zurückgreife, nutzt die Darstellbarkeit der natürlichen Zahlen als Nachfolgerzahlen (Peano-arithmetik). Um zu zeigen, dass eine Eigenschaft P von allen natürlichen Zahlen $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ erfüllt wird, wird im Induktionsanfang (Induktionsbasis) gezeigt, dass n_0 die Eigenschaft P hat. In der Induktionsannahme (Induktionsvoraussetzung) wird angenommen, dass P bereits für ein beliebiges (aber fest gewähltes) n gezeigt ist. Im Induktionsschritt schließlich wird zeigt, dass mit der Induktionsannahme auch gefolgert werden kann, dass $n + 1$ die Eigenschaft P erfüllt.

Eine *endliche Folge* $A = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ der Länge n mit Elementen x_i aus X kann als ein Element des n-fachen kartesischen Produkts von X mit sich selbst, X^n, definiert werden. *Unendliche Folgen* $A = \langle x_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ mit Elementen aus X können definiert werden als Funktionen $f_A : \mathbb{N} \longrightarrow X$. $\tilde{A}$ bezeichnet die Menge aller in der Folge A vorkommenden Elemente. Falls A eine endliche Folge der Länge n ist und $i \leq n$ gilt oder falls A eine unendliche Folge ist, bezeichnet A^i das *Präfix* der Länge i von A.

A.2 Logiken

Zur Beschreibung einer Logik sind prinzipiell vier Teilaufgaben anzugehen: Festlegung der Syntax (Beschreibung von wohlgeformten Zeichenfolgen über einem Vokabular), Festlegung der Semantik (Auswertungsprinzipien für wohlgeformte Zeichenfolgen), Festlegung von semantischen Kategorien (Definition von Tautologien, Folgerungsbeziehung etc.) und die Entwicklung von Beweisverfahren (Kalküle).

In dieser Arbeit werden die Aussagen- und Prädikatenlogik sowie Beschreibungslogiken verwendet. Die für diese Arbeit relevanten Elemente aus den vier Ebenen werden im Folgenden für die genannten Logiken dargestellt. Bei der Darstellung wird ein besonderes Augenmerk auf die Rolle des nichtlogischen Vokabulars (s.u.) geworfen, da der Vokabularbegriff für den in meiner Arbeit entwickelten Ansatz eine zentrale Rolle hat.

A.2.1 Syntax

In der ersten grundlegenden Ebene einer Logik werden (verschiedene) Sorten von syntaktisch wohlgeformten Zeichenketten beschrieben. Das für die Syntaxdefinition notwendige Konzept ist das eines *Vokabulars*; ein Vokabular ist eine endliche oder unendliche Menge von Symbolen. Werden für die nichtlogischen Symbole zusätzlich Stelligkeiten angegeben (s.u.), so spricht man statt von einem Vokabular auch von der *Signatur*.

Es wird im Allgemeinen zwischen einem *logischen Vokabular*, einem *nichtlogischen Vokabular* und dem Vokabular an Hilfssymbolen unterschieden. Unter den Hilfssymbolen werden Zeichen wie Klammern oder Kommata verstanden, die der Strukturierung von Formeln oder Formelmengen dienen. Ich werde diese Menge im Folgenden nicht explizit kennzeichnen. Die Symbole des logischen Vokabulars werden als themenneutrale Symbole definiert. Sie erhalten in der Semantikspezifikation für eine Logik eine feste Bedeutung. Auch dieses Vokabular wird in den folgenden Definitionen von wohlgeformten Zeichenketten nicht explizit herausgestellt. Mit nichtlogischen Symbolen können inhaltliche, nichtlogische sprachliche Elemente wie etwa das Prädikat „ist ein Junge“ formalisiert werden. Wie üblich wird in den Definitionen der wohlgeformten Zeichenketten bei der Referenz auf ein nichtlogisches Vokabular $\mathcal{V}$ die zusätzliche Kennzeichnung „nichtlogisch“ weggelassen und stattdessen direkt vom Vokabular $\mathcal{V}$ gesprochen.

Eine doppelte Rolle im Vokabular nehmen Variablen ein, da sie sowohl gebunden als frei vorkommen können. Als freie Variablen werden sie wie Konstanten ausgewertet. Als gebundene Variable haben sie keine eigenständige Denotation.

Die (verschiedenen Sorten von) wohlgeformten Zeichenketten einer Logik können jeweils induktiv definiert werden. Ist eine wohlgeformte Zeichenkette (Formel, Term, Konzept- oder Rollenbeschreibung (s.u.)) α über einem Vokabular $\mathcal{V}$ definiert worden, so bezeichnet $\mathcal{V}(\alpha)$ die *Menge aller in α vorkommenden nichtlogischen Symbole aus $\mathcal{V}$*. Für eine Menge X von wohlgeformten Zeichenketten über $\mathcal{V}$ wird $\mathcal{V}(X) = \bigcup\{\mathcal{V}(\alpha) \mid \alpha \in X\}$ definiert.

Syntax für AL

Für die *klassische Aussagenlogik* (kurz AL) wird (nur) eine Sorte von wohlgeformten Zeichenketten definiert, die Menge von Sätzen oder Formeln $\mathrm{Satz}_{\mathrm{AL}}(\mathcal{V})$ über dem nichtlogischen Vokabular $\mathcal{V}$.[1] Das nichtlogische Vokabular einer Aussagenlogik enthält *Aussagensymbole*, die in dieser Arbeit mit p, q, r und indizierten Varianten bezeichnet werden.

Definition A.1. Die Menge der *aussagenlogischen Formeln* oder *aussagenlogischen Sätze* $\mathrm{Satz}_{\mathrm{AL}}(\mathcal{V})$ zu einem aussagenlogischen Vokabular $\mathcal{V}$ wird induktiv definiert durch:

1. Jedes Aussagensymbol in $\mathcal{V}$ ist eine Formel. Ebenfalls sind die logischen Konstanten $\bot$ sowie $\top$ Formeln. Sie werden *atomare Formeln* genannt.

2. Sind α und β Formeln, so auch $\neg\alpha$ (*Negation* von α), $(\alpha \wedge \beta)$ (*Konjunktion* von α und β), $(\alpha \vee \beta)$ (*Disjunktion* von α und β), $(\alpha \rightarrow \beta)$ (*α impliziert β*) und $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ (*α biimpliziert β*).

3. Nur die gemäß 1. und 2. definierten Zeichenketten sind aussagenlogische Formeln.

Die Menge der atomaren Formeln oder negiert atomaren Formeln wird auch die Menge der *aussagenlogischen Literale* genannt.

Um auf (aussagenlogische, prädikatenlogische oder beschreibungslogische) Formeln referieren zu können, benutze ich kleine griechische Buchstaben als Metavariablen. Für spezielle Unterklassen von Formeln (wie z.B. Literale oder Klauseln) benutze ich eventuell andere Metavariablen.

Einer gängigen *Klammerersparnisregel* folgend werden äußere Klammern hier wie auch in den anderen Logiken weggelassen, also z.B. statt $(p \wedge (q \vee r))$ einfacher $p \wedge (q \vee r)$ geschrieben. Gemäß einer weiteren Klammerersparnisregel wird z.B. $p_1 \vee p_2 \vee p_3$ als Kurzfassung von $((p_1 \vee p_2) \vee p_3)$ verstanden. Entsprechendes gilt für $\wedge$. Diese Regel gestattet auch eine kompaktere Darstellung von Zeichenketten, die nur Disjunktionen bzw. nur Konjunktionen enthalten. Nach dieser Regel steht $\bigvee_{1 \leq i \leq n} p_i$ für $(\ldots(p_1 \vee p_2) \vee p_3) \cdots \vee p_n)$ und $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} p_i$ für $(\ldots(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3) \cdots \wedge p_n)$.

[1] Wenn aus dem Kontext eindeutig hervorgeht, aus welcher Logik die Zeichenketten stammen, wird der Index auch weggelassen.

Falls $n = 1$ ist, wird $\bigvee_{1\leq i\leq 1} p_i = \bigwedge_{1\leq i\leq 1} p_i = p_1$ gesetzt; und falls $n = 0$ ist, wird $\bigvee_{1\leq i\leq 0} p_i = \bot$ und $\bigwedge_{1\leq i\leq 0} p_i = \top$ gesetzt.

Syntax für PL

Die *Prädikatenlogik (erster Stufe)* (kurz PL) und die *Beschreibungslogiken* (engl. description logics, kurz DLs) erweitern die Ausdrucksmächtigkeit der Aussagenlogik, indem sie bereits für die Syntax ein feineres Vokabular voraussetzen, mit dem sich subsentenzielle grammatische Elemente darstellen lassen. Die in der Prädikatenlogik verwendete Menge von nichtlogischen Symbolen setzt sich aus den folgenden paarweise disjunkten Mengen zusammen:

- $\mathcal{V}_{AS}$: Menge von Aussagensymbolen, bezeichnet durch p, q, r, s und indizierte Varianten.
- $\mathcal{V}_{Konst}$: Menge der Konstanten, bezeichnet durch a, b, c, d, e sowie indizierte Varianten;
- $\mathcal{V}_{Pr}$: Menge der Prädikatsymbole, bezeichnet durch P, Q, R und indizierte Varianten;
- $\mathcal{V}_{Funkt}$: Menge der Funktionssymbole, bezeichnet durch f, g, h und indizierte Varianten.

Jedem Prädikat- und Funktionssymbol wird eine Stelligkeit zugeordnet und zuweilen durch ein Superskript vermerkt. P^2 bezeichnet damit ein 2-stelliges Prädikatsymbol.[2]

Neben diesen nichtlogischen Symbolen wird für die Definition von wohlgeformten Zeichenketten in der Prädikatenlogik eine Menge von Variablen vorausgesetzt, $\mathcal{V}_{Var}$, die wegen ihrer Sonderrolle nicht in der obigen Liste von nichtlogischen Vokabularen aufgeführt wurde. Variablen werden durch x, y, z und indizierte Varianten bezeichnet.

In der Prädikatenlogik werden zwei verschiedene Sorten von wohlgeformten Zeichenketten definiert, *Terme* und *prädikatenlogische Formeln.*

Definition A.2. Die Menge von *Termen* über einem prädikatenlogischen Vokabular $\mathcal{V}$ ist rekursiv definiert durch:

1. Jede Variable und jede Konstante ist ein Term.

[2] In vielen Lehrbüchern werden auch nullstellige Prädikatsymbole und nullstellige Funktionssymbole gestattet. Dabei werden nullstellige Prädikatsymbole (syntaktisch und semantisch) wie Aussagensymbole behandelt und nullstellige Funktionssymbole (syntaktisch und semantisch) wie Konstanten. Ich folge nicht dieser Konvention und gestatte daher nur Prädikat- und Funktionssymbole mit einer Stelligkeit verschieden von 0.

2. Ist $f^n \in \mathcal{V}_{Funkt}$ ein n-stelliges Funktionssymbol und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, so ist auch $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

3. Nur die gemäß 1. und 2. definierten Zeichenketten sind Terme.

Terme ohne Variablen heißen *Grundterme*.

Definition A.3. Die Menge der *(wohlgeformten) Formeln* über einem prädikatenlogischen Vokabular $\mathcal{V}$ ist definiert durch:

1. Alle Aussagensymbole sind Formeln.

2. Für Terme $t_1, \ldots, t_n$ über $\mathcal{V}$ und n-stellige Prädikatsymbole $P \in \mathcal{V}$ ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel. Die Menge der gemäß 1. und 2. gebildeten Formeln werden *atomare Formeln* genannt.

3. Ist α eine Formel, so auch $\neg\alpha$.

4. Sind α, β Formeln, so auch $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ und $(\alpha \leftrightarrow \beta)$.

5. Ist x eine Variable und α eine Formel, so sind auch $\exists x\alpha$ und $\forall x\alpha$ Formeln. $\exists$ ist ein *Existenzquantor*, $\forall$ wird *Allquantor* genannt. Die *Matrix* einer Formel ist diejenige Formel, die durch Streichen aller Quantoren und der unmittelbar dahinter stehenden Variablen entsteht.

6. Nur die gemäß 1. – 5. definierten Zeichenketten sind prädikatenlogische Formeln.

In der *Prädikatenlogik mit Identität* wird als logisches 2-stelliges Prädikatsymbol noch die Identität $\doteq$ zugelassen. Für die Darstellung von prädikatenlogischen Formeln mit $\doteq$ wird die Infixnotation benutzt; statt $\doteq (t_1, t_2)$ für Terme t_1, t_2 wird $t_1 \doteq t_2$ geschrieben.

Für AL- und PL-Formeln wird der Begriff einer Teilformel wie folgt erklärt: β ist eine *Teilformel* einer Formel α, kurz $\beta \in \text{Teil}(\alpha)$, wenn β eine Formel ist und in α vorkommt. Genauer lässt sich induktiv definieren:

1. $\text{Teil}(\alpha) = \{\alpha\}$, falls α ein Aussagensymbol ist.

2. $\text{Teil}(\alpha * \beta) = \{(\alpha * \beta)\} \cup \text{Teil}(\alpha) \cup \text{Teil}(\beta)$ für $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

3. Zusätzlich gilt für prädikatenlogische Formeln:

   (a) $\text{Teil}(P^n(t_1, \ldots, t_n)) = \{P^n(t_1, \ldots, t_n)\}$

   (b) $\text{Teil}(\exists x\alpha) = \{\exists x\alpha\} \cup \text{Teil}(\alpha)$

(c) $\text{Teil}(\forall x\alpha) = \{\forall x\alpha\} \cup \text{Teil}(\alpha)$

Ein Variablenvorkommen x ist *gebunden* in der PL-Formel α, wenn sie in einer Teilformel von α der Form $\exists x\beta$ oder $\forall x\beta$ vorkommt. Andernfalls heißt das Vorkommen von x in α *frei*. Eine Formel, in der alle Variablen gebunden sind, heißt *geschlossen*. Eine Formel heißt *bereinigt*, wenn keine Variable sowohl frei als auch gebunden vorkommt und außerdem hinter allen Quantoren verschiedene Variablen vorkommen. Die Menge der geschlossenen Formeln über einem prädikatenlogischen Vokabular $\mathcal{V}$ wird auch die Menge der *Sätze* über $\mathcal{V}$ genannt und mit $\text{Satz}_{\text{PL}}(\mathcal{V})$ abgekürzt. Die Menge aller atomaren Formeln (*positives Literal*) oder negiert atomaren Formeln (*negatives Literal*) wird die Menge der *prädikatenlogischen Literale* genannt. $\overline{li}$ bezeichnet das *komplementäre Literal* zu li: Falls li ein positives Literal ist, ist $\overline{li} = \neg li$. Falls $li = \neg li'$ ein negatives Literal ist, ist $\overline{li} = li'$.

Syntax für DLs

Beschreibungslogiken[3] sind (in den meisten Fällen) entscheidbare Logiken, die sich äquivalent in Fragmente der Prädikatenlogik übersetzen lassen. Aufgrund ihrer hinreichend starken Ausdrucksmächtigkeit bei gleichzeitiger Entscheidbarkeit sind Beschreibungslogiken ein geeigneter Formalismus für die Repräsentation von Ontologien (Baader et al., 2005). Beschreibungslogiken lassen sich syntaktisch als Fragmente der Prädikatenlogik definieren; dabei wird das nichtlogische Vokabular auf Konstanten und einstellige und zweistellige Prädikatsymbole (auch Konzept- und Rollensymbole genannt) eingeschränkt und die Menge der prädikatenlogischen Formeln durch restriktivere Kombinationsregeln eingeschränkt. In der Literatur wird jedoch meist eine variablenfreie Darstellung benutzt, der ich in dieser Arbeit folge; das nichtlogische Vokabular wird entsprechend dem ersten Vorgehen eingeschränkt, doch werden keine Variablen gestattet. Stattdessen werden logische Konstruktoren eingeführt, mit denen Konzeptsymbole (einstellige Prädikatsymbolen) und Rollensymbole (zweistellige Prädikatsymbole) zu komplexen Konzept- und Rollenbeschreibungen verknüpft werden können.

Nichtlogische Vokabulare von Beschreibungslogiken lassen sich als Teilmengen von nichtlogischen Vokabularen aus der Prädikatenlogik definieren, die wie folgt in disjunkte Teilvokabulare aufgeteilt sind:

- $\mathcal{V}_{Konst}$: Menge der Konstanten, bezeichnet durch a, b, c, d, e sowie indizierte Varianten;

[3]Vgl. das Handbuch von Baader und Kollegen (Baader et al., 2003) und hierin insbesondere die Übersicht von Baader (2003).

- $\mathcal{V}_{Konz}$: eine Menge von Konzeptsymbolen, bezeichnet durch K, L und indizierte Varianten; diese entsprechen einstelligen Prädikatsymbolen aus $\mathcal{V}_{\mathrm{Pr}^1}$ im Teilvokabular $\mathcal{V}_{Pr}$ für die Prädikatenlogik;
- $\mathcal{V}_{Roll}$: Menge von Rollensymbolen, bezeichnet durch R sowie indizierte Varianten; diese entsprechen zweistelligen Prädikatsymbolen aus $\mathcal{V}_{Pr^2}$ im Teilvokabular $\mathcal{V}_{Pr}$ für die Prädikatenlogik.

In Beschreibungslogiken werden im Allgemeinen vier verschiedene Kategorien von wohlgeformten Zeichenketten unterschieden. Zur ersten Kategorie werden die Konstanten (oder allgemeiner Terme) $\mathcal{V}_{Konst}$ gezählt. Zur zweiten Kategorie von wohlgeformten Zeichenketten ($\mathrm{Konz}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$) werden die Konzeptbeschreibungen gezählt; wohlgeformte Zeichenketten, die semantisch in der Dimension Wahr-Falsch ausgewertet werden (Sätze), gehören zur dritten Kategorie. Unter diesen wird zwischen TBox-Axiomen und ABox-Axiomen unterschieden. Zur vierten Kategorie ($\mathrm{Roll}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$) zählen die Rollensymbole – bzw. allgemeiner Rollenbeschreibungen, sofern die Beschreibungslogik Rollenkonstruktoren zur Verfügung stellt.

Definition A.4. Die Menge der *$\mathcal{AL}$-Konzeptbeschreibungen* $\mathrm{Konz}_{\mathcal{AL}}(\mathcal{V})$ über einem beschreibungslogischen Vokabular $\mathcal{V}$ ist induktiv wie folgt definiert.

1. Für alle Konzeptsymbole $K \in \mathcal{V}_{Konz}$ gilt $K \in \mathrm{Konz}_{\mathcal{AL}}(\mathcal{V})$. Ebenfalls sind die Konzeptkonstante $\top$ (für das universelle Konzept) und die Konzeptkonstante $\bot$ (für das leere Konzept) in $\mathrm{Konz}_{\mathcal{AL}}(\mathcal{V})$ enthalten.
2. Ist $C, D \in \mathrm{Konz}_{\mathcal{AL}}(\mathcal{V})$, $R \in \mathcal{V}_{Roll}$ und $K \in \mathcal{V}_{Konz}$, so gilt auch
   (a) $\neg K \in \mathrm{Konz}_{\mathcal{AL}}(\mathcal{V})$ (Atomare Konzeptnegation)
   (b) $(C \sqcap D) \in \mathrm{Konz}_{\mathcal{AL}}(\mathcal{V})$ (Konzeptkonjunktion)
   (c) $\forall R.C \in \mathrm{Konz}_{\mathcal{AL}}(\mathcal{V})$ (Werterestriktion)
   (d) $\exists R.\top \in \mathrm{Konz}_{\mathcal{AL}}(\mathcal{V})$ (Beschränkte exist. Quantifikation)

Die Menge der *Konzeptliterale* $\mathrm{KLit}(\mathcal{V})$ über einem beschreibungslogischen Vokabular $\mathcal{V}$ besteht aus Konzeptbeschreibungen der Form K oder $\neg K$, wobei $K \in \mathcal{V}_{\mathrm{Konz}}$ ein Konzeptsymbol ist. $\hat{K}$ wird in der Arbeit als Metavariable für die beiden Konzeptliterale, die K enthalten, benutzt. Das Komplement eines Konzeptliterals $\hat{K}$ wird mit $\overline{\hat{K}}$ bezeichnet und ist definiert durch $\overline{K} = \neg K$ und $\overline{\neg K} = K$.

Durch die Wahl neuer Konstruktoren und anderer Kombinationsmöglichkeiten lassen sich weitere Beschreibungslogiken definieren. Tabelle A.1 enthält eine Auflistung aller Konstruktoren und ihrer Semantik (für eine Erläuterung der Semantik s.u.), die in dieser Arbeit entweder für Definitionen von Operatoren oder in Beispielen verwendet werden. Beschreibungslogiken der $\mathcal{AL}$-Familie werden einer

Namenskonvention folgend durch Abkürzungen beschrieben, die ausgehend von $\mathcal{AL}$ zusätzliche Buchstaben anhängt, um die zu $\mathcal{AL}$ hinzukommenden Konzept- und Rollenkonstruktoren zu kennzeichnen.[4]

Obwohl in der Literatur eher selten beschrieben, ist auch die formale Bildung von generalisierten Konzeptkonjunktionen und -disjunktionen über beliebigen Mengen von Konzeptbeschreibungen M definierbar. Ist $M \subseteq \mathrm{Konz}(\mathcal{V})$ eine Menge von Konzeptbeschreibungen, so sind $\bigsqcap M$ und $\bigsqcup M$ ebenfalls Konzeptbeschreibungen. Derartige generalisierte Konzeptkonstruktoren verwende ich allerdings nur zur Auswertung von Reinterpretationsoperatoren und nicht für die Repräsentation von Ontologien.

[4] Vgl. Baader und Nutt (2003).

Name (engl.)	Syntax	Semantik	Kürzel
Universelles Konzept (top concept)	$\top$	$\Delta^{\mathcal{I}}$	$\mathcal{AL}$
Leeres Konzept (bottom concept)	$\bot$	$\emptyset$	$\mathcal{AL}$
Konz.-Konjunktion (intersection)	$C \sqcap D$	$C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$	$\mathcal{AL}$
Konz.-Disjunktion (union)	$C \sqcup D$	$C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$	$\mathcal{U}$
Atomare Negation (atomic negation)	$\neg K$	$\Delta^{\mathcal{I}} \setminus K^{\mathcal{I}}$	$\mathcal{AL}$
Allgemeine Negation (general negation)	$\neg C$	$\Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$	$\mathcal{C}$
Werterestriktion (value restriction)	$\forall R.C$	$\{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}}\} \subseteq C^{\mathcal{I}}\}$	$\mathcal{AL}$
Beschr. exist. Quant. (limited exist. quant.)	$\exists R.\top$	$\{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}}\} \neq \emptyset\}$	$\mathcal{AL}$
Exist. Quant. (exist. quant.)	$\exists R.C$	$\{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \{^{y}\in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}}, y \in C^{\mathcal{I}}\} \neq \emptyset\}$	$\mathcal{E}$
Unspezif. Anzahlrestr. (unqual. number restr.)	$\leq n\, R$	$\{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \lvert\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}}\}\rvert \leq n\}$	$\mathcal{N}$
Unspezif. Anzahlrestr. (unqual. number restr.)	$\geq n\, R$	$\{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \lvert\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}}\}\rvert \geq n\}$	$\mathcal{N}$
Nominalia (nominals)	$\{a\}$	$\{a^{\mathcal{I}}\}$	$\mathcal{O}$

Tabelle A.1: Syntax und Semantik für die Beschreibungslogik $\mathcal{ALUENCO}$

Die Menge der *beschreibungslogischen Formeln* $\text{Satz}_{\text{DL}}(\mathcal{V})$ zu einem beschreibungslogischen Vokabular $\mathcal{V}$ in einer beliebigen Beschreibungslogik DL wird in zwei Mengen eingeteilt: in die Menge der *TBox-Axiome*, welche für die Repräsentation von terminologischem Wissen verwendet werden, und in die Menge der *ABox-Axiome*, welche zur Beschreibung von Weltwissen (kontingente Fakten) verwendet werden.

Definition A.5. Sei DL eine Beschreibungslogik und $\mathcal{V}$ ein beschreibungslogisches Vokabular. Die Menge der *beschreibungslogischen Formeln* $\text{Satz}_{\text{DL}}(\mathcal{V})$ besteht aus TBox-Axiomen und ABox-Axiomen über $\mathcal{V}$.

1. TBox-Axiom
   (a) Für $C, D \in \text{Konz}_{\text{DL}}(\mathcal{V})$ ist $C \sqsubseteq D$ ein TBox-Axiom. Solche TBox-Axiome werden *generelle Konzeptinklusionen* genannt (general concept inclusions (GCI)). Ich verwende auch die Bezeichnung *Subsumptionsaxiom, Subsumptionsbeziehung* oder kurz *Subsumption*.
   (b) Für $C, D \in \text{Konz}_{\text{DL}}(\mathcal{V})$ ist $C \doteq D$ ein TBox-Axiom. Solche TBox-Axiome werden *Konzeptäquivalenzen* genannt.
   (c) Für $R_1, R_2 \in \text{Roll}_{\text{DL}}(\mathcal{V})$ ist $R_1 \sqsubseteq R_2$ ein TBox-Axiom. Diese Axiome nenne ich *Rolleninklusionen* oder *Rollensubsumption*. Eine Menge von Rolleninklusionen wird *Rollenhierarchie* genannt.
   (d) Für $R_1, R_2 \in \text{Roll}_{\text{DL}}(\mathcal{V})$ ist $R_1 \doteq R_2$ ein TBox-Axiom. Diese Axiome nenne ich *Rollenäquivalenzen*.
2. ABox-Axiom
   (a) Für $C \in \text{Konz}_{\text{DL}}(\mathcal{V})$ und $a \in \mathcal{V}_{Konst}$ ist $C(a)$ ein ABox-Axiom. ABox-Axiome der Form $K(a)$ (für ein Konzeptsymbol $K \in \mathcal{V}_{Konz}$) werden *konzeptbasierte positive Literale*, ABox-Axiome der Form $\neg K(a)$ werden *konzeptbasierte negative Literale* genannt. Die Vereinigung beider Mengen ist die Menge aller *konzeptbasierten Literale*.[5]
   (b) Für $R \in \text{Roll}_{\text{DL}}(\mathcal{V})$ und $a, b \in \mathcal{V}_{Konst}$ ist $R(a, b)$ ein ABox-Axiom.

Für die Definition der Reinterpretationsoperatoren in Kapitel 3 wird die Beschreibungslogik $\mathcal{ALU}$ zusammen mit Rollenhierarchien und Identitäten für Konstanten (s.u.) verwendet. $\mathcal{ALU}$ erweitert $\mathcal{AL}$ um den Konstruktor $\sqcup$ für die Vereinigung von Konzepten. In den Beispielen und Resultaten werden auch andere

[5]Syntaktisch sind konzeptbasierte Literale keine Literale im Sinne der Prädikatenlogik, da das Negationssymbol in Beschreibungslogiken als Konzeptkonstruktor und nicht als Satzkonstruktor verwendet wird. Aufgrund der Darstellbarkeit von Beschreibungslogiken als Fragmente der Prädikatenlogik (s.u.) ist jedoch ein konzeptbasiertes Literal $(\neg K)(a)$ mit Konzeptnegation $\neg$ semantisch gleichwertig zu einem prädikatenlogischen Literal $\neg K(a)$ mit Satznegation $\neg$.

Beschreibungslogiken benutzt, die zusätzlich die allgemeine Negation (resultierend in der zu $\mathcal{ALU}$ äquivalenten Beschreibungslogik $\mathcal{ALC}$), die existentielle Quantifikation, Anzahlrestriktionen und Nominalia erlauben.

Syntax für kombinierte Logik DPL

Die Auswertung von Reinterpretationsoperatoren, die auf einer Beschreibungslogik DL basieren, erfolgt in einer logischen Sprache, die Aussagen-, Prädikaten- und Beschreibungslogik kombiniert. Die Menge der hierfür gebildeten Formeln nenne ich DPL-Formeln (description predicate logic).[6]

Definition A.6. Gegeben sei eine Menge von beschreibungslogischen Formeln $\mathrm{Satz}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$ über einem beschreibungslogischen Vokabular $\mathcal{V}$. Die Menge der DPL-Formeln für DL und $\mathcal{V}$, kurz $\mathrm{DPL}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$, ist wie folgt definiert:

1. $\mathrm{Satz}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{DPL}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$
2. Für alle $a, b \in \mathcal{V}_{Konst}$ sind $a \doteq b$ und $a \not\doteq b$ in $\mathrm{DPL}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$.
   (Mit den Ungleichheitsbeziehungen werden unique name assumptions (UNA) analysiert und beschrieben (s.u.).)
3. Für $\alpha, \beta \in \mathrm{DPL}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$ sind auch $\neg\alpha, (\alpha * \beta)$ in $\mathrm{DPL}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$, wobei $*$ ein aussagenlogischer Junktor ist.[7]

A.2.2 Substitutionen

Ein für die technische Umsetzung des Reinterpretationsansatzes wesentliches technisches Mittel ist das Konzept der Substitution. Gegeben sei ein nichtlogisches Vokabular $\mathcal{V}$ in einer Logik (Aussagenlogik, Prädikatenlogik oder Beschreibungslogik). Jede wohlgeformte Zeichenkette bzgl. einer Logik, insbesondere die nichtlogischen Symbolen aus $\mathcal{V}$, gehören einer Kategorie an. In der Aussagenlogik werden die Aussagensymbole der Kategorie der aussagenlogischen Formeln zugeordnet. In der Prädikatenlogik werden die Aussagensymbole der Kategorie der prädikatenlogischen Formeln zugeordnet. Die Konstanten (und auch Variablen) gehören der Kategorie der Terme an. Funktions- und Prädikatsymbole gehören der eigenen Kategorie (von Prädikat- und Funktionssymbolen) an. In Beschreibungslogiken wird dem Teilvokabular der Konstanten dieses Teilvokabular selbst als Kategorie zugeordnet. Die Konzeptsymbole gehören der Kategorie der Konzeptbeschreibungen, die Rollensymbole der Kategorie der Rollenbeschreibungen an. *Substitutionen*

[6] Da die Prädikatenlogik die Aussagenlogik AL umfasst, wird in der Bezeichnung der kombinierten Logik AL nicht genannt.

[7] Da die Konzeptnegation semantisch mit dem aussagenlogischen Junktor der Negation verwandt ist (s.u.), werden sie in dieser Arbeit nicht unterschieden.

sind Funktionen, die nichtlogische Symbole einer Logik auf wohlgeformte Zeichenketten der gleichen Kategorie abbilden.

Definition A.7. Sei $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \cdots \uplus \mathcal{V}_n$ ein nichtlogisches Vokabular mit den Teilvokabularen $\mathcal{V}_i$ mit Kategorien $X_i \supseteq \mathcal{V}_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist jede Funktion $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow X_1 \cup \cdots \cup X_n$ eine Substitution, falls für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $\sigma[\mathcal{V}_i] \subseteq X_i$.

Ist z.B. die Beschreibungslogik $\mathcal{AL}$ vorgegeben und enthält die Menge der nichtlogischen Symbole die Menge der Konzeptsymbole K_1, K_2, K_3 und die Menge der Rollensymbole R_1, R_2, so ist σ mit $\sigma(K_1) = K_1 \sqcap \neg K_2$, $\sigma(K_2) = K_3$, $\sigma(R_1) = R_2$, $\sigma(R_2) = R_2$ und $\sigma(s) = s$ für alle anderen nichtlogischen Symbole aus $\mathcal{V}$ eine Substitution. Substitutionen können in üblicher Weise auf uniforme Substitutionen über wohlgeformten Zeichenketten der Logik erweitert werden. Ist z.B. eine Substitution σ für Konzeptsymbole in einer Beschreibungslogik gegeben, so beschreibt $\sigma(C) = C\sigma$ ein Konzept, das aus C entsteht, indem alle Konzeptsymbole K in C uniform durch $\sigma(K)$ ersetzt werden. Entsprechend lässt sich der Begriff auf Axiome erweitern. Für eine Menge von wohlgeformten Zeichenketten X bezeichnet $X\sigma = \sigma(X) = \{x\sigma \mid x \in X\}$ eine *Substitutionsvariante* von X.

Die Menge aller Symbole s mit $\sigma(s) \neq s$ wird der *Träger von* σ genannt und durch $\mathrm{supp}(\sigma)$ denotiert. In einer abkürzenden Schreibweise für Substitutionen werden lediglich die Funktionswerte für die Elemente des Trägers angegeben. Z.B. bezeichnet $[K_1/K_2, K_2/K_3]$ diejenige Substitution mit Träger $\{K_1, K_2\}$, die K_1 durch K_2 und K_2 durch K_3 ersetzt.

Zur Auflösung von Ambiguitätskonflikten werden in dieser Arbeit Unterklassen von Substitutionen verwendet, die Mengen $\mathrm{AR}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$. Gegeben seien disjunkte Vokabulare $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$, $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \emptyset$, die den Kategorien $X \supseteq \mathcal{V}$ und $X' \supseteq \mathcal{V}'$ an wohlgeformten Zeichenketten zugeordnet sind. Die Menge der *Substitutionen zur Ambiguitätsauflösung*, kurz $\mathrm{AR}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$, ist die Menge aller injektiven Substitutionen $\sigma : (\mathcal{V} \cup \mathcal{V}') \longrightarrow (X \cup X')$, die jedes Symbol $s \in \mathcal{V}$ entweder auf sich oder auf ein Symbol aus $\mathcal{V}'$ abbilden und alle Symbole $s \in \mathcal{V}'$ auf sich selbst abbilden.

Für Reinterpretationsoperatoren wird eine Funktion höherer Ordnung (Disambiguierungsschema) Φ vorausgesetzt, die Substitutionen aus $\mathrm{AR}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ auswählt.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ear}(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \quad = \quad & \{\Phi \in \mathrm{Pot}(\mathcal{V}) \times \mathrm{Pot}(\mathcal{V}') \longrightarrow \mathrm{AR}(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \mid \Phi \text{ ist eine Funktion,} \\ & \text{so dass für alle } \langle S, S' \rangle \subseteq \mathrm{Pot}(\mathcal{V}) \times \mathrm{Pot}(\mathcal{V}') \text{ gilt:} \\ & \text{Ist } \sigma = \Phi(S, S'), \text{ dann}\, \mathrm{supp}(\sigma) = S \text{ und } \sigma[\mathcal{V}] \cap S' = \emptyset\}\end{aligned}$$

Das Resolutionsverfahren, welches unten dargestellt wird, beruht auf der Benutzung von allgemeinsten Unifikatoren.

Definition A.8. (Schöning, 2000, S. 89) Eine Substitution σ ist *Unifikator* einer endlichen Menge von Literalen $M = \{li_1, \ldots, li_n\}$, falls $li_1\sigma = \cdots = li_n\sigma$ gilt.

In diesem Falle heißt M auch *unifizierbar* und alle $li_1, \ldots, li_n$ sind *miteinander unifizierbar*. Eine Substitution σ ist ein *allgemeinster Unifikator* von M, falls alle Unifikatoren σ' von M aus σ durch Komposition mit einer Substitution ρ erzeugt werden können, d.h. falls es ρ mit $\sigma\rho = \sigma'$ gibt.

Proposition A.9. *(Robinson, (Schöning, 2000, S. 90)) Jede unifizierbare Menge von Literalen besitzt einen allgemeinsten Unifikator.*

A.2.3 Semantik: Interpretationen

In der Semantik werden Auswertungsprinzipien für die in der Syntax definierten wohlgeformten Zeichenketten beschrieben. Basis für die Semantik in den hier betrachteten Logiken ist eine Interpretationsfunktion $\mathcal{I} \in \mathrm{Int}(\mathcal{V})$ für ein nichtlogisches Vokabular $\mathcal{V}$.

Interpretationen für AL

Die Semantik von aussagenlogischen Formeln wird durch aussagenlogische Wahrheitswertbelegungen $\mathcal{I} \in \mathrm{Int}(\mathcal{V}_{\mathrm{AL}})$ für das Vokabular $\mathcal{V}_{\mathrm{AL}}$ von aussagenlogischen Symbolen bestimmt. In der zweiwertigen Logik, die in dieser Arbeit zu Grunde gelegt wird, werden zwei Wahrheitswerte, 1 (Wahr) und 0 (Falsch), benutzt. Eine *Wahrheitswertbelegung* $\mathcal{I} : \mathcal{V}_{\mathrm{AL}} \longrightarrow \{1, 0\}$ ist eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathcal{V}_{\mathrm{AL}}$ und Bildbereich $\{1, 0\}$. Statt $\mathcal{I}(p)$ wird auch die Notation $p^{\mathcal{I}}$ benutzt. Für eine Interpretation $\mathcal{I}$ und einen Wahrheitswert $b \in \{1, 0\}$ bezeichnet $\mathcal{I}_{[p \mapsto b]}$ eine *p-Variante* von $\mathcal{I}$. Sie ist definiert durch $p^{\mathcal{I}_{[p \mapsto b]}} = b$ und $q^{\mathcal{I}_{[p \mapsto b]}} = q^{\mathcal{I}}$ für alle Aussagensymbole $q \neq p$. Eine Wahrheitswertbelegung lässt sich zu einer Funktion $\dot{\mathcal{I}}$ über der Menge aller Sätze über $\mathcal{V}_{\mathrm{AL}}$ erweitern.

Definition A.10. Seien $\alpha, \beta \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_{\mathrm{AL}})$. Die erweiterte Interpretationsfunktion $\dot{\mathcal{I}} : \mathrm{Satz}_{\mathrm{AL}}(\mathcal{V}_{\mathrm{AL}}) \longrightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert.

1. $\bot^{\dot{\mathcal{I}}} = 0$; $\top^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$.
2. $\alpha^{\dot{\mathcal{I}}} = \alpha^{\mathcal{I}}$, falls α eine atomare Formel ist.
3. $(\neg\alpha)^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$, falls $\alpha^{\dot{\mathcal{I}}} = 0$, sonst $(\neg\alpha)^{\dot{\mathcal{I}}} = 0$.
4. $(\alpha \wedge \beta)^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$, falls $\alpha^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$ und $\beta^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$, sonst $(\alpha \wedge \beta)^{\dot{\mathcal{I}}} = 0$.
5. $(\alpha \vee \beta)^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$, falls $\alpha^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$ oder $\beta^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$, sonst $(\alpha \vee \beta)^{\dot{\mathcal{I}}} = 0$.
6. $(\alpha \rightarrow \beta)^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$, falls $\alpha^{\dot{\mathcal{I}}} = 0$ oder $\beta^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$, sonst $(\alpha \rightarrow \beta)^{\dot{\mathcal{I}}} = 0$.
7. $(\alpha \leftrightarrow \beta)^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$, falls $\alpha^{\dot{\mathcal{I}}} = \beta^{\dot{\mathcal{I}}}$, sonst $(\alpha \leftrightarrow \beta)^{\dot{\mathcal{I}}} = 0$.

Interpretationen für PL, DLs und DPL

Die Semantik der Prädikatenlogik und von Beschreibungslogiken setzt ebenfalls auf einer Interpretationsfunktion $\mathcal{I}$ auf, die zur Definition derselben semantischen Begriffe (Modell, Erfüllbarkeit etc.) wie im Falle der Aussagenlogik benutzt wird.

Definition A.11. Eine *Interpretation* $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle \in \mathrm{Int}(\mathcal{V})$ zu einem prädikatenlogischen Vokabular $\mathcal{V}$ (inklusive Variablen) ist ein Paar bestehend aus dem nichtleeren *Grundbereich (Grundmenge oder Domäne)* $\Delta^{\mathcal{I}}$ und einer *Interpretationsfunktion* (*Denotationsfunktion*) $\cdot^{\mathcal{I}}$, die nichtlogische Symbole aus $\mathcal{V}$ und Variablen wie folgt interpretiert:

1. Jedes n-stellige Prädikatsymbol $P \in \mathcal{V}$ wird auf eine n-stellige Relation $P^{\mathcal{I}}$ über $\Delta^{\mathcal{I}}$ abgebildet;

2. jede Konstanten $c \in \mathcal{V}$ und jede Variable x wird auf ein Element $c^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ bzw. $x^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ abgebildet;

3. jedes n-stellige Funktionssymbol f wird auf eine n-stellige Funktion $f^{\mathcal{I}}$ über $\Delta^{\mathcal{I}}$ abgebildet.

Da beschreibungslogische nichtlogische Vokabulare eine Teilklasse prädikatenlogischer nichtlogischer Vokabulare sind, wird mit den gleichen Bedingungen wie in der obigen Definition eine *beschreibungslogische Interpretation* für ein beschreibungslogisches Vokabular $\mathcal{V}$ definiert.[8]

Ist x eine Variable, so bezeichnet $\mathcal{I}_{[x \mapsto d]}$ für $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ eine x-*Variante* von $\mathcal{I}$. $\mathcal{I}_{[x \mapsto d]}$ ist mit $\mathcal{I}$ bis auf die Interpretation von x, welches durch d interpretiert wird, identisch. Sind $x_1, \ldots, x_n$ verschiedene Variablen, dann wird statt $\mathcal{I}_{[x_1 \mapsto d_1], \ldots, [x_n, \mapsto d_n]}$ auch $\mathcal{I}_{[x_1 \mapsto d_1, \ldots, x_n, \mapsto d_n]}$ geschrieben. Ähnlich lassen sich Varianten von Interpretationen (in der Prädikatenlogik und in Beschreibungslogiken) definieren, die durch Variation von Konstanten, Funktionssymbolen und Prädikatsymbolen (in den Beschreibungslogiken eingeschränkter: von Konzept- und Rollensymbolen) entstehen. Ist z.B. a eine Konstante und $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ ein Element in der Domäne von $\mathcal{I}$, so bezeichnet $\mathcal{I}_{[a \mapsto d]}$ diejenige Variante von $\mathcal{I}$, die a durch d interpretiert, $a^{\mathcal{I}_{[a \mapsto d]}} = d$. Entsprechend werden Varianten für Funktions- und Prädikatsymbole (Konzept- und Rollensymbole) definiert.

Eine prädikatenlogische Interpretation $\mathcal{I}$ kann induktiv wie folgt auf eine Interpretation $\dot{\mathcal{I}}$ von Termen und Formeln erweitert werden.

Definition A.12. Für Terme t über $\mathcal{V}$ wird $t^{\dot{\mathcal{I}}}$ induktiv definiert durch:

[8] Der einzige Unterschied ist, dass in DLs keine Festlegung der Interpretation von Variablen nötig ist, da diese nicht in beschreibungslogischen Formeln vorkommen.

1. Ist t eine Variable oder eine Konstante, dann ist $t^{\dot{\mathcal{I}}} = t^{\mathcal{I}}$.
2. Hat t die Form $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, dann ist $t^{\dot{\mathcal{I}}} = f^{\mathcal{I}}(t_1^{\dot{\mathcal{I}}}, \ldots, t_n^{\dot{\mathcal{I}}})$.

Sei α eine prädikatenlogische Formel über $\mathcal{V}$ und $\mathcal{I} \in \mathrm{Int}(\mathcal{V})$ eine Interpretation über dem Vokabular $\mathcal{V}$.

1. Hat α die Form $\alpha = P(t_1, \ldots, t_n)$, so gilt $\alpha^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$, falls $\langle t_1^{\dot{\mathcal{I}}}, \ldots, t_n^{\dot{\mathcal{I}}} \rangle \in P^{\mathcal{I}}$, sonst ist $\alpha^{\dot{\mathcal{I}}} = 0$.
2. Im Falle der Prädikatenlogik mit Identität wird erklärt: $(t_1 \doteq t_2)^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$, falls $t_1^{\dot{\mathcal{I}}} = t_2^{\dot{\mathcal{I}}}$, sonst $(t_1 \doteq t_2)^{\dot{\mathcal{I}}} = 0$.
3. Hat α die Form $\alpha = \neg\beta$, so ist $\alpha^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$, falls $\beta^{\dot{\mathcal{I}}} = 0$, sonst $\alpha^{\dot{\mathcal{I}}} = 0$.
4. Entsprechend dem aussagenlogischen Fall wird die Interpretation für $\alpha = (\beta_1 * \beta_2)$ festgelegt, wobei $*$ ein binärer Junktor ist.
5. Hat α die Form $\alpha = \forall x\beta$, so ist $\alpha^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$ genau dann, wenn für alle $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt: $\beta^{\mathcal{I}_{[x \mapsto d]}} = 1$, sonst $\alpha^{\dot{\mathcal{I}}} = 0$.
6. Hat α die Form $\alpha = \exists x\beta$, so ist $\alpha^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$ genau dann, wenn ein $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ existiert, so dass gilt: $\beta^{\mathcal{I}_{[x \mapsto d]}} = 1$, sonst $\alpha^{\dot{\mathcal{I}}} = 0$.

Für Beschreibungslogiken ist eine Erweiterung von $\mathcal{I}$ auf Konzeptbeschreibungen, Rollenbeschreibungen und TBox-Axiome sowie ABox-Axiome zu definieren. Die Erweiterung von $\mathcal{I}$ für Konzeptbeschreibungen in der Beschreibungslogik $\mathcal{AL}$ ist unten explizit aufgeführt. Für andere Beschreibungslogiken, die ich in dieser Arbeit verwende, kann die Semantik der Tabelle A.1 entnommen werden. Die Bildung einer generellen Konzeptkonjunktion und einer generellen Konzeptdisjunktion von Mengen von Konzeptbeschreibungen M wird semantisch festgelegt durch $(\bigsqcap M)^{\dot{\mathcal{I}}} = \bigcap\{C^{\dot{\mathcal{I}}} \mid C \in M\}$ und $(\bigsqcup M)^{\dot{\mathcal{I}}} = \bigcup\{C^{\dot{\mathcal{I}}} \mid C \in M\}$.

Definition A.13. Sei $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle \in \mathrm{Int}(\mathcal{V})$ eine Interpretation über dem beschreibungslogischen Vokabular $\mathcal{V}$. Dann wird die Erweiterung $\dot{\mathcal{I}}$ auf Konzeptbeschreibungen $\mathrm{Konz}_{\mathcal{AL}}(\mathcal{V})$ wie folgt definiert:

1. Für alle Konstanten, Konzept- und Rollensymbole $s \in \mathcal{V}$ ist $s^{\dot{\mathcal{I}}} = s^{\mathcal{I}}$.
2. Für Konzeptsymbole K in $\mathcal{V}$ ist $(\neg K)^{\dot{\mathcal{I}}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus K^{\dot{\mathcal{I}}}$.
3. Für $C, D \in \mathrm{Konz}_{\mathcal{AL}}(\mathcal{V})$ ist $(C \sqcap D)^{\dot{\mathcal{I}}} = C^{\dot{\mathcal{I}}} \cap D^{\dot{\mathcal{I}}}$.
4. Für $C \in \mathrm{Konz}_{\mathcal{AL}}(\mathcal{V})$ und Rollensymbole $R \in \mathcal{V}$ ist $(\forall R.C)^{\dot{\mathcal{I}}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \langle x, y \rangle \in R^{\mathcal{I}}\} \subseteq C^{\dot{\mathcal{I}}}\}$.

5. Für Rollensymbole $R \in \mathcal{V}$ ist
$(\exists R.\top)^{\dot{\mathcal{I}}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}}\} \neq \emptyset\}$.

Definition A.14. Die Erweiterung $\dot{\mathcal{I}} : \mathrm{Satz}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V}) \longrightarrow \{1, 0\}$ einer beschreibungslogischen Interpretation $\mathcal{I}$ auf TBox- und ABox-Axiome ist (für alle Beschreibungslogiken) gegeben durch:

1. $(C \sqsubseteq D)^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$ gdw. $C^{\dot{\mathcal{I}}} \subseteq D^{\dot{\mathcal{I}}}$.
(Aufgrund dieser semantischen Festlegung ist $C \sqsubseteq D$ in prädikatenlogischer Notation äquivalent darstellbar durch $\forall x(C(x) \rightarrow D(x))$.)

2. $(C \doteq D)^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$ gdw. $C^{\dot{\mathcal{I}}} = D^{\dot{\mathcal{I}}}$.

3. $(R_1 \sqsubseteq R_2)^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$ gdw. $R_1^{\dot{\mathcal{I}}} \subseteq R_2^{\dot{\mathcal{I}}}$.

4. $(R_1 \doteq R_2)^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$ gdw. $R_1^{\dot{\mathcal{I}}} = R_2^{\dot{\mathcal{I}}}$.

5. $(C(a))^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$ gdw. $a^{\dot{\mathcal{I}}} \in C^{\dot{\mathcal{I}}}$.

6. $(R(a, b))^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$ gdw. $\langle a^{\dot{\mathcal{I}}}, b^{\dot{\mathcal{I}}}\rangle \in R^{\dot{\mathcal{I}}}$.

Bemerkung 11. Aufgrund der obigen Festlegung der Semantik von beschreibungslogischen Formeln lässt sich zeigen, dass Beschreibungslogiken äquivalent in Fragmente der Prädikatenlogik übersetzbar sind. Alle Konstanten in der Beschreibungslogik werden als Konstanten der Prädikatenlogik angesehen; Konzeptsymbole werden auf einstellige Prädikatsymbole abgebildet und Rollensymbole auf zweistellige Prädikatsymbole. Mit dieser Zuordnung kann jede Konzeptbeschreibung C in eine prädikatenlogische Formel $\alpha_C(x)$ mit einer freien Variable x übersetzt werden, so dass $C^{\mathcal{I}}$ für eine beschreibungslogische Interpretation $\mathcal{I}$ gerade die Menge aller Gegenstände $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ ist, so dass $\mathcal{I}_{[x \mapsto d]} \models C(x)$, wobei $\mathcal{I}_{[x \mapsto d]}$ als prädikatenlogische Interpretation gelesen wird. Hierzu werden die booleschen Konzeptkonstruktoren auf die korrespondierenden Junktoren in der Prädikatenlogik abgebildet; z.B. ist $\alpha_{C_1 \sqcap C_2}(x) = \alpha_{C_1}(x) \wedge \alpha_{C_2}(x)$. Die existentielle Quantifikation und die Werterestriktion (für eine neue Variable y) werden wie folgt übersetzt:

$$\alpha_{\exists R.C}(y) = \exists x(R(y, x) \wedge \alpha_C(x))$$
$$\alpha_{\forall R.C}(y) = \forall x(R(y, x) \rightarrow \alpha_C(x))$$

Entsprechend lassen sich Anzahlrestriktionen, Nominalia etc. übersetzen.

Die Semantik der zur Auswertung benutzten Formeln $\mathrm{DPL}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$ (Definition A.6) für eine Beschreibungslogik DL orientiert sich an deren induktivem Aufbau.

Definition A.15. Gegeben sei eine Interpretation $\mathcal{I}$ für eine Beschreibungslogik DL und ein Vokabular $\mathcal{V}$. Ihre Erweiterung $\dot{\mathcal{I}}$ für Formeln in $\mathrm{DPL}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$ ist definiert durch:

1. $\alpha^{\dot{\mathcal{I}}} = \alpha^{\tilde{\mathcal{I}}}$ für $\alpha \in \mathrm{Satz}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$ und die Erweiterung $\tilde{\mathcal{I}}$ für Axiome in DL.
2. $(a \doteq b)^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$ genau dann, wenn $a^{\mathcal{I}} = b^{\mathcal{I}}$ und $(a \neq b)^{\dot{\mathcal{I}}} = 1$ genau dann, wenn $a^{\mathcal{I}} \neq b^{\mathcal{I}}$.
3. Für $\alpha, \beta \in \mathrm{DPL}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$ wird der Wert von $(\alpha * \beta)$ unter $\dot{\mathcal{I}}$ für einen binären Junktor * wie im Falle der Aussagenlogik definiert.

Die Formeln über die (Un-)Gleichheit von Konstanten, welche in die Auswertungsformeln aufgenommen wurden, sind zur Formulierung von impliziten Annahmen über die Eindeutigkeit der Bezeichner (unique name assumption (UNA)) nützlich. Falls M eine Menge von konzeptbasierten Literalen über einem beschreibungslogischen Vokabular $\mathcal{V}$ ist, $M \subseteq \mathrm{KLit}(\mathcal{V})$, ist die Menge der *Ungleichheitsbeziehungen, die die in M implizit vorhandene UNA ausdrücken*, gegeben durch

$$\mathrm{una}(M) = \{(a \neq b) \mid K(a), \neg K(b) \in M, \text{ für } K, a, b \in \mathcal{V}\} \tag{A.1}$$

Falls A eine Folge von Literalen ist, wird einfach $\mathrm{una}(A)$ statt $\mathrm{una}(\tilde{A})$ geschrieben. Man beachte, dass jede Menge von Literalen M genau dann konsistent (s.u.) ist, wenn es ein Konzeptsymbol K und eine Konstante a gibt, so dass $\{K(a), \neg K(a)\} \subseteq M$ gilt. Daher ist eine Menge von Literalen genau dann inkonsistent, wenn ihre implizite UNA inkonsistent ist.

A.2.4 Semantische Kategorien

Die üblichen semantischen Kategorien sind für die hier verwendeten Logiken im Wesentlichen gleich. In den folgenden Definitionen wie auch in der gesamten Arbeit wird nicht mehr zwischen $\mathcal{I}$ und $\dot{\mathcal{I}}$ unterschieden. Wenn $\alpha^{\mathcal{I}} = 1$, wird auch die Schreibweise $\mathcal{I} \models \alpha$ genutzt; $\mathcal{I}$ heißt in diesem Fall ein *Modell* von α. Ist $\alpha^{\mathcal{I}} = 0$, wird auch $\mathcal{I} \not\models \alpha$ geschrieben und gesagt, dass $\mathcal{I}$ die Formel α *falsch macht* oder *falsifiziert*. $\mathcal{I}$ ist *Modell einer Menge* $X \subseteq \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$ von Sätzen, wenn es Modell aller Sätze in X ist: $\mathrm{Mod}_{\mathcal{V}}(X) = \{\mathcal{I} \in \mathrm{Int}(\mathcal{V}) \mid \mathcal{I} \models \alpha \text{ für alle } \alpha \in X\}$.[9] $\mathrm{Mod}_{\mathcal{V}}(\{\alpha\})$ wird durch $\mathrm{Mod}_{\mathcal{V}}(\alpha)$ abgekürzt. Für die Bestimmung, ob eine Interpretation ein Modell einer Formelmenge X ist, sind nur die Interpretationen der nichtlogischen Symbole, die tatsächlich in X vorkommen, relevant. Für die in dieser Arbeit behandelten Logiken AL, PL und DLs gilt das Koinzidenzlemma:

[9] Wenn aus dem Kontext hervorgeht, welches Vokabular zu Grunde gelegt wird, schreibe ich statt $\mathrm{Mod}_{\mathcal{V}}$ einfacher Mod.

Lemma A.16. *(Koinzidenzlemma) Sei* $X \subseteq \mathrm{Satz}(V)$ *eine Menge von Sätzen in einem Vokabular* $\mathcal{V}$ *der Aussagenlogik, Prädikatenlogik oder einer Beschreibungslogik. Dann gilt für alle Interpretationen* $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$*, deren Denotate für die Symbole in* $\mathcal{V}(X)$ *identisch sind:* $\mathcal{I}_1 \models X$ *genau dann, wenn* $\mathcal{I}_2 \models X$*.*

Da das Koinzidenzlemma erfüllt ist, sind die semantischen Kategorien, die unten definiert werden, invariant unter einer Änderung des Vokabulars.

Eine Menge von Formeln $Y \subseteq \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$ *folgt* aus einer Menge von Formeln $X \subseteq \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$, kurz $X \models Y$, genau dann, wenn $\mathrm{Mod}_{\mathcal{V}}(X) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathcal{V}}(Y)$. Statt $X \models \{\alpha\}$ wird auch $X \models \alpha$ und statt $\{\alpha\} \models Y$ auch $\alpha \models Y$ geschrieben. Zwei Formelmengen X, Y sind *logisch äquivalent*, kurz $X \equiv Y$, wenn $X \models Y$ und $Y \models X$. Eine Formelmenge $X \subseteq \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$ heißt *erfüllbar* oder *konsistent*, wenn sie ein Modell hat, $\mathrm{Mod}_{\mathcal{V}}(X) \neq \emptyset$. Zwei Formelmengen X, Y sind miteinander *kompatibel*, wenn $X \cup Y$ erfüllbar ist. Eine Formel $\alpha \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$ ist *tautologisch* oder *allgemeingültig*, wenn jede Interpretation in $\mathrm{Int}(\mathcal{V})$ Modell der Formel ist; sie ist *kontradiktorisch*, wenn sie kein Modell hat und *kontingent*, wenn sie ein Modell hat und wenn es eine Interpretation gibt, die sie falsch macht. Folgerbarkeit und (Un-)erfüllbarkeit hängen wie folgt zusammen: $X \models \alpha$ genau dann, wenn $X \cup \{\neg\alpha\}$ unerfüllbar ist.

Aufgrund der Konzeptfokussierung sind in Beschreibungslogiken weitere semantische Kategorien relevant. Für Beschreibungslogiken wird auch ein Begriff der Erfüllbarkeit einer Konzeptbeschreibung bzgl. einer Menge von Axiomen O erklärt. $C \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V})$ ist genau dann *erfüllbar bzgl.* O für $\mathcal{V}(O) \subseteq \mathcal{V}$, wenn $O \not\models C \sqsubseteq \bot$, wenn also C bzgl. O nicht das leere Konzept denotiert.

Weitere für diese Arbeit wichtige Begriffe, die sich mit der Festlegung der Semantik definieren lassen, sind die Begriffe eines spezifischsten Konzeptes und des Konzeptverbandes. Für die Definition der starken Reinterpretationsoperatoren für triggernde konzeptbasierte Literale (vgl. Özçep (2006)) wird das spezifischste Konzept einer Konstanten benutzt.

Definition A.17. Sei $\mathcal{V} = \mathcal{V}(O)$ die Menge aller in O vorkommenden nichtlogischen Symbole in einer Beschreibungslogik DL. $C \in \mathrm{Konz}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$ ist *ein spezifischstes Konzept für a bzgl. einer Menge* O von beschreibungslogischen Formeln in $\mathrm{Satz}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$ gdw.: $O \models C(a)$ und für alle $C' \in \mathrm{Konz}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$ mit $O \models C'(a)$ gilt $\models C \sqsubseteq C'$.

Die Existenz eines spezifischsten Konzepts hängt von O und der zu Grunde liegenden Beschreibungslogik ab.[10] Wenn ein spezifischstes Konzept existiert, wird ein Repräsentant eines spezifischsten Konzeptes mit $\mathrm{msc}_O(a)$ bezeichnet.

[10]Küsters und Molitor (2000) beschreiben eine Familie von Logiken, für die ein spezifischstes Konzept existiert und einen Algorithmus, mit dem man ihn berechnen kann. Gestattet man in einer Beschreibungslogik die Bildung genereller Konjunktionen, kann immer die Existenz eines spezifischsten Konzepts garantiert werden.

Zur Veranschaulichung der Effekte von Reinterpretationsoperatoren werden *Konzeptverbände* benutzt, die sich für eine Ontologie bilden lassen. Gegeben eine beschreibungslogische Wissensbasis O, $\mathcal{V}(O) \subseteq \mathcal{V}$ (bestehend aus einer TBox und einer ABox) lässt sich eine Äquivalenzrelation $\sim_O$ zwischen zwei Konzeptbeschreibungen $C_1, C_2 \in \text{Konz}(\mathcal{V})$ wie folgt definieren: $C_1 \sim_O C_2$ genau dann, wenn $O \models C_1 \doteq C_2$. Für die Menge aller Äquivalenzklassen bzgl. $\sim_O$ wird eine partielle Ordnung $\leq_O$ definiert durch: $[C_1] \leq_O [C_2]$ genau dann, wenn $O \models C_1 \sqsubseteq C_2$. Wenn, wie ich in den Beispielen annehmen werde, die Menge der Konzepte unter $\sqcap$ und $\sqcup$ abgeschlossen ist, ergibt sich damit ein Verband, der Konzeptverband zu O.[11] Dieser Verband wird in den Beispielen durch ein Hassediagramm von Repräsentanten der Äquivalenzklassen dargestellt. In den Beispielen werden meistens nur Teilverbände über Konzeptbeschreibungen eines Teilvokabulars $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ betrachtet.

Positives und negatives Vorkommen von Symbolen

Um die durch Reinterpretationsoperatoren konservierten Axiome unabhängig von den Brückenaxiomen beschreiben zu können (s. Kapitel 5), wird in dieser Arbeit der Begriff des semantisch positiven und negativen Vorkommens eines Symbols in einem Satz definiert. Diese Begriffe sind auf alle Logiken anwendbar, in denen Sätze, d.h. in der Dimension Wahr-Falsch bewertbare Zeichenketten, definiert sind. Insbesondere lassen sich diese Begriffe auf die Aussagenlogik, die Prädikatenlogik, Beschreibungslogiken und die kombinierte Logik DPL anwenden.

Definition A.18. Sei $\mathcal{V}$ ein nichtlogisches Vokabular. Ein Symbol $s \in \mathcal{V}$ *kommt* genau dann *echt in einem Satz* $\alpha \in \text{Satz}(\mathcal{V})$ *vor*, wenn es Interpretationen $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \in \text{Int}(\mathcal{V})$ gibt, so dass gilt: $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ unterscheiden sich nur in der Interpretation von s (d.h. $\mathcal{I}_2$ ist eine s-Variante von $\mathcal{I}_1$) und $\alpha^{\mathcal{I}_1} \neq \alpha^{\mathcal{I}_2}$.

Definition A.19. Sei $P \in \mathcal{V}$ ein n-stelliges Prädikatsymbol in einem prädikatenlogischen bzw. in einem beschreibungslogischen Vokabular $\mathcal{V}$. Im letzteren Falle ist nur $n = 1$ oder $n = 2$ gestattet. Ist $P \in \mathcal{V}(\alpha)$, so *kommt* P *semantisch positiv in einem Satz* α *vor*, kurz: $\text{posV}(K, \alpha)$, wenn Folgendes gilt: Für jede Interpretation $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ und für alle Teilmengen des n-fachen kartesischen Produktes der Domäne $D_1, D_2 \subseteq (\Delta^{\mathcal{I}})^n$ gilt:

$$\text{Wenn } D_1 \subseteq D_2 \text{ und } \mathcal{I}_{[P \mapsto D_1]} \models \alpha, \text{ dann auch } \mathcal{I}_{[P \mapsto D_2]} \models \alpha.$$

Entsprechend gilt für $P \in \mathcal{V}(\alpha)$, dass P *semantisch negativ in* α *vorkommt*, kurz: $\text{negV}(K, \alpha)$, wenn gilt: Für jede Interpretation $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ und für alle

[11] Die aus dieser Konstruktion resultierenden Algebren werden Lindenbaum-Tarski-Algebren genannt (Blackburn et al., 2002, S. 271).

$D_1, D_2 \subseteq (\Delta^{\mathcal{I}})^n$ gilt:

$$\text{Wenn } D_1 \subseteq D_2 \text{ und } \mathcal{I}_{[P \mapsto D_2]} \models \alpha, \text{ dann auch } \mathcal{I}_{[P \mapsto D_1]} \models \alpha.$$

P kommt *gemischt in α vor*, kurz: $\mathrm{gemV}(P, \alpha)$, genau dann, wenn es semantisch echt in α vorkommt, aber weder semantisch positiv noch semantisch negativ in α vorkommt.

Abkürzend stehe $\mathrm{posVon}(P, \alpha)$ (bzw. $\mathrm{negVon}(P, \alpha)$) für den Fall, dass P semantisch positiv (bzw. negativ) in α vorkommt, d.h. $\mathrm{posV}(P, \alpha)$ (bzw. $\mathrm{negV}(P, \alpha)$) gilt, **o**der P **n**icht syntaktisch in α vorkommt.

Für Aussagenlogiken werden die Begriffe des semantisch positiven, negativen und gemischten Vorkommens in entsprechender Weise definiert. Sei $\alpha \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$ eine aussagenlogische Formel und $p \in \mathcal{V}(\alpha)$ ein Aussagensymbol. p kommt genau dann *semantisch positiv in α vor*, wenn für jede Wahrheitswertbelegung $\mathcal{I} : \mathcal{V} \longrightarrow \{1, 0\}$ gilt: Wenn $\mathcal{I}_{[p \mapsto 0]} \models \alpha$, dann auch $\mathcal{I}_{[p \mapsto 1]} \models \alpha$. p kommt genau dann *semantisch negativ in α vor*, wenn für jede Wahrheitswertbelegung $\mathcal{I} : \mathcal{V} \longrightarrow \{1, 0\}$ gilt: Wenn $\mathcal{I}_{[p \mapsto 1]} \models \alpha$, dann auch $\mathcal{I}_{[p \mapsto 0]} \models \alpha$.

Relevante Resultate zur Semantik in AL und PL

Folgende wichtige Lemmata und Propositionen zur Aussagen- und Prädikatenlogik werden in dieser Arbeit benutzt. Die Beziehung zwischen Varianten einer Interpretation $\mathcal{I}$ und Substitutionen halten die folgenden Überführungslemmata für die Aussagenlogik und die Prädikatenlogik fest.

Lemma A.20. *(Überführungslemma für Aussagenlogik)*
Für alle Interpretationen $\mathcal{I} \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$, Formeln $\alpha \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$, Aussagensymbole $p \in \mathcal{V}$ gilt: $\mathcal{I} \models \alpha_{[p/\top]}$ genau dann, wenn $\mathcal{I}_{[p \mapsto 1]} \models \alpha$ und $\mathcal{I} \models \alpha_{[p/\bot]}$ genau dann, wenn $\mathcal{I}_{[p \mapsto 0]} \models \alpha$.

Lemma A.21. *(Schöning, 2000, S. 61)(Überführungslemma für Prädikatenlogik) Für alle Interpretationen $\mathcal{I}$, Formeln α, Variable x und Terme t, die keine durch α gebundene Variable enthalten, gilt: $\mathcal{I} \models \alpha_{[x/t]}$ genau dann, wenn $\mathcal{I}_{[x \mapsto t^{\mathcal{I}}]} \models \alpha$.*

Für diese Arbeit relevante Äquivalenzumformungen sind im folgenden Lemma aufgelistet.

Lemma A.22. *Sei $\mathcal{V}$ ein aussagenlogisches oder prädikatenlogisches Vokabular. Für Formeln $\alpha, \beta, \delta \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$ und $* \in \{\wedge, \vee\}$ gilt:*

1. $\alpha * \beta \equiv \beta * \alpha$ *(Kommutativität von $\wedge$ bzw. $\vee$)*
2. $\alpha * (\beta * \delta) \equiv (\alpha * \beta) * \delta$ *(Assoziativität von $\wedge$ bzw. $\vee$)*

3. $\alpha \vee (\beta \wedge \delta) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \delta)$; $\alpha \wedge (\beta \vee \delta) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \delta)$ *(Distributivität)*

4. $\alpha * \alpha \equiv \alpha$ *(Idempotenz)*

5. $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$; $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ *(De Morgan)*

6. $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$ *(Elimination doppelter Negation)*

7. $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$; $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$ *(Absorption)*

Für prädikatenlogische Formeln $\alpha, \beta \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$ *gelten folgende wichtige Äquivalenzen.*

1. $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$; $\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$ *(Dualität von $\forall$ und $\exists$)*

2. *Falls x in β nicht frei vorkommt, gilt für $Q \in \{\exists, \forall\}$:*
   (a) $(Qx\alpha \wedge \beta) \equiv Qx(\alpha \wedge \beta)$ *(Skopuserweiterung)*
   (b) $(Qx\alpha \vee \beta) \equiv Qx(\alpha \vee \beta)$

3. $\forall x(\alpha \wedge \beta) \equiv \forall x\alpha \wedge \forall x\beta$ *(Distributivität von $\forall$ bzgl. $\wedge$)*

4. $\exists x(\alpha \vee \beta) \equiv \exists x\alpha \vee \exists x\beta$ *(Distributivität von $\exists$ bzgl. $\vee$)*

5. $QxQy\alpha \equiv QyQx\alpha$ *für $Q \in \{\exists, \forall\}$* *(Vertauschung der Quantorenreihenfolge)*

In dieser Arbeit wird häufig auf die Tatsache zurückgegriffen, dass sich Formeln äquivalent in eine Normalform überführen lassen.

Definition A.23. Eine aussagenlogische Formel bzw. quantorenfreie prädikatenlogische Formel α ist in *konjunktiver Normalform (KNF)* genau dann, wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von aussagenlogischen bzw. prädikatenlogischen Literalen ist, $\alpha = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \bigvee_{1 \leq j \leq m_i} li_{ij}$. Sie ist in *disjunktiver Normalform (DNF)* genau dann, wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von aussagenlogischen bzw. prädikatenlogischen Literalen ist, $\alpha = \bigvee_{1 \leq i \leq n} \bigwedge_{1 \leq j \leq m_i} li_{ij}$.

Unter Ausnutzung der obigen Äquivalenzen kann gezeigt werden, dass jede aussagenlogische Formel bzw. quantorenfreie prädikatenlogische Formel äquivalent in KNF und DNF überführt werden kann.

Lemma A.24. *Für jede aussagenlogische Formel bzw. quantorenfreie prädikatenlogische Formel α gibt es eine äquivalente Formel α', die in KNF ist, und eine äquivalente Formel α'', die in DNF ist.*

while α enthält einen Existenzquantor **do**
  begin
    α habe die Form $\alpha = \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists z \beta$
    für eine Formel β in bereinigter Pränexform und $n \geq 0$.
    Sei f ein nicht in α vorkommendes n-stelliges Funktionssymbol;
    $\alpha = \forall x_1 \ldots \forall x_n \beta[z/f(x_1, \ldots, x_n)]$
  end

Abbildung A.1: Algorithmus zur Skolemisierung

Für das Ableitungsverfahren der *Resolution* (s.u.) wird alternativ eine Mengendarstellung von Formeln in KNF bzw. DNF benutzt. Eine Disjunktion von aussagenlogischen bzw. prädikatenlogischen Literalen $li_1 \vee \cdots \vee li_n$ wird als Menge $\{li_1, \ldots, li_n\}$ notiert und *Klausel* genannt. Eine Formel $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \bigvee_{1 \leq j \leq m_i} li_{ij}$ in KNF kann als Menge von Klauseln dargestellt werden:

$$\{\{li_{11}, \ldots, li_{1m_1}\}, \ldots, \{li_{n1}, \ldots, li_{nm_n}\}\}$$

Die leere Menge von Literalen entspricht der Kontradiktion $\perp$.

Lemma A.25. *(Schöning, 2000, S. 62) Zu jeder Formel der Prädikatenlogik gibt es eine äquivalente bereinigte Formel.*

Eine prädikatenlogische Formel der Form $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \beta$ ist in *Pränexform* genau dann, wenn $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ und β eine prädikatenlogische Formel ohne Quantoren ist.

Proposition A.26. *(Schöning, 2000, S. 62) Für jede Formel der Prädikatenlogik gibt es eine äquivalente, bereinigte Formel in Pränexform.*

Eine Formel heißt *universell*, wenn sie äquivalent in eine Pränexform überführt werden kann, die nur Allquantoren enthält. Eine geschlossene Formel ist in *Skolemform*, wenn sie in Pränexform ist und nur Allquantoren enthält.

Lemma A.27. *Für jede prädikatenlogische Formel α gibt es eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemform.*

Beweis. Einen Beweis liefert der in Abbildung A.1 aufgeführte Algorithmus von Schöning (Schöning, 2000, S. 63), mit dem sich zu α eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemform konstruieren lässt. □

Herbrandmodelle für PL

Eine wichtige Modellkonstruktion, die semantische und syntaktische Elemente miteinander verwebt, ist die Konstruktion eines Herbrandmodells.

Definition A.28. (Verallgemeinerung von (Schöning, 2000, S. 77–78)) Sei X eine Menge von geschlossenen prädikatenlogischen Formeln über dem Vokabular $\mathcal{V}$ (inklusive Variablen). Dabei wird vorausgesetzt, dass $\mathcal{V}$ ein kleinstes Vokabular ist, so dass $\mathcal{V}(X) \subseteq \mathcal{V}$ und $\mathcal{V}$ mindestens eine Konstante enthält. Das *Herbranduniversum* $D(X)$ von X wird wie folgt definiert:

1. Alle in X vorkommenden Konstanten sind in $D(X)$.
2. Für jedes in X vorkommende n-stellige Funktionssymbol f und alle Terme $t_1, \ldots, t_n \in D(X)$ ist auch $f(t_1, \ldots, t_n) \in D(X)$.
3. Nur die gemäß 1. und 2. konstruierten Terme sind in $D(X)$.

Eine Interpretation $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle \in \mathrm{Int}(\mathcal{V})$ ist eine *Herbrandinterpretation* für X, falls gilt: $\Delta^{\mathcal{I}} = D(X)$ und für jedes in X vorkommende n-stellige Funktionssymbol f und $t_1, \ldots, t_n \in D(X)$ gilt: $f^{\mathcal{I}}(t_1, \ldots t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$. Eine Herbrandinterpretation für X, die X wahr macht, wird auch *Herbrandmodell für* X genannt.

Für erfüllbare Mengen von geschlossenen, universellen Formeln in der Prädikatenlogik ohne Identität lässt sich die Existenz eines Herbrandmodells zeigen. Dieser Satz wird im Beweis für die Erfüllbarkeit der Reinterpretationsrelevanz in Abschnitt 5.2 benötigt.

Proposition A.29. *(Verallgemeinerung von (Schöning, 2000, S. 79)) Sei X eine Menge von geschlossenen, universellen Formeln über der Prädikatenlogik ohne Identität. Dann ist X genau dann erfüllbar, wenn X ein Herbrandmodell hat.*

Beweis. Der Beweis imitiert den Beweis von (Schöning, 2000, S. 79) für den dort aufgeführten spezielleren Satz, der die Existenz eines Herbrandmodells für endliche (!) Mengen X von geschlossenen universellen Formeln in der Prädikatenlogik ohne Identität garantiert.

Wenn X ein Herbrandmodell hat, dann ist X auch erfüllbar. Zum Beweis der umgekehrten Richtung sei $\mathcal{I} \models X$. Definiere eine Herbrandinterpretation $\mathcal{J}$ zu X wie folgt: $\Delta^{\mathcal{J}} = D(X)$, $f^{\mathcal{J}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$ für alle $t_i \in \Delta^{\mathcal{J}}$ und Funktionssymbole f; für alle Prädikatsymbole P sei $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{J}}$ genau dann, wenn $\langle t_1^{\mathcal{I}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I}} \rangle \in P^{\mathcal{I}}$. Zum Beweis wird eine stärkere Aussage gezeigt:

Für jeden universellen Satz α, der aus nichtlogischen Symbolen aus X gebildet werden kann, gilt: Wenn $\mathcal{I} \models \alpha$, so auch $\mathcal{J} \models \alpha$.

Die Aussage der Proposition ergibt sich dann aus dem Spezialfall $\alpha = \beta$ für $\beta \in X$ und der Tatsache, dass für alle $\beta \in X$ gilt: $\mathcal{I} \models \beta$.

Der Beweis wird durch Induktion über die Anzahl n der Quantoren in α geführt.

Induktionsbasis ($n = 0$): Enthält α keine (All-)Quantoren, dann besteht α nur aus booleschen Kombinationen von atomaren Sätzen. Damit gilt per Definition sogar $\alpha^{\mathcal{I}} = \alpha^{\mathcal{J}}$.

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für Formeln ϵ, die weniger als n Quantoren enthalten.

Induktionsschritt: Sei ϵ eine Formel mit $n-1$ Quantoren und $\alpha = \forall x \epsilon$. Gelte $\mathcal{I} \models \alpha$, d.h. $\mathcal{I}_{[x \mapsto d]}(\epsilon) = 1$ für alle $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Also gilt auch: Für alle $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $d = t^{\mathcal{I}}$ für $t \in \Delta^{\mathcal{J}}$ ist $\mathcal{I}_{[x \mapsto d]}(\epsilon) = 1$. Das bedeutet: Für alle $t \in \Delta^{\mathcal{J}}$ ist $\mathcal{I}_{[x \mapsto t^{\mathcal{I}}]}(\epsilon) = \mathcal{I}(\epsilon[x/t]) = 1$. (Die letzte Gleichheitsbeziehung folgt mit dem Überführungslemma A.21). Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathcal{J}(\epsilon[x/t]) = 1$ für alle $t \in \Delta^{\mathcal{J}}$; also gilt für alle $t \in \Delta^{\mathcal{J}}$ wegen des Überführungslemmas A.21 (und $t = t^{\mathcal{J}}$), dass $\mathcal{J}_{[x \mapsto t]}(\epsilon) = 1$, insgesamt also $\mathcal{J}(\forall x \epsilon) = \mathcal{J}(\alpha) = 1$, was zu zeigen war. Hiermit ist der Induktionsbeweis beendet und gezeigt, dass $\mathcal{J}$ ein Herbrandmodell von X ist. $\square$

A.2.5 Beweisverfahren: Resolution

Für die hier betrachteten Logiken gibt es diverse Beweisverfahren. Ich greife in dieser Arbeit nur auf das Resolutionsverfahren zurück. Die *Resolution* ist ein Ableitungskalkül, mit dem eine Formel auf Unerfüllbarkeit getestet werden kann. Es erhält eine Formel in KNF (bzw. eine Formel mit Matrix in KNF) und bildet durch wiederholte Anwendung der Resolution genannten Inferenzregel neue Klauseln (Resolventen) bis die leere Klausel abgeleitet wurde.

Definition A.30. Seien kl_1, kl_2 und kl Mengen von Literalen (als Klauseln interpretiert). kl ist eine *(prädikatenlogische) Resolvente* von kl_1 und kl_2 genau dann, wenn gilt:

1. Es gibt Substitutionen σ_1, σ_2, die Variablen nur durch Variablen ersetzen, so dass $kl_1\sigma_1$ und $kl_2\sigma_2$ keine gemeinsamen Variablen enthalten.

2. Es gibt Literale $li_1, \ldots, li_m \in kl_1\sigma_1$, $(m \geq 1)$ und $li'_1, \ldots, li'_n \in kl_2\sigma_2$ $(n \geq 1)$, so dass $M = \{\overline{li}_1, \ldots, \overline{li}_m, li'_1, \ldots, li'_n\}$ unifizierbar ist. Es sei σ ein allgemeinster Unifikator von M.

3. $kl = \big((kl_1\sigma_1 \setminus \{li_1, \ldots, li_m\}) \cup (kl_2\sigma_2 \setminus \{li'_1, \ldots, li'_n\})\big)\sigma$.

Definition A.31. Für eine Menge X von Klauseln und eine Klausel kl ist eine *Resolutionsableitung (kurz $\mathcal{R}$-Ableitung)* oder ein *Resolutionsbeweis ($\mathcal{R}$-Beweis) von kl aus X* eine Folge von Klauseln $kl_1, \ldots, kl_n$, so dass gilt:

1. $kl_n = kl$
2. Für alle $i = 1, \ldots, n$:
   (a) $kl_i \in X$ oder
   (b) kl_i ist Resolvent zweier Klauseln kl_j, kl_k für $j, k < i$.

Eine $\mathcal{R}$-Ableitung der leeren Klausel $\perp$ aus X heißt auch *$\mathcal{R}$-Widerlegung*. Gibt es eine $\mathcal{R}$-Ableitung von kl aus X, wird dieser Sachverhalt mit $X \vdash_{\mathcal{R}} kl$ notiert.

Das so definierte Ableitungskalkül ist ein vollständiges und korrektes Verfahren, um eine Formel auf Unerfüllbarkeit zu testen.

Proposition A.32. *(Resolutionssatz) Sei α ein prädikatenlogischer Satz in Skolemform mit einer Matrix α^* in KNF. Dann gilt: α ist genau dann unerfüllbar, wenn für α^* eine $\mathcal{R}$-Widerlegung existiert* ($\alpha^* \vdash_{\mathcal{R}} \perp$).

A.3 Folgerungsoperator und Restmengen

In der klassischen Belief-Revision ist die logische Basis ein Folgerungsoperator Cn. Eine Unterscheidung zwischen Semantik und Syntax, wie sie oben für die Aussagenlogik, Prädikatenlogik und Beschreibungslogik dargestellt wurde, wird nicht vorausgesetzt. Ein Tarskischer Folgerungsoperator Cn wird für eine logische Sprache $\mathcal{L}$ definiert. In der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik können $\mathrm{Satz}_{\mathrm{AL}}(\mathcal{V})$ und $\mathrm{Satz}_{\mathrm{PL}}(\mathcal{V})$ die Rolle von $\mathcal{L}$ übernehmen, in der Beschreibungslogik ebenfalls die Menge der Sätze (Axiome) $\mathrm{Satz}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$, aber alternativ auch $\mathrm{Konz}_{\mathrm{PL}}(\mathcal{V})$.

Gemäß Definition 2.1 (S. 16) ist ein Operator $\mathrm{Cn} : \mathrm{Pot}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{Pot}(\mathcal{L})$ über einer logischen Sprache $\mathcal{L}$ ein *Tarskischer Folgerungsoperator* genau dann, wenn er für $X, X_1, X_2 \subseteq \mathcal{L}$ folgende Bedingungen erfüllt:

1. $X \subseteq \mathrm{Cn}(X)$ (Inklusion)
2. Falls $X_1 \subseteq X_2$, dann $\mathrm{Cn}(X_1) \subseteq \mathrm{Cn}(X_2)$. (Monotonie)
3. $\mathrm{Cn}(X) = \mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(X))$ (Idempotenz)

In der klassischen Belief-Revision wird für die Sprache $\mathcal{L}$ zumeist angenommen, dass sie Sätze enthält, in denen die aussagenlogischen Junktoren vorkommen, und dass sie unter diesen Junktoren abgeschlossen ist. Mit der Zuordnung $\wedge \mapsto \sqcap$,

$\vee \mapsto \sqcup$ etc. ist die Voraussetzung auch für die Menge von Konzeptbeschreibungen $\mathcal{L} = \mathrm{Konz}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$ in einer Beschreibungslogik, deren Konzeptbeschreibungen bzgl. $\sqcap, \sqcup, \neg$ abgeschlossen sind, erfüllt.

Um zu kennzeichnen, dass ein Folgerungsoperator für die Sprache $\mathcal{L}$ definiert ist, wird $\mathrm{Cn}_{\mathcal{L}}$ geschrieben. Wenn die Sprache als eine Menge von Sätzen über dem nichtlogischen Vokabular $\mathcal{V}$ einer Logik LO gegeben ist, $\mathcal{L} = \mathrm{Satz}_{\mathrm{LO}}(\mathcal{V})$, wird auch $\mathrm{Cn}_{\mathcal{V},\mathrm{LO}}$ oder kürzer $\mathrm{Cn}_{\mathcal{V}}$ – wenn die Logik eindeutig aus dem Kontext hervorgeht – geschrieben. Ein Satz α folgt bzgl. Cn aus X, auch geschrieben als $X \vdash_{\mathrm{Cn}} \alpha$, genau dann, wenn $\alpha \in \mathrm{Cn}(X)$. Für die bereits definierten Folgerungsbeziehungen $\models$ zwischen Sätzen in $\mathrm{Satz}(\mathcal{V})$ lässt sich ein zugehöriger Folgerungsoperator $\mathrm{Cn}_{\mathcal{V},\models}$ durch $\mathrm{Cn}_{\mathcal{V},\models}(X) = \{\alpha \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}) \mid X \models \alpha\}$ definieren. Für Konzeptbeschreibungen lässt sich ein Folgerungsoperator wie folgt definieren: Für $X \subseteq \mathrm{Konz}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V})$ sei

$$\begin{aligned}\mathrm{Cn}_{\mathcal{V}}(X) \quad = \quad & \{C \in \mathrm{Konz}_{\mathrm{DL}}(\mathcal{V}) \mid \text{Es gibt eine endliche Teilmenge } X' \subseteq X \text{ mit} \\ & \models \textstyle\bigsqcap X' \sqsubseteq C\}\end{aligned}$$

Derartige Folgerungsoperatoren werden in Kapitel 7 benutzt.

Obwohl Definition 2.1 bereits eine Klasse von Folgerungsoperatoren definiert, werden in der klassischen Belief-Revision weitere Eigenschaften gefordert: Cn soll supraklassisch sein, die Deduktionseigenschaft haben und Kompaktheit erfüllen.

Definition A.33. Sei Cn ein Folgerungsoperator für $\mathcal{L}$.

1. Cn ist *supraklassisch* gdw. für alle Satzmengen $X \subseteq \mathcal{L}$ und Sätze $\alpha \in \mathcal{L}$ gilt: Wenn α bzgl. der klassischen aussagenlogischen Folgerungsbeziehung $\models$ aus X folgt, $X \models \alpha$, dann auch $X \vdash_{\mathrm{Cn}} \alpha$.

2. Cn erfüllt die *Deduktionseigenschaft* gdw.: Für alle $X \subseteq \mathcal{L}$ und $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ ist $X \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathrm{Cn}} \beta$ genau dann, wenn $X \vdash_{\mathrm{Cn}} \alpha \to \beta$.[12]

3. Cn ist *kompakt* gdw.: Für alle $X \subseteq \mathcal{L}$ und $\alpha \in \mathcal{L}$ gilt: Wenn $X \vdash_{\mathrm{Cn}} \alpha$, dann gibt es ein endliches $X' \subseteq X$, so dass $X' \vdash_{\mathrm{Cn}} \alpha$.

Für einen Folgerungsoperator, der u.a. supraklassisch ist, lässt sich die Konsistenz einer Menge $X \subseteq \mathcal{L}$ definieren durch: Es gibt keinen Satz $\alpha \in \mathcal{L}$, so dass $X \vdash_{\mathrm{Cn}} \alpha$ und $X \vdash_{\mathrm{Cn}} \neg\alpha$.

[12] Für Folgerungsoperatoren über beschreibungslogischen Sätzen muss zur Erfüllung der Deduktionseigenschaft eine erweiterte Logik wie DPL definiert. Betrachtet man Folgerungsoperatoren für die Menge von Konzeptbeschreibungen, lässt sich ein zweistelliger Konzeptkonstruktor $\to$ für Konzeptbeschreibungen C, D durch die Äquivalenz $(C \to D) \doteq \neg C \sqcup D$ definieren; bzgl. diesem Konzeptkonstruktor erfüllen alle Beschreibungslogiken, die die Bildung der Konzeptnegation und der Konzeptdisjunktion gestatten, die Deduktionseigenschaft.

Für die aussagenlogischen und prädikatenlogischen Operatoren $\mathrm{Cn}_{\models}$, die von der Folgerungsbeziehung $\models$ induziert werden, kann man diese drei Eigenschaften nachweisen.

Die Kompaktheitseigenschaft, die in dieser Arbeit benutzt wird, wird auch von Beschreibungslogiken erfüllt, die sich erfüllbarkeitsäquivalent in ein Fragment der Prädikatenlogik übersetzen lassen. Der Kompaktheitssatz (Endlichkeitssatz) lässt sich für Logiken, für die eine Semantik erklärt ist, auch äquivalent wie folgt formulieren.

Theorem A.34. *(Ben-Ari, 2001, S. 51 u. 121) Für jede Menge X von Sätzen in AL oder PL (sowie Beschreibungslogiken, die erfüllbarkeitsäquivalent in PL einbettbar sind) gilt: X ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von X erfüllbar ist.*

Eine weitere Eigenschaft, die in dieser Arbeit benutzt wird, ist die Interpolationseigenschaft:

Definition A.35. Es sei Cn ein Folgerungsoperator über einer logischen Sprache $\mathcal{L}$. Cn erfüllt die *Interpolationseigenschaft* genau dann, wenn für alle $X \subseteq \mathcal{L}$ und $\alpha \in \mathcal{L}$ gilt: Wenn $\alpha \in \mathrm{Cn}(X)$, dann gibt es ein $\beta \in \mathcal{L}$ (der so genannte *Interpolant*) mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{V}(\beta) = \mathcal{V}(X) \cap \mathcal{V}(\alpha)$ und $\beta \in \mathrm{Cn}(X)$ sowie $\alpha \in \mathrm{Cn}(\beta)$.

Auf der Basis eines Folgerungsoperators wird der für die Belief-Revision wichtige Begriff einer Restmenge erklärt.

Definition A.36. (Alchourrón und Makinson, 1981) Für zwei Mengen von Sätzen X_1, X_2 einer logischen Sprache mit Folgerungsoperator Cn wird die *Restmenge von X_1 modulo X_2*, kurz $X_1 \perp X_2$, definiert durch: $Y \in X_1 \perp X_2$ genau dann, wenn:

1. $Y \subseteq X_1$;
2. $\mathrm{Cn}(Y) \cap X_2 = \emptyset$ und
3. es gibt keine Menge Y', so dass $Y \subset Y' \subseteq X_1$ und $\mathrm{Cn}(Y') \cap X_2 = \emptyset$, d.h. Y ist inklusionsmaximal bzgl. der ersten beiden Eigenschaften.

Eine Menge $Y \in X_1 \perp X_2$ wird *ein Rest von X_1 durch X_2* genannt.

Einen hierzu dualen Begriff, der in der Definition meiner Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien benutzt wird, bezeichne ich als *duale Restmenge*.

Definition A.37. Für zwei Mengen von Sätzen X_1, X_2 in einer logischen Sprache mit Folgerungsoperator Cn und einem mit Cn erklärten Konsistenzbegriff wird die *duale Restmenge von X_1 modulo X_2*, kurz $X_1 \top X_2$, definiert durch: $Y \in X_1 \top X_2$ genau dann, wenn:

1. $Y \subseteq X_1$;
2. $Y \cup X_2$ ist konsistent und
3. es gibt keine Menge Y', so dass $Y \subset Y' \subseteq X_1$ und $Y' \cup X_2$ ist konsistent, d.h. Y ist inklusionsmaximal bzgl. der ersten beiden Eigenschaften.

Selektionsfunktionen wurden von AGM (Alchourrón et al., 1985) ursprünglich für Restmengen definiert.

Definition A.38. (Alchourrón et al., 1985) Sei $X \subseteq \mathcal{L}$ eine Menge von Sätzen. Eine *AGM-Selektionsfunktion* $\gamma : \mathrm{Pot}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{Pot}(\mathcal{L})$ für X ist eine Funktion, so dass für alle Sätze α gilt:

1. Falls $X \perp \alpha \neq \emptyset$, dann $\emptyset \neq \gamma(X \perp \alpha) \subseteq X \perp \alpha$;
2. $\gamma(\emptyset) = \{X\}$

In dieser Arbeit wird für die Definition der Reinterpretationsoperatoren für triggernde Ontologien ein anderer Begriff der Selektionsfunktion zu Grunde gelegt, der die Definition von Rott (1993) verallgemeinert.

Definition A.39. Sei Z eine Klasse von Mengen mit $\emptyset \in Z$. Eine *Selektionsfunktion (für Z)* ist eine Funktion $\gamma : Z \longrightarrow \mathrm{Pot}(\mathcal{L})$, so dass für alle Mengen $X \in Z$ gilt:

1. $\emptyset \neq \gamma(X) \subseteq X$
2. $\gamma(\emptyset) = \emptyset$

Bei der Behandlung eines Relevanzpostulats für Reinterpretationsoperatoren (s. Kapitel 5) und in Abschnitt 4.2 zur Repräsentation von Reinterpretation als Revision von Hypothesen werden Anreicherungen von Wissensbasen betrachtet. Eine Form von Anreicherung ist durch den disjunktiven Abschluss einer Menge gegeben.

Definition A.40. (Hansson, 1999b, S. 23) Der disjunktive Abschluss $\mathrm{DisA}(B)$ einer Menge B wird definiert durch:

$$\mathrm{DisA}(B) = B \cup \{\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in B\}$$

B
Beweise

B.1 Beweise zu Kapitel 2

Beweis von Beobachtung 2.32 (S. 62).
Ad (MR 1)
Dieses Postulat ist streng genommen nicht anwendbar, da Goeb und Kollegen nicht erklären, wie das Integrationsresultat für abgeschlossene Ontologien aussieht.

Ad (MR 2)
Dieses Postulat wird nicht erfüllt, da Substitutionen in der Senderontologie zum Verlust der ursprünglich in ihr enthaltenen Axiome führen kann.
Ad (MR 3)
Dieses Postulat wird wegen der Einführung neuer Symbole (im Inkonsistenzfall) nicht erfüllt.

Ad (MR 4)
Im Falle der Konsistenz werden Sender- und Empfängerontologie vereinigt.

Ad (MR 5)
Ist die Empfängerontologie inkonsistent, ist auch das Integrationsresultat inkonsistent (da Substitutionen die Inkonsistenz nicht aufheben können). Davon unab-

hängig kann die Senderontologie konsistent sein.

Ad (MR 6)
Ein Gegenbeispiel liefern die äquivalenten Mengen von Axiomen O_2', O_2 auf Senderseite und die Menge von Axiomen O_1 auf Empfängerseite.

$$\begin{aligned} O_1 &= \{K(c), (\exists R.K \sqcup \exists R.\exists R.K)(a)\} \\ O_2 &= \{\neg K(c), \exists R.K \sqcup \exists R.\exists R.K \sqsubseteq \bot\} \\ O_2' &= \{\neg K(c), \exists R.K \sqsubseteq \bot, \exists R.\exists R.K \sqsubseteq \bot\} \end{aligned}$$

Die Integration von O_1 und O_2 kann eine Menge von Ontologieaxiomen O_{res} der folgenden Form liefern:

$$\begin{aligned} O_{res} &= \{K(c), (\exists R.K \sqcup \exists R.\exists R.K)(a), \\ &\quad \neg\sigma_2(K)(c), \exists R.\sigma_2(K) \sqcup \exists R.\exists R.\sigma_2(K) \sqsubseteq \bot, \sigma_2(K) \sqsubseteq K, \} \\ &\not\models \exists R.\exists R.K \sqsubseteq \bot \end{aligned}$$

Die Integration von O_1 und O_2' hingegen kann eine Menge von Ontologieaxiomen O_{res}' der folgenden Form ergeben:

$$\begin{aligned} O_{res}' &= \{K(c), (\exists R.K \sqcup \exists R.\exists R.K)(a), \\ &\quad \neg\sigma_2(K)(c), \exists R.\sigma_2(K) \sqsubseteq \bot, \exists R.\exists R.K \sqsubseteq \bot, \sigma_2(K) \sqsubseteq K\} \\ &\quad \models \exists R.\exists R.K \sqsubseteq \bot \end{aligned}$$

Damit ist $O_{res} \not\equiv O_{res}'$. □

B.2 Beweise zu Kapitel 3

Beweis von Beobachtung 3.3 (S. 72). „$\leftarrow$“: Ist anzkomp(O_1, O_2), dann gibt es Modelle $\mathcal{I}_1 \models O_1$ und $\mathcal{I}_2 \models O_2$ mit $|\Delta^{\mathcal{I}_1}| = |\Delta^{\mathcal{I}_2}|$. O.E. kann angenommen werden, dass $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \Delta^{\mathcal{I}_2}$. Sei $\sigma_1 \in \mathrm{AR}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$ eine Substitution mit Träger $\mathcal{V}_c$ sowie $\sigma_1[\mathcal{V}_c] \cap \mathcal{V}(O_1) \cap \mathcal{V}_i = \emptyset$ und $\sigma_2 \in \mathrm{AR}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i')$ ebenfalls eine Substitution mit Träger $\mathcal{V}_c$ und $\sigma_2[\mathcal{V}_c] \cap \mathcal{V}(O_2) \cap \mathcal{V}_i' = \emptyset$. Solche Substitutionen existieren, da $\mathcal{V}_i$ und $\mathcal{V}_i'$ unendlich sind. Die neue Interpretation $\mathcal{I}$ wird wie folgt definiert:

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}_1}$
- $(\sigma_j(s))^{\mathcal{I}} = s^{\mathcal{I}_j}$ für alle Symbole $s \in \mathcal{V}(O_j) \cap \mathcal{V}_c$, $j \in \{1, 2\}$
- $s^{\mathcal{I}} = s^{\mathcal{I}_j}$ für alle $s \in \mathcal{V}(O_j) \cap (\mathcal{V}_i)_j$, $j \in \{1, 2\}$

- $s^{\mathcal{I}}$ beliebig für alle anderen Symbole $s \in \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i \cup \mathcal{V}_i'$

Dann gilt $\mathcal{I} \models O_1\sigma_1 \cup O_2\sigma_2$, also rekomp$(O_1, O_2)$.

„$\rightarrow$": Sei umgekehrt rekomp(O_1, O_2). Es gebe also Substitutionen σ_1, σ_2 und ein Modell $\mathcal{I} \models O_1\sigma_1 \cup O_2\sigma_2$. O.E. kann vorausgesetzt werden, dass der Träger von σ_1 und σ_2 jeweils das gesamte Vokabular ist und dass für $j \in \{1, 2\}$ gilt: $\sigma_j[\mathcal{V}_c] \cap \mathcal{V}(O_j) \cap (\mathcal{V}_i)_j = \emptyset$. Es werde $\mathcal{I}_j$ für $j \in \{1, 2\}$ wie folgt definiert:

- $\Delta^{\mathcal{I}_j} = \Delta^{\mathcal{I}}$
- $(s)^{\mathcal{I}_j} = (\sigma_j(s))^{\mathcal{I}}$ für alle $s \in \mathcal{V}_c$
- $(s)^{\mathcal{I}_j} = (s)^{\mathcal{I}}$ für $s \in \mathcal{V}(O_j) \cap (\mathcal{V}_i)_j$
- $(s)^{\mathcal{I}_j}$ beliebig für alle anderen s

Dann gilt per Konstruktion $\mathcal{I}_j \models O_j$ und $|\Delta^{\mathcal{I}_1}| = |\Delta^{\mathcal{I}_2}|$, folglich anzkomp$(O_1, O_2)$. □

Beobachtung B.1 vereinfacht die Modellbildungen in den folgenden Beweisen.

Beobachtung B.1. *Sei $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle$ eine Ontologie, M_1, M_2 Mengen von Formeln über dem Vokabular $\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i$. Seien $K \in \mathcal{V}_c$, $K' \in \mathcal{V}_i \setminus \mathcal{V}(O \cup M_2)$, $L \in (\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i) \setminus \mathcal{V}(O \cup M_1 \cup M_2)$ Konzeptsymbole, $\sigma = [K/L, K'/K]$ eine Substitution und $O' = O_{[K/K']} \cup M_1 \cup M_2$.*

Sei weiter $a \in \mathcal{V}_c$ eine Konstante, $\alpha = K(a)$ oder $\alpha = \neg K(a)$, und $\circ_1$ und $\circ_2$ ein Paar korrespondierender Typ-1- und Typ-2-Operatoren. Dann gilt:

1. *$O'\sigma = O \cup M_1\sigma \cup (M_2)_{[K/L]}$*
2. *$O \subseteq O'\sigma$*
3. *O' hat ein Modell gdw. $O'\sigma$ ein Modell hat.*
4. *Falls $O \cup \{\alpha\}$ inkonsistent ist und K' das in $O \circ_2 \alpha$ bzw. $O \circ_1 \alpha$ neu eingeführte Symbol ist, dann gilt $O \subseteq (O \circ_1 \alpha)_{[K'/L]} = (O \circ_2 \alpha)\sigma$.*

Beweis von Beobachtung 3.13 (S. 87). Es seien im Folgenden $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle$, $\mathcal{O}' = \langle O', \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i\rangle$ Ontologien, α, β konzeptbasierte Literale mit $\mathcal{V}(\alpha), \mathcal{V}(\beta) \subseteq \mathcal{V}_c$.

Ad Beobachtung 3.13.1 und 3.13.2
Rechtsextensionalität (Reint 1b) wird trivialerweise erfüllt, da für Trigger $\alpha \equiv \beta$ genau dann gilt, wenn $\alpha = \beta$ ist. Die Vakuität (Reint 2) betreffend wird sogar eine eine stärkere Variante erfüllt: $O \circ \alpha = O \cup \{\alpha\}$ gdw. $O \cup \{\alpha\}$ konsistent ist. Die Richtung von rechts nach links gilt per Definition. Ist $O \cup \{\alpha\}$ inkonsistent,

dann enthält $O \circ \alpha$ ein neues Symbol, so dass $O \circ \alpha \neq O \cup \{\alpha\}$.

Ad (Reint 3)
Sei $\alpha = K(a)$ oder $\alpha = \neg K(a)$. Falls $O \cup \{\alpha\}$ konsistent ist, gilt $O \circ \alpha = O \cup \{\alpha\}$. Falls $O \cup \{\alpha\}$ inkonsistent ist und $\circ = \circ_1$ ein Typ-1-Operator ist, gilt $O \circ \alpha = O \cup \{\alpha\}\sigma \cup B$, wobei B eine Menge von Brückenaxiomen ist und σ die Substitution mit Träger $\{K\}$, die vom Disambiguierungsschema Φ ausgewählt wird. Sei $K' = \sigma(K)$. Dann enthält jedes Brückenaxiom in B und auch $\alpha\sigma$ das neue Symbol K'. Daher ist $(O \circ_1 \alpha) \cap \text{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O)) = O \cap \text{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O)) = O$. Falls $O \cup \{\alpha\}$ inkonsistent ist und $\circ = \circ_2$ ein Typ-2-Operator, dann ist $O \circ_2 \alpha = O\sigma \cup \{\alpha\} \cup B$, wobei B wieder eine Menge von Brückenaxiomen und σ wie im Fall für Typ-1-Operatoren gewählt ist. Alle Brückenaxiome in B und alle nicht in O enthaltenen Formeln von $O\sigma$ enthalten K'. Daher gilt $(O \circ_2 \alpha) \cap \text{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O)) = (O\sigma \cup \{\alpha\} \cup B) \cap \text{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O)) = O\sigma \cap \text{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O)) \cup \{\alpha\} \subseteq O \cup \{\alpha\}$.

Die Konservierungs- und Rekonstruierbarkeitspostulate (Reint 5a)–(Reint 6b) werden per Definition erfüllt; unmittelbar aus den Definitionen folgt auch, dass Typ-1-Operatoren monoton sind (Reint 4a) und Typ-2-Operatoren zu einer erfolgreichen Integration führen (Reint 4b).

Ad Beobachtung 3.13.3
Sei $\alpha = K(a)$ oder $\alpha = \neg K(a)$ und es gelte $O \equiv O'$ sowie $\mathcal{V}(O) \cap \mathcal{V}_i = \mathcal{V}(O') \cap \mathcal{V}_i$. $O \cup \{\alpha\}$ ist damit genau dann konsistent, wenn $O' \cup \{\alpha\}$ konsistent ist. In diesem Falle gilt damit $O \circ \alpha = O \cup \{\alpha\} = O' \circ \alpha$. Im Inkonsistenzfall wird K internalisiert mittels Substitutionen, die das Disambiguierungsschema bestimmt. Aus der Voraussetzung folgt, dass für O und O' dieselbe Substitution $\sigma = \Phi(\{K\}, \mathcal{V}(O) \cap \mathcal{V}_i) = \Phi(\{K\}, \mathcal{V}(O') \cap \mathcal{V}_i)$ benutzt wird. Aus $O \equiv O'$ folgt für alle Mengen B von Formeln über $\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i$ auch $O\sigma \equiv O'\sigma$, $O \cup B \equiv O' \cup B$, $O \models \text{msc}_O(a) \doteq \text{msc}_{O'}(a)$ sowie $\text{oa}_i(O, K(a), K') = \text{oa}_i(O', K(a), K')$ und $\text{oa}_i(O, \neg K(a), K') = \text{oa}_i(O', \neg K(a), K')$ für $i \in \{1, 2\}$. Insbesondere gilt damit $(O \circ \alpha) \equiv (O' \circ \alpha)$.

Ad (Reint 7)
Die Reinterpretationsoperatoren für triggernde konzeptbasierte Literale erfüllen sogar die starke Version (AGM-R' 5) des Konsistenzpostulats: $O \circ \alpha$ ist genau dann konsistent, wenn O konsistent ist.

Falls $O \cup \{\alpha\}$ konsistent ist, sind O und $O \circ \alpha = O \cup \{\alpha\}$ konsistent. Daher muss nur noch der Fall betrachtet werden, dass $O \cup \{\alpha\}$ inkonsistent. Falls O inkonsistent ist, ist auch $O \circ_1 \alpha$ wegen Monotonie inkonsistent und die Inkonsistenz von $O \circ_2 \alpha$ folgt mit Beobachtung B.1.3. Wenn O konsistent ist, hat es ein Modell $\mathcal{I} \models O$. Ich zeige die Konsistenz von $O \odot_i \alpha$, die Konsistenz der anderen Operatoren $\circ_i$ folgt dann mit Beobachtung 3.12.1. Falls $\alpha = K(a)$, so $O \models \neg K(a)$ und $O \odot_1 \alpha =$

$O \cup \{K'(a), K \sqsubseteq K', K' \sqsubseteq K \sqcup \mathrm{msc}_O(a)\}$. Es wird eine Modifikation $\mathcal{J}$ von $\mathcal{I}$ definiert, so dass $K'^{\mathcal{J}} = K^{\mathcal{I}} \cup \{a^{\mathcal{I}}\}$ gilt. Dann folgt unmittelbar $\mathcal{J} \models O \odot_1 \alpha$. Falls $\alpha = \neg K(a)$, ist $O \models K(a)$ und $O \odot_1 \alpha = O \cup \{\neg K'(a), K' \sqsubseteq K, K \sqsubseteq K' \sqcup \mathrm{msc}_O(a)\}$. In diesem Falle wird die Modifikation $\mathcal{J}$ von $\mathcal{I}$ festgelegt durch $K'^{\mathcal{J}} = K^{\mathcal{I}} \setminus \{a^{\mathcal{I}}\}$. Auch hier gilt $\mathcal{J} \models O \odot_1 \alpha$. Mit Beobachtung B.1.3 folgt die Konsistenz von $O \odot_2 \alpha$. □

Beweis von Proposition 3.16 (S. 89).

Sei O eine Menge von Ontologieaxiomen und α ein Literal, so dass $O \cup \{\alpha\}$ inkonsistent ist. Es sei weiter $\circ_1$ ein Reinterpretationsoperator des Typs 1 für triggernde konzeptbasierte Literale. Es ist zu zeigen, dass $O \circ_1 \alpha$ eine konservative Erweiterung von O ist. Sei β eine Formel mit $\mathcal{V}(\beta) \subseteq \mathcal{V}(O)$. Wenn $O \models \beta$, dann gilt wegen Monotonie von $\circ_1$ auch $O \circ_1 \alpha \models \beta$. Nimm daher an, dass $O \not\models \beta$. Es ist zu zeigen, dass auch $O \circ_1 \alpha \not\models \beta$. Ich zeige die Aussage für $\circ_1 = \odot_1$. Für die anderen Typ-1-Operatoren ($\otimes_1$, $\oplus_1^{\mathrm{expl}}$ und $\oplus_1^{\mathrm{sel}}$) folgt die Aussage mit der Beobachtung 3.12.1.

Sei $\alpha = K(a)$ zunächst ein positives Literal und

$$O \odot_1 K(a) = O \cup \{K \sqsubseteq K', K' \sqsubseteq K \sqcup \mathrm{msc}_O(a), K'(a)\}$$

Da $O \not\models \beta$, existiert ein Modell $\mathcal{I} \models O \cup \neg\{\beta\}$. Es wird eine Modifikation $\mathcal{J}$ von $\mathcal{I}$ definiert durch $K'^{\mathcal{J}} = K^{\mathcal{I}} \cup \{a^{\mathcal{I}}\}$. Dann gilt $\mathcal{J} \models O \cup \{\neg\beta\}$, da $\mathcal{J}$ für alle Symbole in $\mathcal{V}(O)$ mit $\mathcal{I}$ identisch ist und $\mathcal{I} \models O \cup \{\neg\beta\}$ gilt; weiter gilt wegen der Konstruktion von $\mathcal{J}$, dass $\mathcal{J} \models \{(K \sqsubseteq K'), (K' \sqsubseteq K \sqcup \mathrm{msc}_O(a)), K'(a)\}$ und daher $\mathcal{J} \models O \odot_1 K(a) \cup \{\neg\beta\}$.

Ist $\alpha = \neg K(a)$ ein negatives Literal wird in ähnlicher Weise argumentiert. Hierfür wird die Modifikation $\mathcal{J}$ mit $K'^{\mathcal{J}} = K^{\mathcal{I}} \setminus \{a^{\mathcal{I}}\}$ gewählt. □

Beweis von Proposition 3.17 (S. 90). Sei $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine Ontologie, $K \in \mathcal{V}_c$ ein Konzeptsymbol, $a, c \in \mathcal{V}_c$ Konstanten, so dass $\mathrm{msc}_O(a)$ existiert. Sei $\alpha = K(a)$ und $\epsilon = K(c)$ oder $\alpha = \neg K(a)$ und $\epsilon = \neg K(c)$, so dass $O \models \neg\alpha$. Sei $K' \in \mathcal{V}_i \setminus \mathcal{V}(O)$ das zur Disambiguierung verwendete Symbol in $O \circ_2 \alpha$ und β eine Formel mit $\mathcal{V}(\beta) \subseteq (\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O)) \setminus \{K\}$.

In den folgenden Beweisen wird der Lesbarkeit wegen die Substitution $\sigma = [K/L, K'/K]$ mit $L \in (\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i) \setminus \mathcal{V}(O \circ_2 \alpha)$ aus Beobachtung B.1 und hierin die vierte Teilaussage $O \subseteq (O \circ_2 \alpha)\sigma$ genutzt.

Ad 3.17.1 ($O \circ_2 \alpha \models \beta$ gdw. $O \models \beta$))
Da $K, K' \notin \mathcal{V}(\beta)$, gilt $\beta\sigma = \beta$. Es wird zunächst angenommen, dass $O \models \beta$ gilt. Es ist zu zeigen: $O \circ_2 \alpha \models \beta$. Anwendung von σ reduziert die Aufgabe auf einen Beweis von $(O \circ_2 \alpha)\sigma \models \beta$. Dieses gilt aber wegen $O \subseteq (O \circ_2 \alpha)\sigma$ und der Monotonie der Folgerungsbeziehung $\models$.

Für den Beweis der anderen Richtung werde zunächst der Fall $\alpha = K(a)$ angenommen und $\odot_2$ anstelle von $\circ_2$ benutzt. Es gelte $O \odot_2 K(a) \models \beta$. Anwendung von σ führt zu $O \cup \{L(a), K \sqsubseteq L, L \sqsubseteq K \sqcup \mathrm{msc}_O(a)\} \models \beta$. Sei $\mathcal{I}$ ein Modell von O. Sei $\mathcal{J}$ eine Modifikation von $\mathcal{I}$ mit $L^{\mathcal{J}} = K^{\mathcal{I}} \cup \{a^{\mathcal{I}}\}$. Dann gilt

$$\mathcal{J} \models O \cup \{L(a), K \sqsubseteq L, L \sqsubseteq K \sqcup \mathrm{msc}_O(a)\}$$

und daher $\mathcal{J} \models \beta$. Da L nicht in β vorkommt, folgt $\mathcal{I} \models \beta$. Damit ist gezeigt, dass, wenn $O \odot_2 K(a) \models \beta$, dann auch $O \models \beta$. Die allgemeinere Aussage für $\circ_2$ folgt mit Beobachtung 3.12.1.

Der Fall $\alpha = \neg K(a)$ wird in vergleichbarer Weise bewiesen; hier wird allerdings die Modifikation $\mathcal{J}$ von $\mathcal{I}$ mit $L^{\mathcal{J}} = K^{\mathcal{I}} \setminus \{a^{\mathcal{I}}\}$ gewählt.

Ad 3.17.2 ($O \circ_2 \alpha \models \epsilon$ gdw. $O \cup \{a \not\doteq c\} \models \epsilon$)
Zunächst wird der Fall $\alpha = K(a)$ und $\epsilon = K(c)$ betrachtet. Es wird vorausgesetzt, dass $O \cup \{a \not\doteq c\} \models K(c)$. Dann gilt auch $O \circ_2 K(a) \cup \{a \not\doteq c\} \models K'(c)$ und, da $K' \sqsubseteq K \in O \circ_2 K(a)$, auch $O \circ_2 K(a) \cup \{a \not\doteq c\} \models K(c)$. Sei $\mathcal{I}$ ein Modell von $O \circ_2 K(a)$. Falls $a^{\mathcal{I}} \neq c^{\mathcal{I}}$, dann $\mathcal{I} \models a \not\doteq c$ und damit $\mathcal{I} \models K(c)$. Falls $a^{\mathcal{I}} = c^{\mathcal{I}}$, dann wegen $K(a) \in O \circ_2 K(a)$ auch $c^{\mathcal{I}} \in K^{\mathcal{I}}$, d.h. $\mathcal{I} \models K(c)$.

Sei nun $O \cup \{a \not\doteq c\} \not\models K(c)$ und $\mathcal{I}$ ein Modell von $O \cup \{a \not\doteq c, \neg K(c)\}$. Damit gilt $a^{\mathcal{I}} \neq c^{\mathcal{I}}$ und $c^{\mathcal{I}} \notin K^{\mathcal{I}}$. Es ist $O \odot_2 K(a) \not\models K(c)$ zu zeigen. Die allgemeine Behauptung für $\circ_2$ folgt dann mit Beobachtung 3.12.1. Anwenden von σ auf beiden Seiten der Folgerungsbeziehung reduziert die Aufgabe auf einen Beweis von

$$O \cup \{L(a), K \sqsubseteq L, L \sqsubseteq K \sqcup \mathrm{msc}_O(a)\} \not\models L(c) \tag{B.1}$$

Sei $\mathcal{J}$ eine Modifikation von $\mathcal{I}$ mit $L^{\mathcal{J}} = K^{\mathcal{I}} \cup \{a^{\mathcal{I}}\}$. Dann ist $\mathcal{J} \models O \cup \{\neg K(c)\}$ und auch $\mathcal{J} \models \{L(a), K \sqsubseteq L, L \sqsubseteq K \sqcup \mathrm{msc}_O(a), \neg L(c)\}$, was Gleichung (B.1) zeigt.

Der Beweis für den anderen Fall ($\alpha = \neg K(a)$ und $\epsilon = \neg K(c)$) wird in vergleichbarer Weise geführt, indem die Modifikation $\mathcal{J}$ des Modells $\mathcal{I} \models O \cup \{a \not\doteq c, K(c)\}$ durch $L^{\mathcal{J}} = K^{\mathcal{I}} \setminus \{a^{\mathcal{I}}\}$ festgelegt wird.

Ad 3.17.3 ($O \otimes_2 \alpha \not\models \neg\epsilon$)
Es wird zunächst der Fall $\alpha = K(a)$ und $\epsilon = K(c)$ betrachtet. Sei $\mathcal{I} \models O \otimes_2 K(a)$. Die Modifikation $\mathcal{J}$ von $\mathcal{I}$ wird durch $K^{\mathcal{J}} = \Delta^{\mathcal{I}}$ festgesetzt. Dann gilt $\mathcal{J} \models O \otimes_2 K(a) \cup \{K(c)\}$. (Man beachte, dass $K' \sqsubseteq K$ und $K(a)$ die einzigen Formeln in $O \otimes_2 K(a)$ sind, die K enthalten.)

Im anderen Fall sei $\mathcal{I} \models O \otimes_2 \neg K(a)$ und $\mathcal{J}$ die Modifikation von $\mathcal{I}$ mit $K^{\mathcal{J}} = \emptyset$. Dann ist $\mathcal{J} \models O \otimes_2 \neg K(a) \cup \{\neg K(c)\}$.

Ad 3.17.5 ($O \oplus_2^{\mathrm{sel}} \alpha \models \neg\epsilon$ gdw.$O \models \neg\epsilon$ und $O \models \neg \prod \widetilde{\mathrm{sel}}(\mathrm{oa}_2(O, \alpha, K'))_{[K'/K]}(c)$)
Es wird folgende Abkürzung verwendet

$$M = \prod \widetilde{\mathrm{sel}}(\mathrm{oa}_2(O, K(a), K'))_{[K'/K]}$$

$\sigma = [K/L, K'/K]$ ist wieder die Substitution, die in Beobachtung B.1 verwendet wird.

Es wird erst der Fall $\alpha = K(a)$ und $\epsilon = K(c)$ betrachtet. Gelte $O \models \neg K(c)$ und $O \models \neg \prod \widetilde{\mathrm{sel}}(\mathrm{oa}_2(O, K(a), K'))_{[K'/K]}(c)$. Dann gilt auch $O \oplus_2^{\mathrm{sel}} K(a) \models \neg M_{[K/K']}(c)$. Da $\mathrm{sel}(\mathrm{oa}_2(O, K(a), K')) \subseteq O \oplus_2^{\mathrm{sel}} K(a)$, gilt für alle $C \in \widetilde{\mathrm{sel}}(\mathrm{oa}_2(O, K(a), K'))$, dass $O \oplus_2^{\mathrm{sel}} K(a) \models K \sqsubseteq K' \sqcup C$, also $O \oplus_2^{\mathrm{sel}} K(a) \models K \sqsubseteq K' \sqcup M_{[K/K']}$; somit folgt auch $O \oplus_2^{\mathrm{sel}} K(a) \models \neg K(c)$.

Zum Beweis der anderen Richtung zeige ich, dass, wenn $O \not\models \neg M(c)$, dann $O \oplus_2^{\mathrm{sel}} K(a) \not\models \neg K(c)$ gilt, und wenn $O \not\models \neg K(c)$, dann ebenfalls $O \oplus_2^{\mathrm{sel}} K(a) \not\models \neg K(c)$ gilt.

Gelte $O \not\models \neg M(c)$ und sei $\mathcal{I} \models O \cup \{M(c)\}$. Damit gilt:

$$\begin{array}{rl} \mathcal{I} \models C'(c) & \text{für alle } C' \in \widetilde{\mathrm{sel}}(\mathrm{oa}_2(O, K(a), K'))_{[K'/K]} \text{ bzw.} \\ \mathcal{I} \models C_{[K'/K]}(c) & \text{für alle } C \in \widetilde{\mathrm{sel}}(\mathrm{oa}_2(O, K(a), K')) \end{array}$$

Bilde die Modifikation $\mathcal{J}$ von $\mathcal{I}$ mit $L^{\mathcal{J}} = K^{\mathcal{I}} \cup \{a^{\mathcal{I}}, c^{\mathcal{I}}\}$. Dann gilt $c^{\mathcal{J}} \in L^{\mathcal{J}}$ und $\mathcal{J} \models C_{[K'/K]} = C_{[K/L, K'/K]}$ (da $K \notin C$). Es ist

$$\begin{array}{rcl} (O \oplus_2^{\mathrm{sel}} K(a))\sigma & = & O \cup \{K \sqsubseteq L\} \cup \{L(a)\} \cup \\ & & \{L \sqsubseteq K \sqcup C_{[K/L, K'/K]} \mid C \in \widetilde{\mathrm{sel}}((\mathrm{oa}_2(O\sigma, K(a), K'))\} \end{array}$$

Damit folgt $\mathcal{J} \models (O \oplus_2^{\mathrm{sel}} K(a))\sigma$. Insgesamt also $\mathcal{J} \models (O \oplus_2^{\mathrm{sel}} K(a) \cup \{K(c)\})\sigma$, was zu $O \oplus_2^{\mathrm{sel}} K(a) \not\models \neg K(c)$ führt.

Nimm nun an, dass $O \not\models \neg K(c)$. Sei $\mathcal{I} \models O \cup \{K(c)\}$. Es wird die Modifikation $\mathcal{J}$ von $\mathcal{I}$ mit $L^{\mathcal{J}} = K^{\mathcal{I}} \cup \{a^{\mathcal{I}}, c^{\mathcal{I}}\}$ benutzt. Wie oben zeigt man, dass die Beziehung $\mathcal{J} \models (O \oplus_2^{\mathrm{sel}} K(a) \cup \{K(c)\})\sigma$ gilt; daraus folgt $O \oplus_2^{\mathrm{sel}} K(a) \not\models \neg K(c)$.

In den anderen Fällen ($\alpha = \neg K(a)$ und $\epsilon = \neg K(c)$) werden ähnliche Konstruktionen verwendet. Im zweiten Teil des Beweises ist eine Modifikation $\mathcal{J}$ eines Modells $\mathcal{I}$ für $O \cup \{M(c)\}$ bzw. $O \cup \{\neg K(c)\}$ zu wählen mit $L^{\mathcal{J}} = K^{\mathcal{I}} \setminus \{a^{\mathcal{I}}, c^{\mathcal{I}}\}$.

Ad 3.17.4
Folgt als Spezialfall aus 3.17.5. □

B.3 Beweise zu Kapitel 4

B.3.1 Beweise zu Abschnitt 4.1

Für den Beweis der Beobachtung 4.2 wird folgendes Lemma benötigt.

Lemma B.2. *Sei O eine Menge von aussagenlogischen Sätzen, mit $\mathcal{V}(O) \subseteq \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i$ und $p' \notin \mathcal{V}(O)$. Dann ist die Menge der aus $O_{[p/p']} \cup \{p' \to p\}$ folgenden Sätze über $\mathcal{V}_c$ darstellbar als Folgerung von in O geltenden Sätzen β über $\mathcal{V}_c$, in denen p semantisch positiv oder gar nicht vorkommt, kurz* $\mathrm{posVon}(p, \beta)$ *(vgl. Definition A.19, S. 237 in Anhang A).*

$$\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_{[p/p']} \cup \{p' \to p\}) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\{\beta \in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O) \mid \mathrm{posVon}(p, \beta)\})$$

Beweis.

Beweis von $\supseteq$: Sei $\phi \in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\{\beta \in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O) \mid \mathrm{posVon}(p, \beta)\})$. Da $\phi \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$, bleibt zu zeigen, dass $\phi \in \mathrm{Cn}(O_{[p/p']} \cup \{p' \to p\})$. Nach Voraussetzung gibt es $\beta_1, \ldots, \beta_n$, in denen p positiv oder gar nicht vorkommt, $O \models \beta_i$, $\beta_i \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$ und $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \models \phi$. Sei $\beta = \bigwedge_{1 \le i \le n} \beta_i$. Dann kommt p auch in β positiv oder gar nicht vor und es gilt $O \models \beta$ sowie $\beta \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$ und $\beta \models \phi$. Es wird gezeigt, dass $O_{[p/p']} \cup \{p' \to p\} \models \beta$, so dass auch $O_{[p/p']} \cup \{p' \to p\} \models \phi$ folgt. Aus $O \models \beta$ folgt $O_{[p/p']} \models \beta_{[p/p']}$ und auch $O_{[p/p']} \cup \{p' \to p\} \models \beta_{[p/p']}$. Da p positiv oder gar nicht in β vorkommt, kommt p' positiv oder gar nicht in $\beta_{[p/p']}$ vor. Sei $\mathcal{I} \models O_{[p/p']} \cup \{p' \to p\}$. Dann ist auch $\mathcal{I} \models \beta_{[p/p']}$. Da $(p')^{\mathcal{I}} \le p^{\mathcal{I}}$ und p' positiv oder gar nicht in $\beta_{[p/p']}$ vorkommt, gilt nach Definition des positiven Vorkommens, dass $\mathcal{I}_{[p' \mapsto p^{\mathcal{I}}]} \models \beta_{[p/p']}$. Daher gilt auch $\mathcal{I} \models \beta$.

Beweis von $\subseteq$: Sei $\delta \in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_{[p/p']} \cup \{p' \to p\})$ und ϕ eine zu δ äquivalente Formel in KNF: $\phi = \bigwedge_{1 \le i \le k} kl_i$. Sei $I_+ \uplus I_- \uplus I_{+-} \uplus I_0 = \{1, \ldots, k\}$ eine Partitionierung, so dass für $i \in I_+$ p nur syntaktisch positiv in der Klausel kl_i vorkommt, für $i \in I_-$ p nur syntaktisch negativ in der Klausel kl_i vorkommt, für $i \in I_{+-}$ p syntaktisch positiv und negativ in der Klausel kl_i vorkommt und für $i \in I_0$ gar nicht in kl_i vorkommt.

Aus der Voraussetzung folgt

$$O_{[p/p']} \cup \{p' \to p\} \models \phi. \tag{B.2}$$

Aus dieser Gleichung (B.2) folgt auch, dass $O \models \phi$, und insbesondere, dass

$$O \models \bigwedge_{i \in I_+} kl_i \tag{B.3}$$

Die Ersetzung von p durch $\top$ in (B.2) ergibt

$$O_{[p/p']} \cup \{p' \to \top\} \models \phi_{[p/\top]} = \bigwedge_{1 \le i \le k} (kl_i)_{[p/\top]}$$

Da $p' \rightarrow \top$ allgemeingültig ist und p' nicht in $\phi_{[p/\top]}$ vorkommt, ergibt sich

$$O = O_{[p/p',p'/p]} \models \phi_{[p/\top,p'/p]} = \phi_{[p/\top]} = \bigwedge_{1 \leq i \leq k} (kl_i)_{[p/\top]}$$

Es werden nun für alle i mit $1 \leq i \leq k$ die Klauseln $(kl_i)_{[p/\top]}$ betrachtet. Für $i \in I_+$ ist $(kl_i)_{[p/\top]}$ allgemeingültig. Für $i \in I_-$ ist $(kl_i)_{[p/\top]} \models kl_i$. Für $i \in I_{+-}$ ist bereits kl_i eine Tautologie. Für $i \in I_0$ ist $(kl_i)_{[p/\top]} = kl_i$. Hieraus und aus (B.3) folgt, dass $\phi_{[p/\top]} \wedge \bigwedge_{i \in I_+} kl_i \models \phi$, also auch $\phi_{[p/\top]} \wedge \bigwedge_{i \in I_+} kl_i \models \delta$. Da p höchstens syntaktisch positiv in $\phi_{[p/\top]} \wedge \bigwedge_{i \in I_+} kl_i$ vorkommt, kommt es auch semantisch positiv oder gar nicht in $\phi_{[p/\top]} \wedge \bigwedge_{i \in I_+} kl_i$ vor. □

Beweis von Beobachtung 4.2 (S. 107). Ich zeige die Aussage für den Typ-2-Operator $\otimes_2$ und $\alpha = p$. (Die Beweise für Typ-1-Operatoren und für negative Literale sind strukturell ähnlich.) Wegen der Interpolationseigenschaft[1] ist $O \cup \{p\}$ genau dann konsistent, wenn $O' \cup \{p\}$ konsistent ist. Im Konsistenzfall ist $O \otimes_2 p = O \cup \{p\}$ und $O' \otimes_2 p = O' \cup \{p\}$. Ich zeige $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O \cup \{p\}) \subseteq \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O' \cup \{p\})$. Die andere Richtung wird im gleichen Stile bewiesen. Sei $\beta \in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O \cup \{p\})$. Dann gibt es O'' mit $\mathcal{V}(O'') \subseteq \mathcal{V}_c$ und $O \cup \{p\} \models O'' \models \beta$. Also insbesondere $O \models p \rightarrow \bigwedge O''$. Wegen $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O')$ gilt also auch $O' \models p \rightarrow \bigwedge O''$, woraus $O' \cup \{p\} \models O'' \models \beta$ folgt.

Im Inkonsistenzfall sind

$$\begin{aligned} O \otimes_2 p &= O_{[p/p^1]} \cup \{p^1 \rightarrow p, p\} \\ O' \otimes_2 p &= O_{[p/p^2]} \cup \{p^2 \rightarrow p, p\} \end{aligned}$$

Dabei sind p^1, p^2 interne Aussagensymbole mit $p^1 \in \mathcal{V}_i \setminus \mathcal{V}(O)$ und $p^2 \in \mathcal{V}_i \setminus \mathcal{V}(O')$. Mit Lemma B.2 folgt, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_{[p/p^1]} \cup \{p^1 \rightarrow p\}) &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\{\beta \in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O) \mid \mathrm{posVon}(p, \beta)\} \\ \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_{[p/p^2]} \cup \{p^2 \rightarrow p\}) &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\{\beta \in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O') \mid \mathrm{posVon}(p, \beta)\} \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O')$, gilt auch

$$\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_{[p/p^1]} \cup \{p^1 \rightarrow p, p\}) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_{[p/p^2]} \cup \{p^2 \rightarrow p, p\})$$

Mit dem Interpolationslemma zeigt man weiter, dass auch

$$\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_{[p/p^1]} \cup \{p^1 \rightarrow p, p\}) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_{[p/p^2]} \cup \{p^2 \rightarrow p, p\})$$

gilt. □

[1] Vgl. Definition A.35, S. 245.

Beweis von Beobachtung 4.4 (S. 107). $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}}(O) \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathcal{V}}(\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}}(O))$ gilt, da für alle Satzmengen $O_1 \subseteq \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$ die Beziehung $O_1 \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathcal{V}}(O_1)$ gilt (da $\mathrm{Cn}_{\mathcal{V}}$ ein klassischer Folgerungsoperator ist). Für die umgekehrte Untermengenbeziehung sei $\alpha \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{V}}(\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}}(O))$. Zu zeigen ist, dass $\alpha \in \mathrm{Cn}(O) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$. Nach Definition von $\mathrm{Cn}_{\mathcal{V}}$ (Definition 2.1, S. 16) gilt zunächst $\alpha \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V})$. Des weiteren gilt:

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{V}}(\mathrm{Cn}(O) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V})) &\overset{\text{Mon. von } \mathrm{Cn}_{\mathcal{V}}}{\subseteq} \mathrm{Cn}_{\mathcal{V}}(\mathrm{Cn}(O)) \\ &\overset{\text{Def. von } \mathrm{Cn}, \mathrm{Cn}_{\mathcal{V}}}{\subseteq} \mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(O)) \overset{\text{Idempotenz}}{\subseteq} \mathrm{Cn}(O) \end{aligned}$$

□

Beweis von Beobachtung 4.5 (S. 108). Man beachte, dass der Expansionsoperator $+$ in den Postulaten in diesem Kontext durch $B_1 + B_2 = \mathrm{Cn}_{\mathcal{V}_c}(B_1 \cup B_2)$ expliziert wird, wobei $\mathrm{Cn}_{\mathcal{V}_c}$ der Folgerungsoperator für die Menge der Interfacesätze $\mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$ ist.

Ad (MR 1)
Der Operator $(\otimes_2)^{\mathcal{V}_c}$ ist hier nur für Belief-Sets erklärt. Daher ist nur zu prüfen, dass das Integrationsergebnis abgeschlossen ist bzgl. des Folgerungsoperators $\mathrm{Cn}_{\mathcal{V}_c}$ für die Interfacesprache. Die Abgeschlossenheit gilt per Definition (s. Gleichung (4.1), S. 106).

Ad (MR 2)
Da $\otimes_2$ das Erfolgspostulat erfüllt, erfüllt auch $(\otimes_2)^{\mathcal{V}_c}$ das Erfolgspostulat.

Ad (MR 3)
Wenn $O_1 \cup O_2$ konsistent ist, dann ist $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1)(\otimes_2)^{\mathcal{V}_c}O_2 = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1 \cup O_2)$. Daher bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1 \cup O_2) \subseteq \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1) \cup O_2)$. Sei hierfür $O_1 \cup O_2 \models \beta$ und $\beta \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$. Dann gilt $O_1 \models (\bigwedge O_2) \rightarrow \beta$, damit auch $(\bigwedge O_2) \rightarrow \beta \in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1)$. Daher gilt auch $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1) \cup O_2 \models \beta$. Wenn $O_1 \cup O_2$ inkonsistent ist, ist $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1) \cup O_2) = \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$ und damit ebenfalls $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1)(\otimes_2)^{\mathcal{V}_c}O_2 \subseteq \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1) \cup O_2)$.

Ad (MR 4)
Sei $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1) \cup O_2$ konsistent. Dann ist wegen des Interpolationslemmas auch $O_1 \cup O_2$ konsistent, und $O_1 \otimes_2 O_2 = O_1 \cup O_2$. Da $\mathrm{Cn}_{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1) \cup O_2) \subseteq \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1 \cup O_2)$, folgt $\mathrm{Cn}_{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1) \cup O_2) \subseteq \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1)(\otimes_2)^{\mathcal{V}_c}O_2$.

Ad (MR 5)
Wenn O_1 inkonsistent ist, sind auch $O_1 \otimes_2 O_2$ und $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1)(\otimes_2)^{\mathcal{V}_c}O_2$ inkonsistent.

Daher erfüllt $(\otimes_2)^{\mathcal{V}_c}$ nicht (MR 5).

Zum Beweis der abgeschwächten Konsistenzpostulate sei $\otimes_2^{\mathcal{V}_c}$ zunächst ein aussagenlogischer Reinterpretationsoperator und nimm an, dass $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1)(\otimes_2)^{\mathcal{V}_c}O_2$ inkonsistent ist. Dann ist auch $O_1 \otimes_2 O_2$ inkonsistent und es folgt, da $\otimes_2$ das abgeschwächte Konsistenzpostulat erfüllt, dass O_1 oder O_2 inkonsistent ist. Daher ist $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1)$ oder O_2 inkonsistent.

Sei nun $\otimes_2^{\mathcal{V}_c}$ ein prädikatenlogischer Reinterpretationsoperator; seien $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1)$ und O_2 reinterpretationskompatibel. Dann sind auch O_1 und O_2 reinterpretationskompatibel. (Denn ansonsten gäbe es einen Satz α, der keine nichtlogischen Symbole enthält und für den $O_1 \models \alpha$ und $O_2 \models \neg\alpha$ gelten. Daraus folgte auch $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1) \models \alpha$ und $O_2 \models \neg\alpha$, womit $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1)$ und O_2 nicht reinterpretationskompatibel wären). Da $\otimes_2$ das Postulat (Reint 7) (S. 71) erfüllt, ist $O_1 \otimes_2 O_2$ konsistent und daher auch $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1 \otimes_2 O_2)$.

Ad (MR 6)
Folgt aus der Rechtsextensionalität von $\otimes_2$.

Ad (MR 7) und (MR 8)
Die ergänzenden Postulate werden im Allgemeinen nicht erfüllt. Das folgende Gegenbeispiel geht auf Delgrande und Schaub zurück.[2]

$$\begin{array}{rcl} O_1 &=& \{(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s)\} \\ O_2 &=& \{(\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s)\} \\ O_3 &=& \{(\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s)\} \end{array}$$

Es gilt

$$\begin{array}{rcl} O_3 &\models& O_2 \\ \mathrm{MRS}(O_1, O_2) &=& \{\{p\}, \{r\}\} \\ \mathrm{MRS}(O_1, O_3) &=& \{\{p\}, \{r, s\}\} \end{array}$$

Sei $\overline{\gamma} = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ ein Paar von Selektionsfunktionen, so dass für γ_1 gilt:

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1, O_2)) &=& \{\{p\}\} \\ \gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1, O_3)) &=& \{\{r, s\}\} \end{array}$$

[2] Delgrande und Schaub (Delgrande und Schaub, 2003, S. 13) benutzen dieses Beispiel, um zu zeigen, dass die Revisionsoperatoren $\dot{+}, \dot{+}_c$ nicht das Postulat (MR 8) erfüllen. Anders als die hier definierten Reinterpretationsoperatoren erfüllen $\dot{+}, \dot{+}_c$ das Postulat (MR 7).

gilt und γ_2 beliebig gewählt ist. Unter diesen Voraussetzungen folgt:

$$\begin{array}{rcl} O_1 \otimes_2^{\overline{\gamma}} O_3 & = & O_{1[r/r',s/s']} \cup O_3 \cup \{r' \to r, s' \to s\} \\ & \equiv & (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r' \wedge \neg s' \wedge r \wedge s) \wedge (r' \to r) \wedge (s' \to s) \\ & \text{und} & \\ \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1 \otimes_2^{\overline{\gamma}} O_3) & \equiv & \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \end{array}$$

Andererseits ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} O_1 \otimes_2^{\overline{\gamma}} O_2 & = & O_{1[p/p']} \cup O_2 \cup \{p' \to p\} \\ & \equiv & (\neg p' \wedge p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \wedge (p' \to p) \\ & \text{und} & \\ \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1 \otimes_2^{\overline{\gamma}} O_2) & \equiv & \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \\ & \not\models & \neg \bigwedge O_3 \\ & \text{und} & \text{folglich} \\ \mathrm{Cn}_{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1 \otimes_2^{\overline{\gamma}} O_2) \cup O_3) & \equiv & \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \end{array}$$

Damit folgt, dass

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1)(\otimes_2^{\overline{\gamma}})^{\mathcal{V}_c}(O_2 \cup O_3) & \not\subseteq & \mathrm{Cn}_{\mathcal{V}_c}((\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1)(\otimes_2^{\overline{\gamma}})^{\mathcal{V}_c} O_2) \cup O_3) \\ & \text{und} & \\ \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1)(\otimes_2^{\overline{\gamma}})^{\mathcal{V}_c}(O_2 \cup O_3) & \not\supseteq & \mathrm{Cn}_{\mathcal{V}_c}((\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1)(\otimes_2^{\overline{\gamma}})^{\mathcal{V}_c} O_2) \cup O_3) \end{array}$$

□

Beweis von Beobachtung 4.10 (S. 111). Sei $\mathcal{I}$ eine Belegung von α mit $\alpha^{\mathcal{I}} = 1$. Dann ist auch $(\mathrm{DNF}(\alpha))^{\mathcal{I}} = 1$. Also gibt es eine duale Klausel kl in $\mathrm{DNF}(\alpha)$, so dass $kl^{\mathcal{I}} = 1$. In $\theta_S(\alpha)$ gibt es nach Definition eine Teilklausel $kl' \subseteq kl$. Also ist auch $(\theta_S(\alpha))^{\mathcal{I}} = 1$.

Aus $\alpha^{\mathcal{I}} = 1$ folgt andererseits, dass $(\alpha_{\mathcal{I}})^{\mathcal{I}} = 1$, also auch $(\theta'_S(\alpha))^{\mathcal{I}} = 1$. □

Beweis von Beobachtung 4.11 (S. 111). Beweis von „$\supseteq$“: Folgt aus Beobachtung 4.10.

Beweis von „$\subseteq$“: Sei $\tilde{\theta} = \theta'$. Sei $\beta \notin \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}\setminus S}(\theta_S(\alpha))$. Dann gibt es eine zu $\bigvee_{\mathcal{I}\in\mathrm{Int}(S)} \alpha_v$ passende Belegung $\mathcal{I}_1$ mit $\mathcal{I}_1 \models \bigvee_{\mathcal{I}\in\mathrm{Int}(S)} \alpha_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{I}_1 \models \neg\beta$. Aus ersterem folgt, dass es ein $\mathcal{I} \in \mathrm{Int}(S)$ gibt, so dass $\mathcal{I}_1 \models \alpha_{\mathcal{I}}$. Bilde eine neue Belegung $\mathcal{I}_2$ mit $p^{\mathcal{I}_2} = p^{\mathcal{I}}$ für alle $p \in S$ und $p^{\mathcal{I}_2} = p^{\mathcal{I}_1}$ für alle anderen Aussagensymbole. Dann folgt, dass $\mathcal{I}_2 \models \neg\beta$ und $\mathcal{I}_2 \models \alpha$ und somit auch $\beta \notin \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}\setminus S}(\alpha)$.

Sei nun $\tilde{\theta} = \theta$. Es ist zu zeigen, dass für alle δ mit $\mathcal{V}(\delta) \subseteq \mathcal{V} \setminus S$ gilt: Wenn $\alpha \models \delta$, dann auch $\theta_S(\alpha) \models \delta$. Eine dazu äquivalente Aussage, die hier bewiesen werden soll, ist, dass für alle δ mit $\mathcal{V}(\delta) \subseteq \mathcal{V} \setminus S$ gilt: Wenn eine $\theta_S(\alpha) \cup \{\neg\delta\}$ wahr machende Belegung existiert, dann existiert auch eine $\alpha \cup \{\neg\delta\}$ wahr machende Belegung. Sei $\mathcal{I}$ eine Belegung mit $(\theta_S(\alpha) \cup \{\neg\delta\})^{\mathcal{I}} = 1$. Es gibt also eine duale Klausel kl' in $\theta_S(\alpha)$ mit $(kl')^{\mathcal{I}} = 1$. In DNF(α) kommt eine duale Klausel kl vor, aus der kl' hervorgeht, indem alle Symbole in S durch $\top$ ersetzt werden. Es werde eine Modifikation $\mathcal{I}'$ von $\mathcal{I}$ wie folgt definiert: Für alle $p \notin S$ sei $p^{\mathcal{I}'} = p^{\mathcal{I}}$. Für alle $p \in S$ sei $p^{\mathcal{I}'} = 1$, falls $p \in kl$. Dann gilt $kl^{\mathcal{I}'} = 1$ und somit auch $\alpha^{\mathcal{I}'} = 1$. Da $\mathcal{I}$ höchstens Aussagensymbole in S verändert, gilt auch $(\neg\delta)^{\mathcal{I}'} = 1$. □

Beweis von Korollar 4.12 (S. 111). Da $\alpha \models \theta_S(\alpha)$ (Beobachtung 4.10) und $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}\setminus S}(\alpha) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}\setminus S}(\theta'_S(\alpha))$ (Beobachtung 4.11) ist $\theta'_S(\alpha) \models \theta_S(\alpha)$. Entsprechend folgt aus $\alpha \models \theta'_S(\alpha)$ und $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}\setminus S}(\alpha) = \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}\setminus S}(\theta_S(\alpha))$, dass $\theta_S(\alpha) \models \theta'_S(\alpha)$, insgesamt also $\theta_S(\alpha) \equiv \theta'_S(\alpha)$. □

B.3.2 Beweise zu Abschnitt 4.2

Für den Beweis von Proposition 4.15 hilfreich ist Lemma B.3, das die Beziehung zwischen den minimalen Mengen an Reinterpretationssymbolen und den maximal konsistenten Brückenaxiomen beschreibt.

Lemma B.3. *Seien O_1, O_2 Satzmengen mit $\mathcal{V}(O_1) \subseteq \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i$, $\mathcal{V}(O_2) \subseteq \mathcal{V}_c$, $\sigma_{\mathcal{V}_c} \in \mathrm{AR}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$ eine Substitution mit Träger $\mathcal{V}_c$ und $\mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})$ die Menge an Brückenaxiomen gemäß Gleichung (4.2) (S. 114). Für alle Symbolmengen $S \subseteq \mathcal{V}_c$ ist $S \in \mathrm{MRS}(O_1, O_2)$ genau dann, wenn es eine Menge $X \in \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}) \top (O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2)$ gibt, so dass*

$$S = \{L \in \mathcal{V}_c \mid \{L \sqsubseteq \sigma_{\mathcal{V}_c}(L), \sigma_{\mathcal{V}_c}(L) \sqsubseteq L\} \not\subseteq X\} \tag{B.4}$$

Beweis. Sei abkürzend $L' = \sigma_{\mathcal{V}_c}(L)$. Wenn $S \in \mathrm{MRS}(O_1, O_2)$, dann ist die Menge $O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2 \cup \{L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L \mid L \in \mathcal{V}_c \setminus S\}$ konsistent. Also gibt es eine Menge $X \in \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}) \top (O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2)$ mit $X \supseteq \{L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L \mid L \in \mathcal{V}_c \setminus S\}$. Da S eine minimale Symbolmenge ist, für die $O_1\sigma_S \cup O_2$ konsistent ist, gilt für alle Symbole $L \in \mathcal{V}(X) \cap S$, dass $\{L \sqsubseteq L', L \sqsubseteq L\} \not\subseteq X$ und daher (B.4).

Ist $X \in \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}) \top (O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2)$, dann ist $S = \{L \in \mathcal{V}_c \mid \{L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L\} \not\subseteq X\}$ wegen der Konsistenz von X eine Symbolmenge, für die $O_1\sigma_S \cup O_2$ konsistent ist und wegen der Maximalität von X auch minimal, folglich $S \in \mathrm{MRS}(O_1, O_2)$. □

Beweis von Proposition 4.15 (S. 115).

Zum Beweis von Proposition 4.15 reicht es, die Gleichung (4.15) für Typ-2-Operatoren zu zeigen. Aufgrund der strukturellen Ähnlichkeit in den Definitionen der Typ-1- und Typ-2-Operatoren lassen sich die folgenden Beweise mit einfachen Ersetzungen in Beweise für die Typ-1-Operatoren überführen.

Es sei $\overline{\gamma} = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ das Paar an Selektionsfunktionen im schwachen Reinterpretationsoperator $\otimes_2^{\overline{\gamma}}$. Die Selektionsfunktion $\gamma = \gamma_{O_1}$ wird für festes O_1

und die Mengen $\mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})\top(O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2)$ für variables O_2 definiert. Für alle anderen Teilmengen $H \subseteq \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})$ ist γ undefiniert oder kann beliebig gesetzt werden, z.B. $\gamma(H) = \emptyset$. Es seien O_1 und O_2 vorgegeben, so dass γ für die Menge $H = BA(\sigma_{\mathcal{V}_c})\top(O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2)$ zu definieren ist. Hierfür wird die Menge von Abschätzungen $I = \mathrm{BA}(\sigma_{S^*})\top(O_1\sigma_{S^*} \cup O_2)$ bzgl. der kleineren Symbolmenge $S^* = \bigcup\gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1, O_2))$ betrachtet. $\gamma(H)$ besteht aus allen Mengen X in H, die sich darstellen lassen als Vereinigung einer Menge Y in $\gamma_2(I)$ und $\{L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L \mid L \in \mathcal{V}_c \setminus S^*\}$.

$$\begin{aligned}\gamma(BA(\sigma_{\mathcal{V}_c})\top(O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2)) &= \{X \in \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})\top(O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2) \mid \text{ Es gibt ein} \\ &\quad Y \in \gamma_2(\mathrm{BA}(\sigma_{S^*})\top(O_1\sigma_{S^*} \cup O_2)) \text{ mit} \\ &\quad X = Y \cup \{L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L \mid L \in \mathcal{V}_c \setminus S^*\}\}\end{aligned}$$

Es ist zu zeigen, dass γ eine wohldefinierte Funktion ist, d.h. dass γ nicht von der Darstellung der Menge H abhängt. Seien O_1, O_2' gegeben, so dass

$$\begin{aligned} I &= \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})\top(O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2) \\ I' &= \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})\top(O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2') \\ S^* &= \bigcup\gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1, O_2)) \\ S'^* &= \bigcup\gamma_1(\mathrm{MRS}(O_1, O_2'))\end{aligned}$$

Zum Beweis der Wohldefniertheit wird vorausgesetzt, dass $I = I'$ und folgende Aussage gezeigt:

$$\mathrm{BA}(\sigma_{S^*})\top(O_1\sigma_{S^*} \cup O_2) = \mathrm{BA}(\sigma_{S'^*})\top(O_1\sigma_{S'^*} \cup O_2') \tag{B.5}$$

Aus Lemma B.3 folgt mit $I = I'$, dass $\mathrm{MRS}(O_1, O_2) = \mathrm{MRS}(O_1, O_2')$ und damit auch $S^* = S'^*$. Ich zeige die $\subseteq$-Richtung der Gleichung (B.5). Die andere Richtung ergibt sich entsprechend aufgrund der Symmetrie der Aussage. Sei $X \in \mathrm{BA}(\sigma_{S^*})\top(O_1\sigma_{S^*} \cup O_2)$. Zu zeigen ist $X \in \mathrm{BA}(\sigma_{S^*})\top(O_1\sigma_{S^*} \cup O_2')$. Wegen $X \in \mathrm{BA}(\sigma_{S^*})\top(O_1\sigma_{S^*} \cup O_2)$ ist die Menge

$$Z_X = X \cup \{L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L \mid L \in \mathcal{V}_c \setminus S^*\}$$

enthalten in $\mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})\top(O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2) = I = I' = \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})\top(O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2')$. Folglich ist $X \cup O_1\sigma_{S^*} \cup O_2'$ konsistent. Es bleibt zu zeigen, dass X eine inklusionsmaximale Menge ist, für die $X \cup O_1\sigma_{S^*} \cup O_2'$ konsistent ist. Angenommen X ist keine inklusionsmaximale Menge, für die $X \cup O_1\sigma_{S^*} \cup O_2'$ konsistent ist. Dann gibt es ein Brückenaxiom $ba \in \{L_i \sqsubseteq L_i', L_i' \sqsubseteq L_i\}$ für $L_i \in S^*$, so dass $ba \notin X$ und $X \cup \{ba\} \cup O_1\sigma_{S^*} \cup O_2'$ konsistent ist. Dann ist aber auch die Menge $X \cup \{ba\} \cup \{L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L \mid L \in \mathcal{V}_c \setminus S^*\} \cup O_1\sigma_{S^*} \cup O_2' \supsetneq Z_X$ konsistent, im Widerspruch zur Maximalität von Z_X. Damit folgt $X \in \mathrm{BA}(\sigma_{S^*})\top(O_1\sigma_{S^*} \cup O_2')$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\text{Red}(O_1 \otimes_i^{\overline{\gamma}} O_2) = \text{Red}(O_1 \times_i^{\gamma} O_2)$ gilt. Hierfür ist im Wesentlichen zu zeigen, dass gilt

$$\text{Red}(\underbrace{\bigcap \gamma_2(\text{BA}(\sigma_{S^*})\top(O_1\sigma_{S^*} \cup O_2))}_{J}) = \text{Red}(\underbrace{\bigcap \gamma(\text{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})\top(O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2))}_{J'})$$

Sei $ba \in \text{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})$ eine (Ober- oder Unter-)Abschätzung des Symbols s. Sei $s' = \sigma_{\mathcal{V}_c}(s)$. Mit ba' werde die zu ba duale Abschätzung bezeichnet (d.h. ist $ba = s \sqsubseteq s'$, so ist $ba' = s' \sqsubseteq s$ und umgekehrt). Es ist zu zeigen, dass $ba \in \text{Red}(J)$ genau dann gilt, wenn $ba \in \text{Red}(J')$. Es werden zwei Fälle betrachtet.

Fall I ($s \in \mathcal{V}_c \setminus S^*$). In diesem Fall kommt ba nicht in J vor, somit gilt aber $ba \notin \text{Red}(J)$. Aus $s \in \mathcal{V}_c \setminus S^*$ folgt mit der Definition von γ, dass $\{ba, ba'\} \subseteq J'$. Wegen der Definition von $\text{Red}(\cdot)$ ist daher auch $ba \notin \text{Red}(J')$.

Fall II ($s \in S^*$). Sei $ba \in \text{Red}(J)$. Dann ist nach Definition von $\text{Red}(\cdot)$ $ba \in J$ und $ba' \notin J$. (Wäre $ba' \in J$, dann würde $J \models s \doteq s'$ folgen und ba könnte nicht in $\text{Red}(J)$ enthalten sein.) Nach Definition von γ ist damit auch $ba \in J'$ und $ba' \notin J'$ und somit $ba \in \text{Red}(J')$. Sei umgekehrt $ba \in \text{Red}(J')$. Dann ist nach Definition von $\text{Red}(\cdot)$ $ba \in J'$ und $ba' \notin J'$. Wieder nach Definition von γ gilt, dass $ba \in J$ und $ba' \notin J$, so dass $ba \in \text{Red}(J)$. □

Beweis von Beobachtung 4.16 (S. 116). Für einen Beweis ist folgendes Beispiel ausreichend.

$$\begin{aligned} O_1 &= \{K_1(a), (\neg\exists R.K_1 \sqcup \exists R.K_2)(a)\} \\ O_2 &= \{\neg K_1(a), (\exists R.K_1 \sqcap \neg\exists R.K_2)(a)\} \end{aligned}$$

Es sei $\mathcal{V}_c = \mathcal{V}(O_1 \cup O_2) = \{R, K_1, K_2, a\}$ und

$$X = \{K_1 \sqsubseteq K_1', K_2 \sqsubseteq K_2', a = a', R \sqsubseteq R', R' \sqsubseteq R\}$$

Es gilt $X \in \text{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})\top(O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2)$. Weiter sei γ derart definiert, dass es nur X auswählt: $\gamma(\text{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})\top(O_1\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2)) = \{X\}$. Folglich ist $K_2 \sqsubseteq K_2' \in O_1 \times_2^{\gamma} O_2$. Andererseits ist $\text{MRS}(O_1, O_2) = \{\{a\}, \{K_1\}\}$. D.h., dass K_2 nicht dissoziiert wird und daher für alle $\overline{\gamma}$ gilt $K_2 \sqsubseteq K_2' \notin O_1 \otimes_2^{\overline{\gamma}} O_2$. □

Beweis von Proposition 4.17 (S. 117). Es wird nur der Beweis für die Typ-2-Operatoren geführt. Der Beweis für Typ-1-Operatoren ergibt sich aufgrund der strukturellen Ähnlichkeit mit den Typ-2-Operatoren. Es seien $\alpha = K(a)$, $\sigma = \sigma_{(\mathcal{V}_c)_{Konz}}$ und

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \text{BA}^{\text{st}}(\sigma)\top(O\sigma \cup \{K(a)\}) \\ Y &= \{K' \sqsubseteq K, K \sqsubseteq K' \sqcup \text{msc}_{O\sigma}(a)\} \cup \{L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L \mid L \in \mathcal{V}_c \setminus \{K\}\} \end{aligned}$$

Zunächst zeige ich, dass für alle Symbole $L \in \mathcal{V}_c$ mit $L \neq K$ beide Abschätzungen $L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L$ in $\bigcap \tilde{B}$ enthalten sind und auch die Brückenaxiome $K \sqsubseteq K'$, $K' \sqsubseteq K \sqcup \mathrm{msc}_{O\sigma}(a)$ aus dem Integrationsresultat $O \otimes_2 K(a)$ in $\bigcap \tilde{B}$ enthalten sind, also folgende Untermengenbeziehung gilt:

$$Y \subseteq \bigcap \tilde{B} \tag{B.6}$$

Sei $X \in \tilde{B}$ beliebig. Da die Menge $X \cup O\sigma \cup \{K(a)\}$ erfüllbar ist, hat sie ein Modell $\mathcal{I} \models X \cup O\sigma \cup \{K(a)\}$. Es wird eine Variante $\mathcal{I}'$ von $\mathcal{I}$ definiert, die sich höchstens in der Interpretation der Symbole K, L von $\mathcal{I}$ unterscheidet.

$$\begin{array}{rcl} L^{\mathcal{I}'} & = & (L')^{\mathcal{I}} \text{ für } L \in \mathcal{V}_c \setminus \{K\} \\ (L')^{\mathcal{I}'} & = & (L')^{\mathcal{I}} \text{ für } L \in \mathcal{V}_c \setminus \{K\} \\ (K')^{\mathcal{I}'} & = & (K')^{\mathcal{I}} \\ K^{\mathcal{I}'} & = & (K')^{\mathcal{I}} \cup \{a^{\mathcal{I}}\} \\ c^{\mathcal{I}'} & = & c^{\mathcal{I}} \text{ für alle Konstanten } c \text{ aus } \mathcal{V}_c \end{array}$$

Für die neue Interpretation $\mathcal{I}'$ gelten folgende Erfüllbarkeitsbeziehungen:

- $\mathcal{I}' \models O\sigma \cup \{K(a)\}$: Da K, L nicht in $O\sigma$ vorkommen, folgt $\mathcal{I}' \models O\sigma$ aus $\mathcal{I} \models O\sigma$. $\mathcal{I}' \models K(a)$ gilt nach Definition von $\mathcal{I}'$.
- $\mathcal{I}' \models \{L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L \mid L \in \mathcal{V}_c \setminus \{K\}\}$: Nach Konstruktion ist $(L')^{\mathcal{I}'} = L^{\mathcal{I}'}$.
- $\mathcal{I}' \models \{K' \sqsubseteq K, K \sqsubseteq K' \sqcup \mathrm{msc}_{O\sigma}(a)\}$: Nach der Konstruktion von $\mathcal{I}'$ gilt $\mathcal{I}' \models K' \sqsubseteq K$. Zum Beweis von $\mathcal{I}' \models K \sqsubseteq K' \sqcup \mathrm{msc}_{O\sigma}(a)$ sei $\overline{d} \in K^{\mathcal{I}'}$ und $\overline{d} \notin (K')^{\mathcal{I}'}$. Dann ist nach Konstruktion von $\mathcal{I}'$ aber $\overline{d} = a^{\mathcal{I}} = (a)^{\mathcal{I}'}$. Da bereits gezeigt wurde, dass $\mathcal{I}' \models O\sigma$, gilt auch $\mathcal{I}' \models \mathrm{msc}_{O\sigma}(a)(a)$, also $\overline{d} = a^{\mathcal{I}'} \in (\mathrm{msc}_{O\sigma}(a))^{\mathcal{I}'}$.
- $\mathcal{I}' \models X$: Sei $ba \in X$ ein Brückenaxiom. Hat ba die Form $L \sqsubseteq \sigma(L \sqcup C)$ oder $\sigma(L) \sqsubseteq L \sqcup \sigma(C)$, mit $K \neq L$, dann folgt $\mathcal{I}' \models ba$ aus $L^{\mathcal{I}'} = (L')^{\mathcal{I}'}$. Hat ba die Form $K' \sqsubseteq K \sqcup \sigma(C)$, dann folgt per Konstruktion von $\mathcal{I}'$, dass $\mathcal{I}' \models ba$. Als letzter Fall bleibt, dass ba die Form $K \sqsubseteq K' \sqcup \sigma(C)$ hat. Zum Beweis von $\mathcal{I}' \models ba$ gelte $\overline{d} \in K^{\mathcal{I}'}$ und $\overline{d} \notin (K')^{\mathcal{I}'}$. Es folgt, dass $\overline{d} = a^{\mathcal{I}} = a^{\mathcal{I}'}$. Da $\mathcal{I} \models K \sqsubseteq K' \sqcup \sigma(C)$ und $\mathcal{I} \models (K \sqcap \neg K')(a)$, gilt $\overline{d} \in (\sigma(C))^{\mathcal{I}}$. Da $\sigma(C)$ die Konzeptsymbole K und L nicht enthält, gilt auch $\overline{d} \in (\sigma(C))^{\mathcal{I}'}$.

Insgesamt folgt:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}' & \models & \{K' \sqsubseteq K, K \sqsubseteq K' \sqcup \mathrm{msc}_{O\sigma}(a)\} \cup \{L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L \mid L \in \mathcal{V}_c \setminus \{K\}\} \\ & & \cup X \cup O\sigma \cup \{K(a)\} \end{array}$$

Wegen der Maximalität von X muss gelten:

$$\{K' \sqsubseteq K, K \sqsubseteq K' \sqcup \mathrm{msc}_{O\sigma}(a)\} \cup \{L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L \mid L \in \mathcal{V}_c \setminus \{K\}\} \subseteq X \in \tilde{B}$$

Die Untermengenbeziehung in (B.6) lässt sich verschärfen. Die Menge $\bigcap \tilde{B}$ besteht nur aus den Brückenaxiomen aus

$$\{K' \sqsubseteq K, K \sqsubseteq K' \sqcup \mathrm{msc}_{O\sigma}(a), L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L \mid L \in \mathcal{V}_c \setminus \{K\}\}$$

und ihren logischen Folgerungen in $\mathrm{BA}^{\mathrm{st}}(\sigma)$ – z.B. ist mit $K' \sqsubseteq K$ auch das Brückenaxiom $K' \sqsubseteq (K \sqcup L')$ in $\bigcap \tilde{B}$ enthalten. Es gilt also:

$$\bigcap \tilde{B} = \mathrm{Cn}(Y) \cap \mathrm{BA}^{\mathrm{st}}(\sigma) \tag{B.7}$$

Die $\supseteq$-Richtung dieser Gleichung folgt bereits aus der Untermengenbeziehung in (B.6). Die $\subseteq$-Richtung wird durch einen Widerspruchsbeweis geführt. Zunächst gebe ich die Beweisidee an. Diese basiert auf der Beobachtung, dass eine maximale Menge von Brückenaxiomen $X \in \tilde{B}$ zusätzlich zu den Brückenaxiomen aus Y nur Brückenaxiome der Form $K \sqsubseteq K' \sqcup \sigma(C)$ enthalten kann, wobei gelten muss: $O\sigma \models \mathrm{msc}_{O\sigma}(a) \sqsubseteq \sigma(C)$. Angenommen nicht $O\sigma \models \mathrm{msc}_{O\sigma}(a) \sqsubseteq \sigma(C)$. Dann lässt sich zu jedem solchen X eine andere Menge von Brückenaxiomen X' konstruieren, in der $K \sqsubseteq K' \sqcup \neg\sigma(C)$ enthalten ist. In dem Schnitt aller maximalen Brückenaxiomenmenge $\bigcap \tilde{B}$ sind daher keine Brückenaxiome der Form $K \sqsubseteq K' \sqcup \sigma(C)$ mit $O\sigma \not\models \mathrm{msc}_{O\sigma}(a) \sqsubseteq C$ enthalten. Formal wird das wie folgt expliziert:
Angenommen es ist

$$\bigcap \tilde{B} \not\subseteq \mathrm{Cn}(Y) \cap \mathrm{BA}^{\mathrm{st}}(\sigma)$$

Dann gibt es eine Konzeptbeschreibung $C \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_c)$, so dass $K \sqsubseteq K' \sqcup \sigma(C) \in \bigcap \tilde{B}$ und $O\sigma \not\models \mathrm{msc}_{O\sigma} \sqsubseteq \sigma(C)$. Damit gibt es ein Modell $\mathcal{I} \models O\sigma \cup \{\neg\sigma(C)(a)\}$. Definiere eine neue Interpretation $\mathcal{I}'$ mit $(K)^{\mathcal{I}'} = (K')^{\mathcal{I}} \cup \{(a)^{\mathcal{I}}\}$. Dann gilt

$$\mathcal{I}' \models O\sigma \cup \{\neg\sigma(C)(a), K(a), K \sqsubseteq K' \sqcup \neg\sigma(C)\})$$

Folglich existiert ein $X' \in \tilde{B}$ mit $K \sqsubseteq K' \sqcup \neg\sigma(C) \in X'$. Da nach Annahme auch $K \sqsubseteq K' \sqcup \sigma(C) \in X'$ sein muss, folgte $X' \models K \sqsubseteq K' \sqcup (\sigma(C) \sqcap \neg\sigma(C))$, also $X' \models K \sqsubseteq K'$. Damit wäre aber X' nicht mehr konsistent mit $O\sigma \cup \{K(a)\}$, welches $(\neg K' \sqcap K)(a)$ impliziert, und könnte nicht in $\tilde{B}$ enthalten sein.

Mit einer dualen Konstruktion lässt sich Gleichung (B.7) für den Fall beweisen, dass der Trigger ein negatives konzeptbasiertes Literal ist, $\alpha = \neg K(a)$. □

Beweis von Proposition 4.20 (S. 119). Es sei abkürzend $\sigma = \sigma_{\mathcal{V}_c}$.

Ad 4.3
Es wird γ durch $\gamma(EQ\top(O\sigma\cup\{\alpha\}))=\{EQ_i\}$ für $i=c(I)$ definiert. Dann gilt per Definition:

$$EQ *_\gamma (O\sigma\cup\{\alpha\}) = \bigcap\big(\gamma(EQ\top(O\sigma\cup\{\alpha\}))\big)\cup O\sigma\cup\{\alpha\} = EQ_i\cup O\sigma\cup\{\alpha\}$$

Folglich ist $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(EQ *_\gamma (O\sigma\cup\{\alpha\})) = \mathrm{Cn}(EQ *_\gamma (O\sigma\cup\{\alpha\}))\cap\mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c) = E_i = O\dotplus_c\alpha$.

Ad 4.4
Es wird γ wie folgt definiert:

$$\gamma(H) \;=\; \{X\in H \mid X\cap EQ \text{ ist maximal in } \{X'\cap EQ\mid X'\in H\}\}$$

γ wählt aus der Menge H diejenigen Mengen aus, deren Schnitt mit der Menge der Biimplikationen EQ maximal ist. Es bezeichne $(EQ_j^\vee)_{j\in J}$ die Familie aller Mengen aus $\gamma(\mathrm{DisA}(EQ)\top(O\sigma\cup\{\alpha\}))$. Wegen der Definition des disjunktiven Abschlusses und der Restmengen gilt, dass für alle $i\in I$ ein $j\in J$ existiert, so dass $EQ_i\subseteq EQ_j^\vee, EQ_j^\vee\cap EQ=EQ_i$ und

$$EQ_j^\vee\subseteq\mathrm{Cn}(EQ_i) \tag{B.8}$$

Umgekehrt existiert wegen der Definition von γ für jedes $j\in J$ ein $i\in I$, so dass

$$EQ_j^\vee\supseteq EQ_i \tag{B.9}$$

Beweis von $O\dotplus\alpha\supseteq\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{DisA}(EQ) *_\gamma (O\sigma_{\mathcal{V}_c}\cup\{\alpha\}))$: Es werde vorausgesetzt, dass $\beta\in\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{DisA}(EQ) *_\gamma (O\sigma\cup\{\alpha\}))$, d.h. es ist $\beta\in\mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$ und $(\bigcap_{j\in J}EQ_j^\vee)\cup O\sigma\cup\{\alpha\}\models\beta$. Also gilt für alle $j\in J$, dass $EQ_i^\vee\cup O\sigma\cup\{\alpha\}\models\beta$ und damit $EQ_j^\vee\models(\bigwedge O\sigma\wedge\alpha)\to\beta$. Mit der Aussage (B.8) folgt, dass für alle $i\in I$ gilt: $EQ_i\models(\bigwedge O\sigma\wedge\alpha)\to\beta$, also $(\bigwedge O\sigma\wedge\alpha)\to\beta\in\mathrm{Cn}(EQ_i)\subseteq\mathrm{Cn}(EQ_i\cup O\sigma\cup\{\alpha\})=E_i$ für alle $i\in I$. Folglich ist $\beta\in E_i$ für alle $i\in I$ und schließlich $\beta\in\bigcap_{i\in I}E_i=O\dotplus\alpha$.

Beweis von $O\dotplus\alpha\subseteq\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{DisA}(EQ) *_\gamma (O\sigma_{\mathcal{V}_c}\cup\{\alpha\}))$: Sei $\beta\in O\dotplus\alpha=\bigcap_{i\in I}E_i$, d.h. $\beta\in\mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$, und für alle $i\in I$ gilt: $EQ_i\cup O\sigma\cup\{\alpha\}\models\beta$ und damit $EQ_i\models(\bigwedge O\sigma\wedge\alpha)\to\beta$. Wegen der Kompaktheit der Aussagenlogik gibt es für jedes $i\in I$ eine endliche Teilmenge $EQ_i^f\subseteq EQ_i$, so dass $EQ_i^f\models(\bigwedge O\sigma\wedge\alpha)\to\beta$. Da O endlich ist, ist auch die Indexmenge I, die die Menge aller Extensionen E_i indiziert, endlich. Sei $I=\{1,\dots,k\}$. Es gibt folglich nur endlich viele maximale Brückenaxiommengen EQ_i und endlich viele Extensionen E_i. Daher ist auch die Disjunktion $\bigvee_{i\in I}EQ_i^f$ definiert und es gilt:

$$\bigvee_{i\in I}EQ_i^f\models(\bigwedge O\sigma\wedge\alpha)\to\beta \tag{B.10}$$

Für alle $i \in I$ sei $n_i = |EQ_i|$ die Anzahl der Elemente in EQ_i^f und $N_i = \{1, \ldots, n_i\}$. Jede Menge EQ_i, $i \in I$, ist darstellbar als $EQ_i \equiv \bigwedge_{j=1}^{n_i}(p_{ij} \leftrightarrow p'_{ij})$. Durch Anwendung des Distributivgesetzes lässt sich $\bigvee_{i \in I} EQ_i^f$ äquivalent umformen in eine Konjunktion, die aus Disjunktionen von Biimplikationen besteht:

$$\bigvee_{i \in I} EQ_i^f \equiv \bigwedge_{(j_1,\ldots,j_k) \in N_1 \times \cdots \times N_k} \bigvee_{i}^{k} (p_{j_i} \leftrightarrow p'_{j_i}) \tag{B.11}$$

Nach (B.9) gibt es für jedes $j \in J$ ein $i \in I$ mit $EQ_j^\vee \supseteq EQ_i$. Nun ist für jedes $(j_1, \ldots, j_k) \in N_1 \times \cdots \times N_k$ aber $(p_{j_i} \leftrightarrow p'_{j_i}) \in EQ_i$ und folglich gilt für jedes $(j_1, \ldots, j_k) \in N_1 \times \cdots \times N_k$ auch $\bigvee_i^k (p_{j_i} \leftrightarrow p'_{j_i}) \in EQ_j^\vee$. Daher gilt für jedes $j \in J$, dass $EQ_j^\vee \models \bigwedge_{(j_1,\ldots,j_k) \in N_1 \times \cdots \times N_k} \bigvee_i^k (p_{j_i} \leftrightarrow p'_{j_i})$. Mit der Äquivalenz in (B.11) ergibt sich für alle $j \in J$, dass $EQ_j^\vee \models \bigvee_{i \in I} EQ_i^f$ und mit der Folgerungsbeziehung in (B.10) weiter $EQ_j^\vee \models (\bigwedge O\sigma \wedge \alpha) \rightarrow \beta$. Daher folgt schließlich auch, dass $\beta \in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{DisA}(EQ) *_\gamma (O\sigma \cup \{\alpha\}))$. □

B.4 Beweise zu Kapitel 5

B.4.1 Beweise zu Abschnitt 5.1

Beweis von Beobachtung 5.1 (S. 123). Hier wird der von Rott (Rott, 2000) gegebene Beweis aufgeführt. Sei $\neg\alpha \in BS$ und seien BS' und BS'' zwei verschiedene potentielle Revisionsresultate von BS mit α. Es ist zu zeigen, dass $BS \Delta BS' \not\subseteq BS \Delta BS''$ und dass $BS \Delta BS'' \not\subseteq BS \Delta BS'$ gelten. Da $BS' \neq BS''$ gilt, gibt es einen Satz, der in $BS' \setminus BS''$ oder in $BS'' \setminus BS'$ enthalten ist. Ohne Einschränkung kann angenommen werden, dass letzteres gilt, es also ein β gibt, das in BS'', aber nicht in BS' enthalten ist. Wegen der deduktiven Abgeschlossenheit enthält BS den Satz $\beta \vee \neg\alpha$, da $\neg\alpha \in BS$ und $\neg\alpha \models \beta \vee \neg\alpha$. Ebenso ist $\beta \vee \neg\alpha \in BS''$, da $\beta \in BS''$ und $\beta \models \beta \vee \neg\alpha$. Andererseits ist $\beta \vee \neg\alpha \notin BS'$, da wegen deduktiver Abgeschlossenheit von BS' und $\alpha \in BS'$ auch $\beta \in BS'$ gelten würde, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $\beta \vee \neg\alpha \in BS \Delta BS'$ und $\beta \vee \neg\alpha \notin BS \Delta BS''$, also $BS \Delta BS' \not\subseteq BS \Delta BS''$. Andererseits ist wegen des deduktiven Abschlusses von BS'' $\beta \wedge \alpha \in BS''$. Aber $\beta \wedge \alpha$ ist nicht enthalten in BS, da es sonst inkonsistent wäre und auch nicht enthalten in BS', da sonst im Widerspruch zur Voraussetzung auch wegen des deduktiven Abschlusses von BS' $\beta \in BS'$ gelten müsste. Daher ist $\beta \wedge \alpha \in BS \Delta BS''$, aber $\beta \wedge \alpha \notin BS \Delta BS''$ und somit $BS \Delta BS'' \not\subseteq BS \Delta BS'$. □

Beweis von Beobachtung 5.8 (S. 127). Für Typ-1-Operatoren wird das Kriterium trivialerweise erfüllt. Sei $\circ_2$ ein Reinterpretationsoperator des Typs 2, O

eine Menge von Ontologieaxiomen und seien α, β Sätze, so dass $O \models \beta$, und $O \circ_2 \alpha \not\models \beta$. Zu zeigen ist, dass β für α relevant ist modulo O. Da in den Reinterpretationsoperatoren nur solche Symbole reinterpretiert werden, deren Dissoziation zu einer Konfliktauflösung führt, muss $\mathcal{V}(\alpha) \cap \mathcal{V}(\beta) \neq \emptyset$ gelten. Sei etwa $s \in \mathcal{V}(\alpha) \cap \mathcal{V}(\beta)$. Sei $\mathbf{V} = \{\mathcal{V}_n\}_{n \in I}$ ein feinstes Splitting von O. Es gibt ein $\mathcal{V}_n$, so dass $s \in \mathcal{V}_n$. Damit folgt, dass $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}(\beta)$ sowie $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}(\alpha)$ beide nicht leer sind. Somit ist β relevant für α modulo O. □

B.4.2 Beweise zu Abschnitt 5.2

Beweis von Proposition 5.9 (S. 131). Seien abkürzend $\mathrm{Kl}_{\mathrm{AL}} = \mathrm{Kl}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{AL}}$ und $\mathrm{Prim}_{\mathrm{AL}} = \mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{AL}}$.

Jede Formel in X lässt sich äquivalent in KNF (Konjunktion von Klauseln) überführen. Wegen $\mathcal{V}(X) \subseteq \mathcal{V}$ gilt daher $\mathrm{Kl}_{\mathrm{AL}}(X) \equiv X$. Es wird gezeigt, dass $\mathrm{Prim}_{\mathrm{AL}}(X) \equiv \mathrm{Kl}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{AL}}(X)$ gilt. Zunächst gilt $\mathrm{Prim}_{\mathrm{AL}}(X) \subseteq \mathrm{Kl}_{\mathrm{AL}}(X)$ und somit trivialerweise $\mathrm{Kl}_{\mathrm{AL}}(X) \models \mathrm{Prim}_{\mathrm{AL}}(X)$. Nun wird gezeigt, dass die Folgerungsbeziehung $\mathrm{Prim}_{\mathrm{AL}}(X) \models \mathrm{Kl}_{\mathrm{AL}}(X)$ erfüllt ist, indem für jedes $kl \in \mathrm{Kl}_{\mathrm{AL}}(X)$ ein $pr \in \mathrm{Prim}_{\mathrm{AL}}(X)$ mit $pr \models kl$ bestimmt wird. Wenn kl eine Tautologie ist, gilt bereits $\emptyset \models kl$. Sei daher kl nicht tautologisch. Wenn $kl \in \mathrm{Prim}_{\mathrm{AL}}(X)$, dann wird $pr = kl$ gesetzt. Wenn $kl \notin \mathrm{Prim}_{\mathrm{AL}}(X)$, dann gibt es ein $kl' \in \mathrm{Kl}_{\mathrm{AL}}(X)$, so dass kl' eine echte Teilklausel von kl ist. Da kl endlich ist, hat es nur endlich viele echte Teilklauseln und man kann eine minimale Teilklausel kl' wählen. Es gibt also ein $kl' \in \mathrm{Kl}_{\mathrm{AL}}(X)$ mit: kl' ist eine echte Teilklausel von kl und es gibt keine echte Teilklausel $kl'' \in \mathrm{Kl}_{\mathrm{AL}}(X)$ von kl'. Damit gilt schließlich $kl' \in \mathrm{Prim}_{\mathrm{AL}}(X)$. □

Beweis von Beobachtung 5.10 (S. 132). Seien abkürzend $\mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}} = \mathrm{Kl}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}$ und $\mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}} = \mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}$. Jede Formel in X lässt sich äquivalent umformen in eine Formel in Pränexform, in der nur Allquantoren vorkommen und deren Matrix in KNF ist. Daher ist jede Formel in X äquivalent zu einer Menge von prädikatenlogischen Klauseln über $\mathcal{V}$ (hier geht die Voraussetzung $\mathcal{V}(X) \subseteq \mathcal{V}$ ein). Also gilt damit, dass $\mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}(X) \equiv X$. Es wird $\mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(X) \equiv \mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}(X)$ gezeigt. Zunächst gilt $\mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(X) \subseteq \mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}(X)$ und somit $\mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}(X) \models \mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(X)$. Nun wird gezeigt, dass $\mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(X) \models \mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}(X)$, indem für jedes $kl \in \mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}(X)$ ein $pr \in \mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(X)$ mit $pr \models kl$ bestimmt wird. Wenn kl eine Tautologie ist, gilt bereits $\emptyset \models kl$. Sei daher kl nicht tautologisch. Wenn $kl \in \mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(X)$, dann wird $pr = kl$ gesetzt. Wenn $kl \notin \mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(X)$, dann gibt es ein $kl' \in \mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}(X)$, so dass kl' eine echte Teilklausel von kl ist. Da die Matrizen endlich sind, kann ein bzgl. der Teilklauselbeziehung minimales $kl' \in \mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}(X)$ gefunden werden, so dass kl' eine echte Teilklausel von kl ist. Damit ist aber $pr = kl' \in \mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(X)$ und $pr \models kl$. □

Beweis von Proposition 5.13 (S. 135). Der Beweis ist eine Modifikation eines Beweises von Schöning (Schöning, 2000, S. 64–66) für die Erfüllbarkeitsäquivalenz von α und α^*. Er basiert auf einem Skolemisierungsalgorithmus, der im Beweis zu Lemma A.27 aufgeführt ist (s. Anhang A, S. 240).

Klarerweise ist $\alpha^* \models \alpha$, daher gilt $\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\alpha) \subseteq \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\alpha^*)$. Um die umgekehrte Beziehung zu zeigen, sei $\beta \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$, $\beta \notin \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\alpha)$ und $\mathcal{I}$ ein Modell, so dass $\mathcal{I} \models \alpha \wedge \neg\beta$. Es wird gezeigt, dass es ein Modell $\mathcal{J} \models \alpha^* \wedge \neg\beta$ gibt; daraus folgt dann $\beta \notin \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\alpha^*)$. Hierzu wird aus $\mathcal{I}$ eine Folge von Modellen $\mathcal{I}_i$ konstruiert, so dass für jede Formel α_i, die in der Runde i der While-Schleife (siehe den Algorithmus zur Skolemisierung, S. 240) gebildet wird, gilt $\mathcal{I}_i \models \alpha_i \wedge \neg\beta$. Wird die Schleife m-mal durchlaufen, so ist $\alpha^* = \alpha_m$. Sei $\mathcal{I}_i \models \alpha_i \wedge \neg\beta$, und α_i habe die Form $\alpha_i = \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists z \delta$. Dann ist $\alpha_{i+1} = \forall x_1 \ldots \forall x_n \delta[z/f(x_1, \ldots, x_n)]$. Es wird $\mathcal{I}_{i+1}$ als Modifikation von $\mathcal{I}_i$ definiert, die dem f eine neue Funktion zuweist: Für alle $d_1, \ldots, d_n \in \Delta^{\mathcal{I}_{i+1}} = \Delta^{\mathcal{I}_i}$ existiert wegen $\mathcal{I}_i \models \alpha_i \wedge \neg\beta$ ein $d \in \Delta^{\mathcal{I}_i}$, so dass $\mathcal{I}_{i[x_1 \mapsto d_1, \ldots x_n \mapsto d_n, z \mapsto d]} \models \delta \wedge \neg\beta$. Sei ein solches d ausgewählt und $f^{\mathcal{I}_{i+1}}(d_1, \ldots, d_n) = d$ gesetzt. Damit folgt für alle $d_1, \ldots, d_n \in \Delta^{\mathcal{I}_{i+1}}$, dass $\mathcal{I}_{i+1[x_1 \mapsto d_1, \ldots x_n \mapsto d_n, z \mapsto f^{\mathcal{I}_{i+1}}(d_1, \ldots, d_n)]} \models \delta \wedge \neg\beta$. (Hier geht die Voraussetzung ein, dass $\beta \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$). Mit dem Überführungslemma A.21 (S. 238) folgt aber: $\mathcal{I}_{i+1} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \delta[z/f(x_1, \ldots, x_n)] \wedge \neg\beta$, folglich $\mathcal{I}_{i+1} \models \alpha_{i+1}$. Nun setzt man $\mathcal{J} = \mathcal{I}_m$ und es gilt $\mathcal{J} \models \alpha^* \wedge \neg\beta$. □

Beweis von Proposition 5.14 (S. 135). Ich zeige die Aussagen für den schwierigeren prädikatenlogischen Fall; der aussagenlogische Fall ergibt sich mit parallelen Konstruktionen.

Beweis von $\supseteq$: Sei $\beta \in {\mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}}^{\mathcal{V}_n}(O^*)$ und es gebe eine Klausel ϵ, für die folgende Bedingungen gelten: $\epsilon \in {\mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}}^{\mathcal{V}_n}((O\sigma \cup B_k)^*)$, $\epsilon \models \beta$, ϵ enthält kein Symbol aus $\{s_{k+1}, \ldots, s_n\}$ und für alle $1 \leq i \leq k$ ist $g(ba(s_i), \epsilon)$. Damit gilt trivialerweise auch $\beta \in {\mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}}^{\mathcal{V}_n}((O\sigma \cup B_k)^*)$.

Beweis von $\subseteq$: Sei $\beta \in {\mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}}^{\mathcal{V}_n}((O\sigma \cup B_k)^*)$. Wegen $\beta \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_n)$ folgt aus $\beta \in {\mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}}^{\mathcal{V}_n}((O\sigma \cup B_k)^*)$, dass $(O\sigma\sigma^{-1} \cup (B_k)\sigma^{-1})^* \models \beta$, also $O^* \models \beta$ und somit $\beta \in {\mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}}^{\mathcal{V}_n}(O^*)$. Es bleibt zu zeigen, dass ein $\epsilon \in {\mathrm{Kl}_{\mathrm{PL}}}^{\mathcal{V}_n}((O\sigma \cup B_k)^*)$ mit den genannten Bedingungen existiert.

Es sei $\forall z \tilde{B}_k$ eine Skolemisierung von B_k mit $\tilde{B}_k$ in KNF. Weiter sei $O^* = \forall \tilde{x}_1 \ldots \forall \tilde{x}_m \tilde{O}$ eine Skolemisierung von O mit Skolemsymbolen aus $\mathcal{V}_n \setminus \mathcal{V}(O\sigma \cup O)$ und $\tilde{O}$ in KNF; und schließlich bezeichne $(O\sigma \cup B_k)^*$ eine O^*-treue Skolemisierung von $O\sigma \cup B_k$ der Form

$$(O\sigma \cup B_k)^* = \forall z \forall \tilde{x}_1 \ldots \forall \tilde{x}_m (\tilde{O}\sigma \wedge \tilde{B}_k)$$

Die Formel β habe die Form

$$\beta = \forall x_1 \ldots \forall x_p (li_1 \vee \cdots \vee li_q)$$

Dabei kann vorausgesetzt werden, dass alle Variablen x_j von den Variablen $\tilde{x}_i$ und z verschiedenen sind.

Da β aus $(O\sigma \cup B_k)^*$ folgt, ist $(O\sigma \cup B_k)^* \cup \{\neg\beta\}$ widersprüchlich. Die Formel

$$\exists x_1 \dots \exists x_p \forall z \forall \tilde{x}_1 \dots \forall \tilde{x}_m (\tilde{O}\sigma \wedge \tilde{B}_k \wedge \neg li_1 \wedge \dots \wedge \neg li_q)$$

ist eine Pränexform von $(O\sigma \cup B_k)^* \cup \{\neg\beta\}$.

Ihre Skolemisierung führt zu einer Formel mit einer Matrix Ψ, die die Form hat:

$$\Psi = (\tilde{O}\sigma \wedge \tilde{B}_k) \wedge (\neg li_1 \wedge \dots \wedge \neg li_p) \underbrace{[x_1/a_1, \dots, x_p/a_p]}_{\rho=}$$

Dabei sind die a_i, $1 \leq j \leq p$, neue Skolemkonstanten, die nicht in $\mathcal{V}$ enthalten sind. Die Formel Ψ ist widersprüchlich und gestattet die (Resolutions-)Ableitung[3] der leeren Klausel.

Ist bereits β eine Formel, welche die für ϵ geforderten Bedingungen erfüllt, dann kann $\epsilon = \beta$ gesetzt werden. Andernfalls gilt, dass β ein Symbol s aus $\{s_{k+1}, \dots, s_n\}$ oder ein Symbol s_i, $1 \leq i \leq k$ enthält, für das nicht $g(ba(s_i), \beta)$ gilt. Jedes Symbol $\tilde{s}$ in β, für das entweder $\tilde{s} \in \{s_{k+1}, \dots, s_n\}$ oder $\tilde{s} \in \{s_1, \dots, s_k\}$ und nicht $g(ba(\tilde{s}), \beta)$ gilt, wird eine Störstelle genannt. Es sei r die Anzahl der Störstellen in β. Durch Induktion über die Anzahl j der Störstellen lässt sich eine Folge $\langle\beta_j\rangle_{0 \leq j \leq r}$ von Klauseln $\beta_j \in \mathrm{Kl_{PL}}((O\sigma \cup B_k)^*)$ definieren, so dass gilt:

$$(O\sigma \cup B_k)^* \models \beta_r \models \dots \models \beta_1 \models \beta_0 = \beta$$

und jedes β_j hat genau $r - j$ Störstellen; insbesondere hat β_r keine Störstellen mehr. Damit ist $\epsilon = \beta_r$ die gesuchte Klausel, für die gilt: $(O\sigma \cup B_k)^* \models \epsilon \models \beta$; ϵ enthält keine Symbole aus $\{s_{k+1}, \dots, s_n\}$ und für alle $1 \leq i \leq k$ gilt: $g(ba(s_i), \epsilon)$.

Die Folge sei bis β_j konstruiert und es gelte insbesondere $(O\sigma \cup B_k)^* \models \beta_j$. Sei s eine Störstelle von β_j. OBdA kann angenommen werden, dass β_j keine Tautologie ist. (Wenn β eine Tautologie ist, dann gibt es eine andere Tautologie $\epsilon \in \mathrm{Kl_{PL}}((O\sigma \cup B_k)^*)$, die die Form $\epsilon = \forall x(s^{\#}(x) \vee \neg s^{\#}(x))$ hat. Dabei ist $s^{\#} \in \mathcal{V} \setminus O \setminus O\sigma$.) Es wird zunächst der erste Fall betrachtet, dass s aus $\{s_{k+1}, \dots, s_n\}$ ist. Kein Literal $\neg li_j\rho$, das s enthält, kann mit einer Klausel in $\tilde{O}\sigma \wedge \tilde{B}_k$ resolvieren; auch wäre eine Resolution von $\neg li_j\rho$ mit einer komplementären Klausel aus $(\neg li_1 \wedge \dots \wedge \neg li_q)\rho$ nur möglich, wenn β_j bereits eine Tautologie wäre. Entsprechend werden Klauseln mit s in dem Resolutionsbeweis nicht verwendet. Daher gibt es eine prädikatenlogische Klausel β_{j+1}, die aus β_j durch Streichen aller Literale mit s entsteht und für die $(O\sigma \cup B_k)^* \models \beta_{j+1}$ und $\beta_{j+1} \models \beta_j$ gilt. Außerdem hat β_{j+1} gegenüber β_j eine Störstelle weniger, also genau $r - j - 1$ Störstellen.

[3] S. Anhang A, Definition A.31, S. 243.

Im zweiten Fall enthält β_j ein Symbol s_i, $1 \leq i \leq k$, für das nicht $g(ba(s_i), \beta_j)$ gilt. Sei OBdA $ba(s_i) = s_i \sqsubseteq s'_i$. Damit gilt, dass β_j das Symbol s nicht semantisch negativ enthält. Insbesondere kommt in β_j ein Literal li_j vor, das s_i syntaktisch positiv enthält. Wieder gilt, dass $(O\sigma \cup B_k)^* \cup \{\neg\beta_j\}$ widersprüchlich ist und daher eine Resolutionsableitung der leeren Klausel aus Ψ existiert. Die zu $li_j\rho$ komplementäre Klausel $\neg li_j\rho$ enthält s_i negativ. Sie kann jedoch mit keiner Klausel aus $(\tilde{O\sigma} \wedge \tilde{B_k})$ resolvieren. Eine interne Resolution mit einer Klausel aus $(\neg li_1 \wedge \cdots \wedge \neg li_q)\rho$ ist ebenfalls nicht möglich, da sonst β_j eine Tautologie wäre. In diesem Falle entsteht β_{j+1} aus β_j, indem in β_j alle Literale mit positivem Vorkommnis von s_i gestrichen werden. Wieder gilt $\beta_{j+1} \models \beta$ und $(O\sigma \cup B_k)^* \models \beta_{j+1}$ und β_{j+1} hat eine Störstelle weniger als β_j, also genau $r - j - 1$ Störstellen. $\square$

Beweis von Proposition 5.17 (S. 137). Ich zeige die Aussagen für den schwierigeren prädikatenlogischen Fall; der aussagenlogische Fall ergibt sich mit parallelen Konstruktionen. Abkürzend sei $\text{Prim}_{\text{PL}} = \text{Prim}_{\text{PL}}^{\mathcal{V}}$.

Die $\supseteq$-Beziehung gilt wegen der Monotonieeigenschaft von $\text{Cn}^{\mathcal{V}_c}$. Es ist die schwierige $\subseteq$-Beziehung zu zeigen. Ich verwende folgende Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \Gamma_A &= \text{Prim}_{\text{PL}}(O\sigma) \\ \Gamma_B &= \text{Prim}_{\text{PL}}(O\sigma) \cap \text{Satz}(\mathcal{V}_c) \end{aligned}$$

Es sei $\text{supp}(\sigma) = \{P_1, \ldots, P_n\}$ und $P'_i = \sigma(P_i)$.

Sei eine Formel β mit $\beta \in \text{Satz}(\mathcal{V}_c)$ gegeben und gelte $\Gamma_B \not\models \beta$. Dann gibt es ein Modell $\mathcal{J}' \models \Gamma_B \cup \{\neg\beta\}$. $\neg\beta$ wird zu einer universellen Formel δ skolemisiert. Da $\Gamma_B \cup \{\neg\beta\}$ erfüllbar ist, ist auch $\Gamma_B \cup \{\delta\}$ erfüllbar, hat also wegen Proposition A.29 (S. 241) ein Herbrandmodell $\mathcal{J} \models \Gamma_B \cup \{\delta\}$. Es sei abkürzend $\Delta = \Delta^{\mathcal{J}}$. Alle weiteren Modelle werden ebenfalls Herbrandmodelle sein und als Domäne Δ haben. In solchen Modellen gilt wegen des Überführungslemmas A.21 (S. 238) folgende Beziehung:
Für alle Formeln α und alle Terme $t_1, \ldots, t_n \in \Delta^{\mathcal{J}}$ gilt:

$$\mathcal{J}_{[x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n]} \models \alpha \text{ genau dann, wenn } \mathcal{J} \models \alpha[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$$

Aus dem Modell $\mathcal{J}$ wird sukzessive eine Kette von Modellen $\mathcal{I}_i$ gebildet, für die gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = \mathcal{I}_0 &\models \Gamma_B \cup \{\delta\} \\ \mathcal{I}_1 &\models \text{Prim}_{\text{PL}}(O\sigma) \cap \text{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \{P'_1\}) \cup \{\delta\} \\ &\ldots \\ \mathcal{I}_i &\models \text{Prim}_{\text{PL}}(O\sigma) \cap \text{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \{P'_1, \ldots, P'_i\}) \cup \{\delta\} \\ &\ldots \\ \mathcal{I}_n &\models \text{Prim}_{\text{PL}}(O\sigma) \cap \text{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \{P'_1, \ldots, P'_n\}) \cup \{\delta\} = \Gamma_A \cup \{\delta\} \end{aligned}$$

Das Modell $\mathcal{I}_n$ zeigt dann, dass $\Gamma_A \cup \{\delta\}$ und damit auch $\Gamma_A \cup \{\neg\beta\}$ (beachte, dass δ eine Skolemisierung von $\neg\beta$ ist) erfüllbar ist. Daraus folgt schließlich die zu zeigende Beziehung $\Gamma_A \not\models \beta$.

Die Folge $\langle \mathcal{I}_i \rangle_{1 \leq i \leq n}$ wird wie folgt definiert. Angenommen es ist bereits $\mathcal{I}_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$, definiert worden und es gelte

$$\mathcal{I}_{i-1} \models \mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(O\sigma) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \{P'_1, \ldots, P'_{i-1}\}) \cup \{\delta\}$$

Es ist ein Modell $\mathcal{I}_i$ zu konstruieren, so dass gilt:

$$\mathcal{I}_i \models \mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(O\sigma) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \{P'_1, \ldots, P'_i\}) \cup \{\delta\}$$

$\mathcal{I}_i$ wird aus $\mathcal{I}_{i-1}$ konstruiert, indem nur die Extension von P'_i geändert wird. $\mathcal{I}_i$ hat die besondere Eigenschaft, dass es P'_i eine minimale Extension zuweist. Die Beweise werden der Übersichtlichkeit halber für den Fall geführt, dass P'_i ein einstelliges Prädikatsymbol ist. Die unten gegebenen Beweiskonstruktionen lassen sich aber auch auf den Fall erweitern, dass P'_i ein Prädikatsymbol beliebig großer Stelligkeit ist.

Sei H die Menge aller Formeln aus $\mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(O\sigma) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \{P'_1, \ldots, P'_i\})$, in denen P'_i gar nicht oder nur syntaktisch positiv als Teil eines Literals der Form $P'_i(t)$ enthalten ist. Da $\mathcal{I}_i$ nur bzgl. P'_i geändert wird gegenüber $\mathcal{I}_{i-1}$, wird $\mathcal{I}_i \models \delta$ gelten.

Lemma B.4 garantiert die Existenz eines minimalen Modells $\mathcal{I}_i$.

Lemma B.4. *Es gibt eine Interpretation $\mathcal{I}_i$, so dass gilt:*

1. *$\mathcal{I}_i \models H$ und*
2. *$\mathcal{I}_i$ ist bzgl. der Extension von P'_i inklusionsminimal in dieser Eigenschaft, d.h. für alle Modifikationen $\mathcal{I}'$ von $\mathcal{I}_i$ mit $(P'_i)^{\mathcal{I}'} \subset (P'_i)^{\mathcal{I}_i}$ gibt es ein $\alpha \in H$ mit $\mathcal{I}' \not\models \alpha$.*

Beweis. H ist die Menge aller Formeln aus $\mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(O\sigma) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \{P'_1, \ldots, P'_i\})$, in denen P'_i gar nicht oder nur syntaktisch positiv als Teil eines Literals der Form $P'_i(t)$ enthalten ist. Sei $\langle e_j \rangle_{j \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung von $\Delta^{\mathcal{I}_{i-1}} = \Delta$. Die e_j sind Grundterme. Es wird $\Delta^{\mathcal{I}_i} = \Delta^{\mathcal{I}_{i-1}} = \Delta$ gesetzt und mittels einer Folge von Mengen $\langle M_i^k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ die Extension von P'_i in $\mathcal{I}_i$ definiert. Die Menge M_i^{k+1} entsteht aus der vorhergehenden Menge M_i^k, indem nur dann ein Grundterm e_{k+1} gestrichen wird, wenn dadurch nicht einer der Sätze $\alpha \in H$ falsch wird. Die Definition ist verankert für $k = 0$ durch $M_i^0 = \Delta$. Damit gilt, dass $(\mathcal{I}_{i-1})_{[P'_i \mapsto M_i^0]} \models H$, da $\mathcal{I}_{i-1}$ alle Primkonsequenzen wahr macht, in denen P'_i nicht vorkommt und in H höchstens

Primkonsequenzen mit positivem P_i' vorkommen. Aufgrund der Definition der M_i^k folgt weiter, dass die Interpretationen $(\mathcal{I}_{i-1})_{[P_i' \mapsto M_i^k]}$ Modelle von H sind.

$$M_i^{k+1} = \begin{cases} M_i^k & \text{Falls es ein } \alpha \in H \text{ gibt,} \\ & \text{so dass } (\mathcal{I}_{i-1})_{[P_i' \mapsto M_i^k \setminus \{e_{k+1}\}]} \not\models \alpha \\ M_i^k \setminus \{e_{k+1}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Schließlich wird gesetzt: $(P_i')^{\mathcal{I}_i} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_i^k$.

Ich zeige zunächst, dass $\mathcal{I}_i$ alle $\alpha \in H$ wahr macht und beweise anschließend die Minimalität. Enthält $\alpha \in H$ kein P_i', dann gilt wegen $\mathcal{I}_{i-1} \models \alpha$ auch $\mathcal{I}_i \models \alpha$. Andernfalls hat α die Form $\alpha = \forall x_1 \dots \forall x_m P_i'(t_1) \vee \dots \vee P_i'(t_p) \vee M$, wobei M aus Literalen besteht, in denen P_i' nicht vorkommt. Angenommen $\mathcal{I}_i \models \neg\alpha$. Dann gibt es $d_1, \dots, d_m \in \Delta$ und eine Substitution $\rho = [x_1/d_1, \dots, x_m/d_m]$, so dass gilt

$$\mathcal{I}_i \models \neg P_i'(t_1\rho) \wedge \dots \wedge \neg P_i'(t_p\rho) \wedge \neg M\rho \tag{B.12}$$

Die als Argument der P_i' vorkommenden Terme sind aber in der Aufzählung $\langle e_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ enthalten. Also gibt es $e_{k_1}, \dots, e_{k_p} \in \Delta$ mit

$$e_{k_1} = t_1\rho, \dots, e_{k_p} = t_p\rho$$

Sei $r = max\{k_1, \dots, k_p\}$ der Index des zuletzt eliminierten Grundterms unter den $e_{k_1}, \dots, e_{k_p}$. Per Definition ist $M_i^r \cap \{e_{k_1}, \dots, e_{k_p}\} = \emptyset$, also gilt

$$(\mathcal{I}_{i-1})_{[P_i' \mapsto M_i^r]} \models \neg P_i'(t_1\rho) \wedge \dots \wedge \neg P_i'(t_p\rho)$$

Nach Definition gilt auch $(\mathcal{I}_{i-1})_{[P_i' \mapsto M_i^r]} \models \alpha$. Folglich müsste $(\mathcal{I}_{i-1})_{[P_i' \mapsto M_i^r]} \models M\rho$ gelten. Da M nicht P_i' enthält, müsste damit $\mathcal{I}_i \models M\rho$ gelten, im Widerspruch zur Beziehung (B.12).

Nun zeige ich die Minimalitätseigenschaft. Es reicht zu zeigen, dass für alle $e_k \in \Delta$ und Interpretationen $\mathcal{I}'$ mit $(P_i')^{\mathcal{I}'} = (P_i')^{\mathcal{I}_i} \setminus \{e_k\}$ gilt, dass es einen Satz $\alpha \in H$ gibt, den $\mathcal{I}'$ falsch macht, $\mathcal{I}' \models \neg\alpha$. (Da in $\neg\alpha$ P_i' nur negativ vorkommt, gilt für alle anderen Interpretation $\mathcal{I}''$ mit noch kleinerer Extension für P_i', $(P_i')^{\mathcal{I}''} \subset (P_i')^{\mathcal{I}'}$, dass ebenfalls $\mathcal{I}'' \models \neg\alpha$.)

Dass $e_k \in (P_i')^{\mathcal{I}_i}$ ist, bedeutet, dass $(\mathcal{I}_{i-1})_{[P_i' \mapsto M_i^{k-1}]} \models H$, aber für die Modifikation $\mathcal{J}' = (\mathcal{I}_{i-1})_{[P_i' \mapsto M_i^{k-1} \setminus \{e_k\}]} = (\mathcal{I}_{i-1})_{[P_i' \mapsto M_i^k]}$ ein Satz $\alpha \in H$ existiert, so dass $\mathcal{J}' \not\models \alpha$, also $\mathcal{J}' \models \neg\alpha$. Nun ist nach Definition

$$(P_i')^{\mathcal{I}'} = (P_i')^{\mathcal{I}_i} \setminus \{e_k\} \subseteq M_i^k = (P_i')^{\mathcal{J}'}$$

Da P_i' nur negativ in $\neg\alpha$ vorkommt, folgt aus $\mathcal{J}' \models \neg\alpha$ auch $\mathcal{I}' \models \neg\alpha$, also $\mathcal{I}' \not\models \alpha$. $\square$

Beweis, dass $\mathcal{I}_i$ alle Sätze aus $\mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(O\sigma) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \{P'_1, \ldots, P'_i\})$ wahr macht

Es ist zu zeigen, dass das gemäß Lemma B.4 existierende Modell $\mathcal{I}_i$ auch alle Primklauseln in $\mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(O\sigma) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \{P'_1, \ldots, P'_i\})$ wahr macht, in denen P'_i mindestens einmal (syntaktisch) negativ vorkommt. Das lässt sich durch Induktion über die Anzahl k der negativen Vorkommnisse von P'_i beweisen.
Induktionsbasis ($k = 0$):
Falls $pr \in \mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(O\sigma) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \{P'_1, \ldots, P'_i\})$ und pr keine negativen Vorkommnisse von P'_i enthält, ist $pr \in H$ und somit, wie bereits gezeigt, $\mathcal{I}_i \models pr$.
Induktionsvoraussetzung:
Für alle Primklauseln $pr \in \mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(O\sigma) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \{P'_1, \ldots, P'_i\})$, die weniger als k negative Vorkommnisse von P'_i haben, gilt $\mathcal{I}_i \models pr$.
Induktionsschritt:
Für den Induktionsschritt sei $\alpha \in \mathrm{Prim}_{\mathrm{PL}}(O\sigma) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \{P'_1, \ldots, P'_i\})$ eine Primklausel über der Sprache $\mathcal{V}_c \cup \{P'_1, \ldots, P'_i\}$, die k negative Vorkommnisse von P'_i enthält:

$$\alpha = \forall x_1 \ldots \forall x_u \neg P'_i(t_1) \vee \cdots \vee \neg P'_i(t_k) \vee M$$

Dabei besteht M aus Literalen, in denen P'_i nicht negativ (aber eventuell positiv) vorkommt. Um zu zeigen, dass $\mathcal{I}_i \models \alpha$, werde angenommen

$$\mathcal{I}_i \models P'_i(t_1) \wedge \cdots \wedge P'_i(t_k)[x_1/d_1, \ldots, x_u/d_u] \text{ für } d_1, \ldots, d_u \in \Delta^{\mathcal{I}_i} \tag{B.13}$$

Zu zeigen ist, dass

$$\mathcal{I}_i \models M[x_1/d_1, \ldots, x_u/d_u] \tag{B.14}$$

Aus (B.13) folgt insbesondere $\mathcal{I}_i \models P'_1(t_1)[x_1/d_1, \ldots, x_u/d_u]$. Es sei

$$d = t_1[x_1/d_1, \ldots, x_u/d_u]$$

Wegen der Möglichkeit, die Terme umzuordnen, kann OBdA angenommen werden, dass es ein n_0, $1 \leq n_0 \leq u$, gibt, so dass gilt:

$$d = t_1[x_1/d_1, \ldots, x_u/d_u] = t_2[x_1/d_1, \ldots, x_u/d_u] \cdots = t_{n_0}[x_1/d_1, \ldots, x_u/d_u]$$

Aufgrund der Minimalität von $\mathcal{I}_i$ gilt, dass eine Primklausel $\overline{\alpha} \in H$ (enthält nur positive Vorkommen von P'_i), Grundterme $\overline{d_1}, \ldots \overline{d}_m \in \Delta^{\mathcal{I}_i}$ und ein n_1 mit $1 \leq n_1 \leq v$ existieren, so dass gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha} &= \forall \overline{y}_1 \ldots \overline{y}_m P'_i(\overline{t}_1) \vee \cdots \vee P'_i(\overline{t}_v) \vee N && \text{(B.15)}\\
& \text{ } N \text{ enthält nicht } P'_i \\
\mathcal{I}_i &\models \neg(P'_i(\overline{t}_{n_1+1}) \vee \cdots \vee P'_i(\overline{t}_v) \vee N)[\overline{y}_1/\overline{d}_1, \ldots, \overline{y}_m/\overline{d}_m] && \text{(B.16)}\\
& \text{ und} \\
d &= t_1[x_1/d_1, \ldots, x_u/d_u] = \cdots = t_{n_0}[x_1/d_1, \ldots, x_u/d_u] \\
&= \overline{t}_1[\overline{y}_1/\overline{d}_1, \ldots, \overline{y}_m/\overline{d}_m] = \cdots = \overline{t}_{n_1}[\overline{y}_1/\overline{d}_1, \ldots, \overline{y}_m/\overline{d}_m] && \text{(B.17)}
\end{aligned}$$

Durch Umbenennung kann erreicht werden, dass alle x_i verschieden sind von allen $\overline{y}_j$. Damit kann die letzte Gleichung geschrieben werden als

$$t_1\rho = \cdots = t_{n_0}\rho = \overline{t}_1\rho = \cdots = \overline{t}_{n_1}\rho \tag{B.18}$$

Dabei ist ρ die Substitution

$$\rho = [x_1/d_1, \ldots, x_u/d_u, \overline{y}_1/\overline{d}_1, \ldots, \overline{y}_m/\overline{d}_m]$$

Aus (B.18) folgt weiter, dass $\{t_1, \ldots, t_{n_0}, \overline{t}_1, \ldots \overline{t}_{n_1}\}$ unifizierbar sind. Es gibt also einen allgemeinsten Unifikator[4] σ^*, so dass gilt

$$t_1\sigma^* = \cdots = t_{n_0}\sigma^* = \overline{t}_1\sigma^* = \cdots = \overline{t}_{n_1}\sigma^*$$

σ^* kann so gewählt werden, dass im Bildbereich von σ^* höchstens Variablen aus $\{x_1, \ldots, x_u, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m\}$ vorkommen.[5] Insbesondere gibt es eine Substitution σ', so dass $\rho = \sigma^*\sigma'$. σ' ersetzt Variablen durch Grundterme, da ρ Variablen durch Grundterme ersetzt. Damit lassen sich die Klauseln α und $\overline{\alpha}$ zur Klausel kl resolvieren.

$$\begin{aligned} kl = \forall x_1 \ldots \forall x_u \forall \overline{y}_1 \ldots \overline{y}_m \quad & (\neg P_i'(t_{n0+1}) \vee \cdots \vee \neg P_i'(t_k) \vee M)\sigma^* \vee \\ & (P_i'(\overline{t}_{n_1+1}) \vee \cdots \vee P_i'(\overline{t}_v) \vee N)\sigma^*) \end{aligned}$$

Es gibt eine (syntaktische) Primklausel pr, die eine echte Teilklausel von kl ist. Insbesondere ist $pr \models kl$. pr enthält weniger als k Vorkommnisse von negativen P_i'. Nach Induktionsannahme gilt aber, dass $\mathcal{I}_i$ die Primklausel pr und damit kl wahr macht.

$$\mathcal{I}_i \models kl \tag{B.19}$$

Aus (B.16) folgt, dass $\mathcal{I}_i \models \neg(P_i'(\overline{t}_{n_1+1}) \vee \cdots \vee P_i'(\overline{t}_v) \vee N)\rho$, dass also ausgeschrieben $\mathcal{I}_i \models \neg(P_i'(\overline{t}_{n_1+1}) \vee \cdots \vee P_i'(\overline{t}_v) \vee N)\sigma^*\sigma'$ gilt. Damit gibt es Elemente $e_1, \ldots, e_{u+m} \in \Delta^{\tilde{\mathcal{I}}}$, so dass gilt:

$$\mathcal{I}_{i[x_1 \mapsto e_1, \ldots, x_u \mapsto e_n, \overline{y}_1 \mapsto e_{u+1}, \ldots, \overline{y}_m \mapsto e_{u+m}]} \models \neg(P_i'(\overline{t}_{n_1+1}) \vee \cdots \vee P_i'(\overline{t}_v) \vee N)\sigma^* \tag{B.20}$$

Wegen (B.13) und $P_i'(t_h)[x_1/d_1, \ldots, x_u/d_u] = P_i'(t_h)\rho$ (für $n_0 + 1 \leq h \leq a$) gilt:

$$\mathcal{I}_{i[x_1 \mapsto e_1, \ldots, x_u \mapsto e_n, \overline{y}_1 \mapsto e_{n+1}, \ldots, \overline{y}_m \mapsto e_{u+m}]} \models \neg(\neg P_i'(t_{n0+1}) \vee \cdots \vee \neg P_i'(t_k))\sigma^* \tag{B.21}$$

[4]Vgl. Anhang A, Definition A.8, S. 230.

[5]Der von Schöning (Schöning, 2000, S.90) angegebene Algorithmus zur Konstruktion eines allgemeinsten Unifikators liefert eine Substitution σ^*, deren Bildbereich höchstens Variablen aus den zu unifizierenden Termen enthält.

Aus dieser Beziehung (B.21) folgt mit (B.19) und (B.20)

$$\mathcal{I}_{i[x_1 \mapsto e_1, \ldots, x_u \mapsto e_n, \overline{y}_1 \mapsto e_{u+1}, \ldots, \overline{y}_m \mapsto e_{u+m}]} \models M\sigma^*$$

Diese Gleichung umformuliert besagt aber: $\mathcal{I}_i \models M\sigma^*\sigma'$, d.h.

$$\mathcal{I}_i \models M\rho = M[x_1/d_1, \ldots, x_u/d_u]$$

Die letzte Beziehung ist aber die Beziehung (B.14), welche zu zeigen war. □

Beweis von Proposition 5.18 (S. 137).

Ich zeige die Aussagen für den schwierigeren prädikatenlogischen Fall; der aussagenlogische Fall ergibt sich mit parallelen Konstruktionen.

Sei $pr \in \text{Prim}_{\text{PL}}^{\mathcal{V}}((O\sigma \cup B)^*) \cap \text{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk})$. Zu zeigen ist $pr \in \text{Prim}_{\text{PL}}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}}(O^*)$. Zunächst ist $pr \in \text{Kl}_{\text{PL}}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}}(O^*)$. Angenommen es ist nicht $pr \in \text{Prim}_{\text{PL}}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}}(O^*)$. Dann gibt es eine Klausel $kl \in \text{Kl}_{\text{PL}}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}}(O^*)$, die eine echte Teilklausel von pr ist. Es können prinzipiell zwei Fälle eintreten: a) $kl \in \text{Kl}_{\text{PL}}^{\mathcal{V}}((O\sigma \cup B)^*)$; b) $kl \notin \text{Kl}_{\text{PL}}^{\mathcal{V}}((O\sigma \cup B)^*)$. Beide Fälle führen jedoch zu einem Widerspruch.

Fall a): Dieser Fall widerspricht der Voraussetzung, dass pr prim bzgl.$(O\sigma \cup B)^*$ ist, $pr \in \text{Prim}_{\text{PL}}^{\mathcal{V}}((O\sigma \cup B)^*) \cap \text{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk})$.

Fall b): In diesem Fall gilt, dass $(O\sigma \cup B)^* \not\models kl$ und $kl \models pr$ (genauer: kl ist eine echte Teilklausel von pr). Aus ersterem und Korollar 5.16 folgt, dass kl ein Symbol s enthält, i) für das entweder kein Brückenaxiom in B enthalten ist oder ii) nur ein Brückenaxiom enthalten ist, das nicht die richtige Richtung hat.

Unterfall i): Wegen Korollar 5.16 gilt, dass es für pr eine Klausel kl' gibt, für die gilt: $kl' \in \text{Kl}_{\text{PL}}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}}((O \cup B))^*$; s kommt nicht vor in kl' und $kl' \models pr$. Es entstehe pr' aus pr, indem alle Literale mit s gestrichen werden. Dann gilt, dass $(O\sigma \cup B)^* \models kl' \models pr'$. Das widerspricht aber der Primheit von pr bzgl. $(O\sigma \cup B)^*$.

Unterfall ii): OBdA sei etwa $s' \sqsubseteq s \in B$. Dann enthält kl das Symbol s mindestens einmal syntaktisch negativ. Wegen Korollar 5.16 gilt, dass es für pr eine Klausel $kl' \in \text{Kl}_{\text{PL}}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}}((O\sigma \cup B)^*)$ gibt, die s nur positiv enthält und für die $(O\sigma \cup B)^* \models kl' \models pr$ gilt. Das Symbol s kann in pr höchstens positiv enthalten sein. Andernfalls müsste bereits für pr', das aus pr entsteht, indem alle Literale mit negativem Vorkommnis s gestrichen werden, gelten, dass $(O \cup B)^* \models kl' \models pr'$. Das widerspricht aber der Primheit von pr bzgl. $(O\sigma \cup B)^*$. Nun gilt aber wegen $kl \models pr$ auch $kl[s/\bot] \models pr[s/\bot]$. Da s in kl (syntaktisch) negativ vorkommt, ist $kl[s/\bot]$ eine Tautologie; damit müsste aber auch $pr[s/\bot]$ eine Tautologie sein. Das widerspricht der Primheit von pr bzgl. $(O\sigma \cup B)^*$. □

Beweis von Theorem 5.19 (S. 137). Ich zeige die Aussagen für den schwierigeren prädikatenlogischen Fall; der aussagenlogische Fall ergibt sich mit parallelen Konstruktionen.

Es sei abkürzend $O_{res} = O_1 \otimes_2^{\overline{\gamma}} O_2 = O_1\sigma \cup B \cup O_2$ für eine Teilmenge $B \subseteq BA(\sigma)$ von Brückenaxiomen. Dabei sind O_1 und O_2 Ontologien über dem öffentlichen Vokabular $\mathcal{V}_c$. Es sei $\mathcal{V}_i$ das interne Vokabular, auf dem die Reinterpretationsoperatoren beruhen und $\mathcal{V}_{sk}$ das Vokabular zur Skolemisierung von O_1 zu O_1^*, das im Relevanzkriterium genannt ist. Schließlich sei $\mathcal{V} = \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i \cup \mathcal{V}_{sk}$ das Gesamtvokabular.

Gelte $O_{res} \not\models \beta$ und $O_1 \models \beta$. Wegen Proposition 5.13 gilt $O_1^* \models \beta$ und $(O_1\sigma \cup B)^* \not\models \perp$. Wegen Korollar 5.16 folgt, dass es ein Symbol s aus β gibt, für das gilt: s kommt nicht unter den Brückenaxiomen B vor oder es ist $ba(s) \in B$, aber nicht $g(ba(s), \beta)$. Ich betrachte nur den letzteren Fall. Der erstere Fall kann hierauf zurückgeführt werden. (Man betrachtet dann für jedes der beiden fehlenden Brückenaxiome $s \sqsubseteq s', s' \sqsubseteq s$ eine andere maximale Teilmenge von Brückenaxiomen, die zu einem Widerspruch führen.) O.E. sei $ba(s) = s' \sqsubseteq s$. Dann gilt also, dass s entweder gemischt in β vorkommt oder positiv.

Dass $s' \sqsubseteq s$ nicht im Integrationsresultat enthalten ist, bedeutet, dass es eine Teilmenge $B' = \{ba(s_1), \ldots ba(s_k)\} \subseteq \mathrm{BA}(\sigma)$ der Brückenaxiome gibt, so dass

$$Y = O_1\sigma \cup B'$$

mit O_2 kompatibel ist, aber

$$Z = O_1\sigma \cup B' \cup \{s' \sqsubseteq s\}$$

im Widerspruch zu O_2 steht. Damit folgt, dass $\neg \bigwedge O_2 \notin \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(Y)$, während $\neg \bigwedge O_2 \in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(Z)$. Es seien Y^* und Z^* O^*-neutrale Skolemisierungen mit Skolemsymbolen aus $\mathcal{V}_{sk}$. Mit Proposition 5.13 gilt weiter $\neg \bigwedge O_2 \notin \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(Y^*)$, während $\neg \bigwedge O_2 \in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(Z^*)$. Wegen Beobachtung 5.10 folgt

$$\neg \bigwedge O_2 \notin \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(Y^*)),\ \text{aber} \tag{B.22}$$

$$\neg \bigwedge O_2 \in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(Z^*)) \tag{B.23}$$

Wegen Proposition 5.17 gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}}(Y^*) &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}}(\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(Y^*) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk})) \\
\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}}(Z^*) &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}}(\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(Z^*) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}))
\end{aligned}$$

Schnittbildung auf beiden Seiten dieser Gleichungen mit $\mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$ führt zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(Y^*) &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(Y^*) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk})) \\
\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(Z^*) &= \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(Z^*) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}))
\end{aligned}$$

Daher folgt aus (B.22) und (B.23) weiter

$$\begin{aligned}\neg \bigwedge O_2 &\notin \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(Y^*) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}))\\ \neg \bigwedge O_2 &\in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(Z^*) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk}))\end{aligned}$$

Wegen Proposition 5.18 sind die Mengen $X_1 = \mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(Y^*) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk})$ und $X_2 = \mathrm{Prim}^{\mathcal{V}}_{\mathrm{PL}}(Z^*) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_{sk})$ Primkonsequenzen von O_1^* mit $X_1 \subseteq X_2$. Wähle X, $X_1 \subseteq X \subseteq X_2$, inklusionsminimal in der Eigenschaft, dass gegeben ist: $\neg \bigwedge O_2 \in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(X)$. Ein solches X existiert, da für X_2 $\neg \bigwedge O_2 \in \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(X_2)$ gilt. X muss Primkonsequenzen enthalten, in denen s positiv (oder gemischt) vorkommt; ansonsten wäre $X_1 = X_2$. Also existiert auch das zu β verwandte ϵ, so dass alle Bedingungen des Kriteriums (ReintRel) erfüllt sind. □

B.4.3 Beweise zu Abschnitt 5.3

Beweis von Beobachtung 5.25 (S. 147). Sei $\alpha \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$. Wenn $O \models \alpha$, dann auch $\mathrm{Anr}^{\mathrm{PL}}(O) \models \alpha$. Wenn $\mathrm{Anr}^{\mathrm{PL}}(O) \models \alpha$, dann $\mathrm{Prim}(O^*) \models \bigwedge O \rightarrow \alpha$. Wegen Proposition 5.13 (S. 135) daher auch $O \models O \rightarrow \alpha$ und damit $O \models \alpha$. □

Beweis von Beobachtung 5.28 (S. 148). Da O_2 konsistent ist, ist wegen des Konsistenzpostulats auch $O_1 \circ O_2$ konsistent. Da $\circ$ auch das Inklusionspostulat und das Erfolgspostulat erfüllt, gilt $O_2 \subseteq O_1 \circ O_2 \subseteq O_1 \cup O_2$. Ich behaupte, dass damit gilt:

$$O_1 \circ O_2 = ((O_1 \circ O_2) \cap O_1) \cup O_2$$

Beweis von $\supseteq$: Es ist $O_2 \subseteq O_1 \circ O_2$ und $(O_1 \circ O_2) \cap O_1 \subseteq O_1 \circ O_2$.

Beweis von $\subseteq$: Es gilt:

$$\begin{aligned}O_1 \circ O_2 &= (O_1 \circ O_2) \cap O_1 \cup (O_1 \circ O_2) \setminus O_1\\ &\subseteq (O_1 \circ O_2) \cap O_1 \cup (O_1 \cup O_2) \setminus O_1\\ &\subseteq (O_1 \circ O_2) \cap O_1 \cup O_2\end{aligned}$$

Damit ist $(O_1 \circ O_2) \cap O_1$ eine mit O_2 konsistente Menge, die in $\mathrm{Anr}(O_1)$ enthalten ist (da sie in O_1 enthalten ist). Wenn $O_1 \circ O_2 \models \alpha$, dann gilt auch $(O_1 \circ O_2) \cap O_1 \cup O_2 \models \alpha$. □

Beweis von Proposition 5.29 (S. 148). Ich zeige die Aussage für den prädikatenlogischen Fall. Durch parallele Konstruktionen lässt sich der Beweis für den aussagenlogischen Fall führen.

Die zweite Aussage lässt sich mit Beispiel 5.21 führen.

$$\begin{aligned}O_1 &= \{K(a), K(b), L(a)\}\\ O_2 &= \{\neg K(a), \neg K(b)\}\end{aligned}$$

Wie in Beispiel 5.21 lässt sich $\overline{\gamma}$ bestimmen, so dass $O_1 \odot_2^{\overline{\gamma}} O_2 \models L(b)$. Die einfache Anreicherung von O_1 ergibt keine neuen Sätze, $\mathrm{Anr}^{\mathrm{PL}}(O_1) = O_1$. Daher ist $\mathrm{Anr}^{\mathrm{PL},\vee}(O_1) = O_1 \cup \mathrm{DisA}(O_1)$. Zu $\alpha = L(b)$ gibt es aber keine Teilmenge $X \subseteq \mathrm{Anr}^{\mathrm{PL},\vee}(O_1)$, so dass $X \cup O_2 \models \alpha$.

Der Beweis der ersten Aussage benutzt wieder die Ergebnisse von Abschnitt 5.2. Sei $O_1 \otimes_2^{\overline{\gamma}} O_2 = O_1\sigma \cup B \cup O_2$ für Brückenaxiome $B \subseteq \mathrm{BA}(\sigma)$. Nun gilt folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(O_1\sigma \cup B) &\overset{\text{Prop. 5.13, S. 135}}{=} \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}((O_1\sigma \cup B)^*) \\
&\overset{\text{Beob. 5.10, S. 132}}{=} \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Prim}((O_1\sigma \cup B)^*)) \\
&\overset{\text{Prop. 5.17, S. 137}}{=} \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(\mathrm{Prim}((O_1\sigma \cup B)^*) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O_1^*)))
\end{aligned}$$

Es sei

$$X = \mathrm{Prim}((O_1\sigma \cup B)^*) \cap \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O_1^*))$$

Dann gilt weiter

$$X \overset{\text{Prop. 5.18, S. 137}}{\subseteq} \mathrm{Prim}(O_1^*) \subseteq \mathrm{Anr}^{\mathrm{PL}}(O_1)$$

Damit ist $X \cup O_2$ widerspruchsfrei, da $O_1 \otimes_2^{\overline{\gamma}} O_2$ widerspruchsfrei ist. Für alle α mit $O_1 \otimes_2^{\overline{\gamma}} O_2 \models \alpha$ und $\alpha \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}_c)$ gilt $O_1\sigma \cup B \models \bigwedge O_2 \rightarrow \alpha$, daher auch $X \models \bigwedge O_2 \rightarrow \alpha$ und folglich $X \cup O_2 \models \alpha$. □

B.5 Beweise zu Kapitel 6

B.5.1 Beweise zu Abschnitt 6.1

Beweis von Beobachtung 6.1 (S. 151). Beweis von $(BS*\alpha)*\beta \supseteq BS*(\alpha\wedge\beta)$: Wegen (AGM-R 7) gilt $BS * (\alpha \wedge \beta) \subseteq (BS * \alpha) * \beta$.

Beweis von $(BS * \alpha) * \beta \subseteq BS * (\alpha \wedge \beta)$: $(BS * \alpha) * \beta \subseteq (BS * \alpha) + \beta$ folgt wegen (AGM-R 3). Wegen der Voraussetzung folgt mit (AGM-R 8) weiter, dass $(BS * \alpha) * \beta \subseteq BS * (\alpha \wedge \beta)$. □

Beweis von Proposition 6.3 (S. 154). Angenommen $*$ erfüllt (AGM-R 1)–(AGM-R 4) und (DP 2). Es gilt $\top \models \neg\bot$. Daher folgt mit (DP 2), dass gilt: $(BS * \bot) * \top = BS * \top$. Wegen (AGM-R 1) und (AGM-R 2) ist $BS * \bot = BS_\bot$. Daher folgt weiter

$$BS_\bot * \top = BS * \top \tag{B.24}$$

Für jedes konsistente Belief-Set BS' gilt aber wegen (AGM-R 3) und (AGM-R 4), dass $BS' * \top = BS'$. Damit folgt aus (B.24), dass alle konsistenten Belief-Sets identisch sind, Widerspruch. □

B.5.2 Beweise zu Abschnitt 6.2

Beweis von Beobachtung 6.4 (S. 161). Alle Aussagen gelten trivialerweise, wenn O inkonsistent ist. Daher wird in den folgenden Beweisen angenommen, dass O konsistent ist.

Ad 1: Sei $\circ_1 \in \{\otimes_1, \odot_1, \oplus_1^{\mathrm{sel}}\}$.

Beweis für (Reint-DP 1): Da O_1 und O_2 für triggernde Literale stehen, gilt $O_2 \models O_1$ genau dann, wenn $O_1 = O_2$. Sei $\circ_1 \in \{\otimes_1, \odot_1\}$. Sind O und O_2 kompatibel, dann gilt $(O \circ O_1) \circ_1 O_2 = (O \circ_1 O_2) \circ_1 O_2 = O \cup O_2 = O \circ_1 O_2$. Sind O und O_2 nicht kompatibel, so gilt wegen der Proposition zur Konservativität der Typ-1-Operatoren (Proposition 3.16, S. 89), dass $(O \circ_1 O_2) \circ_1 O_2 \equiv_{\mathcal{V}_c} O \circ_1 O_2$.

Gegenbeispiel zu (Reint-DP 2): Wähle $O = \emptyset$, $O_1 = \{K(a)\}$ sowie $O_2 = \{\neg K(a)\}$. Dann ist $(O \circ_1 O_1) \circ_1 O_2 \models K(a)$, aber $O \circ_1 O_2 \models \neg K(a)$.

Beweis für (Reint-DP 3): Nach Voraussetzung ist $O \circ_1 O_2 \models O_1$. Wegen Monotonie gilt $O \subseteq O \circ_1 O_2$, also ist insbesondere $O \cup O_1$ konsistent. Daher ist $O \circ_1 O_1 = O \cup O_1$ und folglich $(O \circ_1 O_1) \circ_1 O_2 = (O \cup O_1) \circ_1 O_2 \supseteq O_1$.

Beweis für (Reint-DP 4): Nach Voraussetzung ist $O_1 \cup O \circ_1 O_2$ konsistent. Wegen Monotonie ist $O \subseteq O \circ_1 O_2$, also ist auch $O \cup O_1$ konsistent. Daher ist $O \circ_1 O_1 = O \cup O_1$ und folglich $(O \circ_1 O_1) \circ_1 O_2 = (O \cup O_1) \circ_1 O_2 \supseteq O_1$; insbesondere ist $O_1 \cup (O \circ_1 O_1) \circ_1 O_2$ konsistent.

Ad 2: Sei $\circ_2 \in \{\otimes_2, \odot_2, \oplus_2^{\mathrm{sel}}\}$.

Beweis für (Reint-DP 1): Da O_1 und O_2 für triggernde Literale stehen, gilt $O_2 \models O_1$ genau dann, wenn $O_1 = O_2$. Also ist $(O \circ_2 O_1) \circ_2 O_2 = (O \circ_2 O_2) \circ_2 O_2 = O \circ_2 O_2$, da Typ-2-Operatoren das Erfolgspostulat erfüllen.

Gegenbeispiel zu (Reint-DP 2): Sei $O = \{K(b)\}$, $O_1 = \{K(a)\}$ und $O_2 = \{\neg K(a)\}$. Dann ist die Voraussetzung $O_1 \cup O_2 \models \perp$ erfüllt. Auf der einen Seite ist $O \circ_2 O_2 = \{K(b), \neg K(a)\} \models K(b)$; auf der anderen Seite aber ist $(O \circ_2 O_1) \circ_2 O_2 = \{K(b), K(a)\} \circ_2 \{\neg K(a)\} \not\models K(b)$ wegen Proposition 3.17.3 (im Falle der schwachen Operatoren) und Proposition 3.17.4 (im Falle der starken Operatoren) und ebenfalls wegen 3.17.3 für die selektionsbasierten Operatoren $\oplus_2^{\mathrm{sel}}$, da in diesem Falle $(O \otimes_2 O_1) \otimes_2 O_2 \equiv (O \oplus_2^{\mathrm{sel}} O_1) \oplus_2^{\mathrm{sel}} O_2$.

Beweis für (Reint-DP 3): Es gelte $O \circ_2 O_2 \models O_1$.

Fall 1: $O \cup O_2$ ist konsistent: Der Beweis ist derselbe wie für die Typ-1-Operatoren.

Fall 2: $O \cup O_2$ ist inkonsistent. OBdA kann angenommen werden, dass $O_2 = \{K(a)\}$ gilt. (Der Fall, dass O_2 ein negatives konzeptbasiertes Literal enthält, wird in entsprechender Weise bewiesen.) Unterfall 2.1: $K \notin \mathcal{V}(O_1)$. Dann folgt aus der Voraussetzung $O \circ_2 O_2 \models O_1$ mit Proposition 3.17.1, dass $O \models O_1$, folglich ist auch $(O \circ_2 O_1) = O \cup O_1$. Wegen 3.17.1 gilt: $(O \cup O_1) \circ_2 O_2 \models O_1$. Unterfall 2.2:

$K \in \mathcal{V}(O_1)$. Sei $\circ_2 = \otimes_2$. Wegen $O \circ_2 O_2 \models O_1$ und Proposition 3.17.3 muss O_1 das K positiv enthalten, hat also die Form $O_1 = \{K(c)\}$. Wegen des Erfolgspostulats gilt $O \otimes_2 \{K(c)\} \models \{K(c)\}$ und somit auch $(O \otimes_2 \{K(c)\}) \cup \{a \not\doteq c\} \models \{K(c)\}$. Wegen Proposition 3.17.2 ist damit $(O \otimes_2 \{K(c)\}) \otimes_2 \{K(a)\} \models \{K(c)\}$. Sei nun $\circ_2 = \odot_2$. Kommt K positiv vor in O_1, dann hat dieses die Form $O_1 = \{K(c)\}$. In diesem Fall führt wieder Proposition 3.17.2 zum Ergebnis $(O \odot_2 O_1) \odot_2 O_2 \models O_1$. Andernfalls hat O_1 die Form $O_1 = \{\neg K(c)\}$; mit der Voraussetzung $O \circ_2 O_2 \models O_1$ folgt aus Proposition 3.17.4, dass $O \models \neg\, \mathrm{msc}_O(a)(c)$ und $O \models O_1$. Insbesondere ist $O \odot_2 O_1 = O \cup O_1 \equiv O$. Also ist $\mathrm{msc}_{O \odot_2 O_1}(a) = \mathrm{msc}_O(a)$. Daher folgt aus $O \models \neg\, \mathrm{msc}_O(a)(c)$, dass $O \odot_2 O_1 \models \neg\, \mathrm{msc}_{O \odot_2 O_1}(a)(c)$. Da auch $O \odot_2 O_1 \models O_1$ gegeben ist, gilt wegen Proposition 3.17.4, dass $(O \odot_2 O_1) \odot_2 O_2 \models O_1$. Mit einem entsprechenden Argument und Proposition 3.17.5 wird der Beweis für $\oplus_2^{\mathrm{sel}}$ geführt.

Beweis für (Reint-DP 4): Es gelte $O_1 \cup (O \circ_2 O_2) \not\models \perp$.

Fall 1: $O \cup O_2$ ist konsistent. Der Beweis ist derselbe wie im Falle der Typ-1-Operatoren.

Fall 2: $O \cup O_2$ ist inkonsistent. Wenn auch $(O \circ_2 O_1) \cup O_2$ konsistent ist, dann gilt $(O \circ_2 O_1) \circ_2 O_2 = (O \circ_2 O_1) \cup O_2$. Da $O \circ_2 O_1 \models O_1$, gilt damit auch $(O \circ_2 O_1) \circ_2 O_2 \models O_1$, insbesondere ist $O_1 \cup (O \circ_2 O_1) \circ_2 O_2) \not\models \perp$. Daher betrachte ich den Fall, dass $(O \circ_2 O_1) \cup O_2$ inkonsistent ist.

OBdA sei $O_2 = \{K(a)\}$. Unterfall 2.1: $K \notin \mathcal{V}(O_1)$. Wegen des Erfolgspostulats gilt $O \circ_2 O_1 \models O_1$ und mit Proposition 3.17.1 folgt $(O \circ_2 O_1) \circ_2 O_2 \models O_1$. Da $(O \circ_2 O_1) \circ_2 O_2$ widerspruchsfrei ist, muss $O_1 \cup (O \circ_2 O_1) \circ_2 O_2 \not\models \perp$ gelten. Unterfall 2.2: $K \in \mathcal{V}(O_1)$. Angenommen $O_1 \cup (O \circ_2 O_1) \circ_2 O_2 \models \perp$. Hat O_1 die Form $O_1 = \{\neg K(c)\}$, dann gilt wegen Proposition 3.17.2, dass $O_1 \cup O \circ_2 O_1 \cup \{a \not\doteq c\}$ inkonsistent ist. Da $O \circ_2 O_1 \models O_1$ kann das aber nur der Fall sein, wenn $O \circ_2 O_1 \models a \doteq c$. Dann ist $O_1 = \{\neg K(a)\}$, was der Voraussetzung $O_1 \cup (O \circ_2 O_2) \not\models \perp$ widerspricht.

Wenn O_1 die Form $O_1 = \{K(c)\}$ hat, dann kann wegen Proposition 3.17.3 nur $\circ_2 = \odot_2$ oder $\circ_2 = \oplus_2^{\mathrm{sel}}$ der Fall sein. In diesem Fall folgte mit der Annahme $(O_1 \cup (O \circ_2 O_1) \circ_2 O_2 \models \perp)$, d.h. $(O \circ_2 K(c)) \circ_2 K(a) \models \neg K(c)$, aus Proposition 3.17.4 bzw. 3.17.5 , dass $O \circ_2 K(c) \models \neg K(c)$, d.h. die Inkonsistenz von $O_1 \cup (O \circ_2 O_1)$ – im Widerspruch zur Konsistenz von $O \odot_2 O_1$ und $O \odot_2 O_1 \models O_1$ (Erfolgspostulat).

Ad 3

Beweise für (Reint-DP 3) und (Reint-DP 4): Siehe die Beweise für triggernde Literale. Dort wird die Literaleigenschaft des Triggers nicht benutzt.

Gegenbeispiel zu (Reint-DP 1): Das Gegenbeispiels ist eine Adaption eines Beispiels von Delgrande und Schaub (2000). Es seien

$$\begin{aligned} O &= \{\neg K(a)\} \\ O_1 &= \{(K \sqcup L)(a)\} \\ O_2 &= \{K(a)\} \models O_1 \end{aligned}$$

Es sei γ eine beliebige Selektionsfunktion, die die Reinterpretation von Rollen- und Konzeptsymbolen bevorzugt. Dann ergeben sich folgende Resultate:

$$\begin{aligned} O \otimes_1^\gamma O_2 &= \{\neg K(a), K'(a'), K \sqsubseteq K', a \doteq a'\} \not\models L(a) \\ O \otimes_1^\gamma O_1 &= \{\neg K(a), (K \sqcup L)(a)\} \models L(a) \\ (O \otimes_1^\gamma O_1) \otimes_1^\gamma O_2 &= \{\neg K(a), (K \sqcup L)(a), K'(a'), \\ &\quad K \sqsubseteq K', a \doteq a', L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L\} \models L(a) \end{aligned}$$

Also sind $O \otimes_1^\gamma O_2$ und $(O \otimes_1^\gamma O_1) \otimes_1^\gamma O_2$ bzgl. $\mathcal{V}_c$ nicht äquivalent.

Gegenbeispiel zu (Reint-DP 2): Siehe das Gegenbeispiel für triggernde Literale.

Ad 4

Beweise für (Reint-DP 3) u. (Reint-DP 4): Siehe die Beweise für die schwachen Operatoren $\otimes_1^\gamma$.

Gegenbeispiel zu (Reint-DP 1): Es wird dasselbe Gegenbeispiel wie für die schwachen Operatoren betrachtet.

$$\begin{aligned} O &= \{\neg K(a)\} \\ O_1 &= \{(K \sqcup L)(a)\} \\ O_2 &= \{K(a)\} \models O_1 \end{aligned}$$

Die Selektionsfunktion γ lässt sich so wählen, dass gilt:

$$\begin{aligned} \gamma(\mathrm{MBA}^{\mathrm{st}}(1, \sigma_{\mathcal{V}_c}, O, O_1)) &= \{K \sqsubseteq K', a \doteq a'\} \\ \gamma(\mathrm{MBA}^{\mathrm{st}}(1, \sigma_{\mathcal{V}_c}, O \odot_1^\gamma O_1), O_2)) &= \{\{K \sqsubseteq K', a \doteq a', L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L\}\} \end{aligned}$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} O \odot_1^\gamma O_2 &= \{\neg K(a), K'(a'), K \sqsubseteq K', a \doteq a'\} \not\models L(a) \\ O \odot_1^\gamma O_1 &= \{\neg K(a), (K \sqcup L)(a)\} \models L(a) \\ (O \odot_1^\gamma O_1) \odot_1^\gamma O_2 &= \{\neg K(a), (K \sqcup L)(a), K'(a'), \\ &\quad K \sqsubseteq K', a \doteq a', L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L\} \models L(a) \end{aligned}$$

Gegenbeispiel zu (Reint-DP 2): Siehe das Gegenbeispiel für Typ-1-Operatoren für triggernde Literale.

Ad 5

Gegenbeispiel zu (Reint-DP 1): Hier funktioniert dasselbe Beispiel wie für die Typ-1-Operatoren für triggernde Literale.

$$\begin{aligned} O &= \{\neg K(a)\} \\ O_1 &= \{(K \sqcup L)(a)\} \\ O_2 &= \{K(a)\} \end{aligned}$$

Es sei γ eine beliebige Selektionsfunktion, die die Reinterpretation von Rollen- und Konzeptsymbolen bevorzugt. Dann ergeben sich folgende Resultate:

$$\begin{aligned} O \otimes_2^\gamma O_2 &= \{\neg K'(a'), K(a), K' \sqsubseteq K, a \doteq a'\} \not\models L(a) \\ O \otimes_2^\gamma O_1 &= \{\neg K(a), (K \sqcup L)(a)\} \models L(a) \\ (O \otimes_2^\gamma O_1) \otimes_2^\gamma O_2 &= \{\neg K'(a'), (K' \sqcup L')(a'), K(a), \\ &\quad K' \sqsubseteq K, a \doteq a', L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L\} \models L(a) \end{aligned}$$

Gegenbeispiel zu (Reint-DP 2): Siehe das Gegenbeispiel für triggernde Literale.

Gegenbeispiel zu (Reint-DP 3): Es seien K, L die einzigen Konzeptsymbole und a, b, c, e die einzigen Konstanten im öffentlichen Vokabular $\mathcal{V}_c$ und

$$\begin{aligned} O &= \{K(a), \neg L(a) \vee \neg K(c), K(b) \vee \neg K(e)\} \\ O_1 &= \{\neg K(b)\} \\ O_2 &= \{\neg K(a), L(a), K(c) \vee \neg K(b), K(e)\} \\ X_1 &= \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}) \top (O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2) \\ X_2 &= \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}) \top ((O \cup O_1)\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2) \end{aligned}$$

In der Menge der maximal kompatiblen Brückenaxiommengen X_1 ist die Menge

$$B_1 = \{L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L, K \sqsubseteq K', a \doteq a', b \doteq b', c \doteq c', e \doteq e'\}$$

die einzige Menge, die sämtliche Identitäten für Konstanten enthält. Da γ nur Konzept- und Rollensymbole reinterpretiert, gilt daher, dass $\gamma(X_1) = \{B_1\}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} O \otimes_2^\gamma O_2 &= \{K'(a'), \neg L'(a') \vee \neg K'(c'), K'(b') \vee \neg K'(e'), \\ &\quad K \sqsubseteq K', L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L, a \doteq a', b \doteq b', c \doteq c', e \doteq e', \\ &\quad \neg K(a), L(a), K(c) \vee \neg K(b), K(e)\} \models O_1 \end{aligned}$$

Es ist $O \cup O_1$ konsistent und $O \cup O_1 \models \neg K(e)$. Daher gibt es keine Menge von Brückenaxiomen $B \in X_2$, in der $K \sqsubseteq K'$ oder $K' \sqsubseteq K$ enthalten ist; genauer gilt sogar, dass X_2 als einzige Menge von Brückenaxiomen, die alle Identitäten für Konstanten enthält, die Menge

$$B_2 = \{L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L, a \doteq a', b \doteq b', c \doteq c', e \doteq e'\}$$

enthält. Daher gilt $\gamma(X_2) = \{B_2\}$. Damit folgt weiter:

$$(O \otimes_2^\gamma O_1) \otimes_2^\gamma O_2 = (O \cup O_1) \otimes_2^\gamma O_2 \not\models O_1$$

Insgesamt gilt $O \otimes_2^\gamma O_2 \models O_1$ und $(O \otimes_2^\gamma O_1) \otimes_2^\gamma O_2 \not\models O_1$, also ist (Reint-DP 3) nicht erfüllt.

Bemerkung 12. Es lässt sich sogar ein beschreibungslogisches Gegenbeispiel gegen (Reint-DP 3) konstruieren:

$$\begin{array}{rcl} O & = & \{K(a), \exists R_1.K \sqsubseteq \neg L, R_1(a,c), \exists R_2.K \sqsubseteq K, R_2(b,e)\} \\ O_1 & = & \{\neg K(b)\} \\ O_2 & = & \{\neg K(a), L(a), K(e), \exists R_3.K \sqsubseteq K, R_3(c,b)\} \end{array}$$

Für alle Selektionsfunktionen γ, die die Reinterpretation von Konzept- und Rollensymbolen bevorzugen, gilt:

$$\begin{array}{rcl} O \otimes_2^\gamma O_1 & = & O \cup O_1 \\ O \otimes_2^\gamma O_2 & = & O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2 \cup \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}) \setminus \{K' \sqsubseteq K\} \models \neg K(b) \\ (O \otimes_2^\gamma O_1) \otimes_2^\gamma O_2 & = & (O \cup O_1)\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_2 \cup \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}) \setminus \{K' \sqsubseteq K, K \sqsubseteq K'\} \\ & \not\models & \neg K(b) \end{array}$$

Die Mengen von Ontologieaxiomen O, O_1, O_2 sind einfach strukturiert und setzen keine komplexen Konstruktoren voraus. Die einzige Ausnahme ist die Verwendung von zirkulären TBox-Axiomen, die in vielen Anwendungsfällen zur Modellierung von Ontologien vermieden werden (sollten).

Gegenbeispiel zu (Reint-DP 4): Es werden folgende Mengen von Ontologieaxiomen definiert:

$$\begin{array}{rcl} O & = & \{L(a), L(b) \vee M(b)\} \\ O_1 & = & \{\neg K(a), \neg L(b)\} \\ O_2 & = & \{\neg L(a) \vee K(a), \neg L(b), \neg M(b)\} \end{array}$$

Die Selektionsfunktion γ lässt sich so wählen, dass sich folgende Ergebnisse erzielen lassen:

$$\begin{aligned}
O \otimes_2^\gamma O_2 &= \{L'(a'), L'(b') \vee M'(b'), \neg L(a) \vee K(a), \neg L(b), \neg M(b), \\
&\quad a \doteq a', b \doteq b', M \sqsubseteq M', M' \sqsubseteq M, L \sqsubseteq L'\} \not\models \neg \bigwedge O_1 \\
O \otimes_2^\gamma O_1 &= \{L(a), L(b) \vee M(b), \neg K(a), \neg L(b)\} \models M(b) \\
(O \otimes_2^\gamma O_1) \otimes_2^\gamma O_2 &= \{L'(a'), L'(b') \vee M'(b'), \neg K'(a'), \neg L'(b'), \neg L(a) \vee K(a), \\
&\quad \neg L(b), \neg M(b), a \doteq a', b \doteq b', L \sqsubseteq L', L' \sqsubseteq L, M \sqsubseteq M', \\
&\quad K' \sqsubseteq K\} \models \neg \bigwedge O_1
\end{aligned}$$

Ad 6:

Gegenbeispiele zu (Reint-DP 1), (Reint-DP 3) und (Reint-DP 4): Es werden jeweils dieselben Mengen von Ontologieaxiomen wie in den entsprechenden Gegenbeispielen für die schwachen Operatoren $\otimes_2^\gamma$ gewählt. Die Selektionsfunktion γ lässt sich dann so wählen, dass sich dieselben Resultate erzielen lassen wie im Falle von $\otimes_2^\gamma$.

Gegenbeispiel zu (Reint-DP 2): Siehe das Gegenbeispiel für triggernde Literale.

□

Beweis von Proposition 6.6 (S. 166). Gegeben sei ein Disambiguierungsschema $\Phi \in \mathrm{Ear}(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i)$, das in der Definition des Operators $\circ$ benutzt wird.

Der Beweis wird durch Induktion über die Länge $n = |A|$ der Folge A geführt.

Induktionsanfang ($|A| = 0$): In diesem Fall ist A die leere Folge und es kann $\sigma = \rho = id$ gewählt werden.

Induktionsvoraussetzung (IV): Es wird vorausgesetzt, dass die drei Aussagen für die Folge A^n der Länge n mit den Substitutionen σ_n, ρ_n gelten.

Induktionsschritt: Sei A eine Folge der Länge $n+1$ und O_{n+1} das letzte Element dieser Folge. Es sei weiter $\tau = \Phi(\mathcal{V}_c, \mathcal{V}(O \circ A^n) \cap \mathcal{V}_i)$ die Substitution, die im Falle der Inkonsistenz von $O \circ A^n \cup O_{n+1}$ für die Internalisierung benutzt wird. Weiter sei τ^{-1} diejenige Substitution, die τ in folgendem Sinne umkehrt: $\tau^{-1}(\tau(s)) = s$ sowie $\tau^{-1}(s) = s$ für alle $s \in \mathcal{V}_c$ und $\tau^{-1}(s) = s$ für alle $s \in \mathcal{V}_i \setminus \tau[\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i]$).

Fall a): $O \circ A^n \cup O_{n+1}$ ist konsistent: Dann gilt $O\sigma_n \subseteq O \circ A^n \subseteq O \circ A^n \cup O_{n+1} = O \circ A^{n+1}$ und $O \cup \tilde{A}^{n+1} = O \cup \tilde{A}^n \cup O_{n+1} \subseteq (O \circ A^n)\rho_n \cup O_{n+1} = ((O \circ A^n) \cup O_{n+1})\rho_n = (O \circ A^{n+1})\rho_n$, da $\mathcal{V}(O_{n+1}) \subseteq \mathcal{V}_c$ und daher $O_{n+1} = O_{n+1}\rho_n$ wegen Teil 3 der Induktionsvoraussetzung. Daher kann $\sigma_{n+1} = \sigma_n$ und $\rho_{n+1} = \rho_n$ gewählt werden.

Fall b): $O \circ A^n \cup O_{n+1}$ ist inkonsistent: Sei $\rho_{n+1} = \tau^{-1}\rho_n$, d.h. die Substitution τ^{-1} gefolgt von der Substitution ρ_n. ρ_{n+1} erfüllt die dritte Bedingung der Proposition: Wenn $L \in \mathcal{V}(O) \cup \mathcal{V}_c$, dann gilt $L\rho_{n+1} = L\tau^{-1}\rho_n = L\rho_n \overset{\mathrm{IV}}{=} L$.

Zum Beweis der zweiten Bedingung: Es gilt

$$O \cup \tilde{A}^{n+1} = O \cup \tilde{A}^n \cup O_{n+1} \subseteq (O \circ A^n)\rho_n \cup O_{n+1}$$

Daher reicht für den Beweis von $O \cup \tilde{A}^{n+1} \subseteq (O \circ A^{n+1})\rho_{n+1}$ ein Beweis von (i) $O \circ A^n \subseteq (O \circ A^{n+1})\tau^{-1}$ und (ii) $O_{n+1} \subseteq (O \circ A^{n+1})\tau^{-1}\rho_n$.

Falls $\circ = \circ_1$, dann gilt per Definition $O \circ_1 A^n \cup (O_{n+1})\tau \subseteq O \circ_1 A^{n+1}$. Da $\tau[\mathcal{V}_c] \cap \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}(O \circ_1 A^n) = \emptyset$, gilt $O \circ_1 A^n = (O \circ_1 A^n)\tau^{-1} \subseteq (O \circ_1 A^{n+1})\tau^{-1}$, was (i) zeigt. Da $\tau[\mathcal{V}_c] \cap \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}(O_{n+1}) = \emptyset$, gilt auch $O_{n+1} = (\alpha_{n+1})\tau\tau^{-1} \subseteq (O \circ_1 A^{n+1})\tau^{-1}$. Da $\mathcal{V}(O_{n+1}) \subseteq \mathcal{V}_c$, gilt $O_{n+1} = (O_{n+1})\rho_n \subseteq (O \circ_1 A^{n+1})\tau^{-1}\rho_n$, was Teil (ii) im Falle der Typ-Operatoren zeigt.

Sei $\sigma_{n+1} = id$. Dann ist $O\sigma_{n+1} \subseteq O \circ_1 A^{n+1}$ wegen der Monotonie von Typ-1-Operatoren. Also gilt Teil 1 der Proposition für Typ-1-Operatoren.

Sei nun $\circ = \circ_2$ ein Operator des Typs 2. Da $\tau[\mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}_i] \cap \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}(O \circ_2 A^n) = \emptyset$, gilt $O \circ_2 A^n = (O \circ_2 A^n)\tau\tau^{-1} \subseteq ((O \circ_2 A^n)\tau \cup O_{n+1}\tau^{-1} \subseteq (O \circ_2 A^{n+1})\tau^{-1}$, was Teil (i) für Typ-2-Operatoren zeigt. Da $\mathcal{V}(O_{n+1}) \subseteq \mathcal{V}_c$, folgt

$$O_{n+1} = (O_{n+1})\tau^{-1} = (O_{n+1})\tau^{-1}\rho_n \subseteq (O \circ A^{n+1})\tau^{-1}\rho_n$$

was Teil (ii) zeigt.

Im Falle der Typ-2-Operatoren sei $\sigma_{n+1} = \sigma_n\tau$. Dann gilt

$$O\sigma_{n+1} = (O\sigma_n)\tau \subseteq (O \circ_2 A^n)\tau \subseteq (O \circ_2 A^n)\tau \cup O_{n+1} \subseteq O \circ_2 A^{n+1}$$

Das zeigt Teil 1 der Proposition für Typ-2-Operatoren. □

B.5.3 Beweise zu Abschnitt 6.3

Für den Beweis von Beobachtung 6.8 wird folgendes Lemma benötigt:

Lemma B.5. *Für jedes $X_2 \in \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}) \top (O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_1 \cup O_2)$ gibt es ein $X_1 \in \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}) \top (O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_1)$, so dass $X_2 \subseteq X_1$.*

Beweis. Ist $O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_1 \cup O_2 \cup X_2$ konsistent, so ist auch $O_1 \cup O_2 \cup X_2$ konsistent; und ist X_2 nicht maximal, dann gibt es eine Obermenge X_1 in $\mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}) \top (O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_1)$. □

Beweis von Beobachtung 6.8 (S. 168).

1. Es seien

$$\begin{aligned} X_1 &= \gamma(\mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}) \top (O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_1)) \\ X_2 &= \gamma(\mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}) \top (O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_1 \cup O_2)) \end{aligned}$$

   Mit dieser Notation ist $(O \otimes_2^\gamma O_1) \cup O_2 = O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_1 \cup O_2 \cup X_1$ und auch $(O \otimes_2^\gamma O_1) \cup O_2 = O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_1 \cup O_2 \cup X_2$. Es sei $(O \otimes_2^\gamma O_1) \cup O_2$ konsistent. Folglich gibt es ein $X' \in \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c}) \top (O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_1 \cup O_2)$ mit $X_1 \subseteq X'$. Wegen Lemma

B.5 gibt es ein $X'' \in \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})\top(O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_1)$ mit $X' \subseteq X''$, also gilt $X_1 \subseteq X''$. Da aber X_1 inklusionsmaximal ist, muss $X_1 = X'' = X'$ und folglich $X_1 \in \mathrm{BA}(\sigma_{\mathcal{V}_c})\top(O\sigma_{\mathcal{V}_c} \cup O_1 \cup O_2)$ gelten. Neben der wegen B.5 geltenden ersten Vorbedingung für maximumsbasierte Selektionsfunktionen ist damit auch die zweite Vorbedingung erfüllt, so dass $X_1 = X_2$ folgt. Insbesondere gilt also die zu zeigende Gleichung $O \otimes_2^\gamma (O_1 \cup O_2) = (O \otimes_2^\gamma O_1) \cup O_2$.

2. Der Beweis für Typ-1-Operatoren lässt sich auf die Typ-2-Operatoren zurückführen, da allgemein gilt: $O_1 \otimes_1^\gamma O_2 = O_2 \otimes_2^\gamma O_1$. Es sei $(O \otimes_1^\gamma O_1) \cup O_2$ konsistent. Damit ist $(O_1 \otimes_2^\gamma O) \cup O_2$ konsistent. Es gilt

$$(O_2 \cup O) \otimes_1^\gamma O_1 = O_1 \otimes_2^\gamma (O_2 \cup O) = O_1 \otimes_2^\gamma (O \cup O_2)$$

Wegen der Aussage im ersten Teil dieser Beobachtung folgt weiter

$$O_1 \otimes_2^\gamma (O \cup O_2) = (O_1 \otimes_2^\gamma O) \cup O_2 = (O \otimes_1^\gamma O_1) \cup O_2$$

Insgesamt ergibt sich die Identität $(O_2 \cup O) \otimes_1^\gamma O_1 = O_2 \cup (O \otimes_1^\gamma O_1)$.

□

Beweis von Beobachtung 6.9 (S. 169). Der Beweis wird durch Induktion über die Länge von A geführt.
$|A| = 0$. Dann ist $\tilde{A} = \emptyset$, $O \circ_1 A = O$ und $\tilde{A}' = \emptyset$ liefert das gewünschte Ergebnis.
Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für alle A der Länge n.
$|A| = n+1$: Es sei α_{n+1} das letzte Element in A und $B = A^n$ das n-Präfix von A. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $\tilde{B}' \subseteq \tilde{B}$, so dass $O \cup \tilde{B}' \subseteq O \circ_1 B$ und $O \circ_1 B$ ist eine konservative Erweiterung von $O \cup \tilde{B}'$. Es werden zwei Fälle betrachtet. Fall 1: $O \circ_1 B \cup \{\alpha_{n+1}\}$ ist konsistent. In diesem Falle wird $\tilde{A}' = \tilde{B}' \cup \{\alpha_{n+1}\}$ gesetzt. Damit folgt unmittelbar $O \cup \tilde{A}' \subseteq O \circ_1 A$. $O \circ_1 A$ ist eine konservative Erweiterung von $O \cup \tilde{A}'$. Denn sei $\beta \in \mathrm{Satz}(\mathcal{V}(O \cup \tilde{A}'))$. Es ist $O \circ_1 A \models \beta$ genau dann, wenn $O \circ_1 B \models \alpha_{n+1} \to \beta$; wegen der Induktionsvoraussetzung gilt letzteres genau dann, wenn $O \cup \tilde{B}' \models \alpha_{n+1} \to \beta$ und das wiederum gilt genau dann, wenn $O \cup \tilde{A}' \models \beta$. Fall 2: $O \circ_1 B \cup \{\alpha_{n+1}\}$ ist inkonsistent. In diesem Falle wird $\tilde{A}' = \tilde{B}'$ gesetzt. Dann gilt: $O \cup \tilde{A}' = O \cup \tilde{B}'$ und wegen der Induktionsvoraussetzung $O \cup \tilde{B}' \subseteq O \circ_1 B$. Wegen Monotonie folgt weiter $O \circ_1 B \subseteq (O \circ_1 B) \circ_1 \alpha_{n+1} = O \circ_1 A$. Da $O \circ_1 A$ wegen Proposition 3.16 eine konservative Erweiterung von $O \circ_1 B$ und $O \circ_1 B$ nach Induktionsvoraussetzung eine konservative Erweiterung von $O \cup \tilde{B}' = O \cup \tilde{A}'$ ist, ist $O \circ_1 A$ auch eine konservative Erweiterung von $O \cup \tilde{A}'$. □

B.5.4 Beweise zu Abschnitt 6.4

Beweis von Theorem 6.12 (S. 173). Dies ist der Beweis von Zhang und Foo (2002). Da alle α_i konsistent sind, sind wegen der Konsistenzbedingung auch alle B_i konsistent.

„$t(\mathcal{I}) \subseteq \overline{\lim}_{i\to\infty} \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(B_i)$“: Sei $\alpha \in t(\mathcal{I})$. Da es unendlich viele zu α äquivalente Sätze gibt (für aussagenlogisches α z.B. alle $\neg^{2n}\alpha$ für $n \in \mathbb{N}$), existiert eine Teilfolge $\langle \alpha_{k_j} \rangle_{j\in\mathbb{N}}$ von $\langle \alpha_i \rangle_{i\in\mathbb{N}}$, die aus allen zu α äquivalenten Sätzen besteht. Da $*$ die Erfolgsbedingung erfüllt, gilt $\alpha_{k_j} \in \mathrm{Cn}(B_{k_j})$ bzw. $\alpha \in \mathrm{Cn}(B_{k_j})$. Daher ist $\alpha \in \overline{\lim}_{i\to\infty} \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(B_i)$ und folglich $t(\mathcal{I}) \supseteq \overline{\lim}_{i\to\infty} \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(B_i)$.

„$\underline{\lim}_{i\to\infty} \mathrm{Cn}^{\mathcal{V}_c}(B_i) \subseteq t(\mathcal{I})$“: Angenommen $\alpha \in \underline{\lim}_{i\to\infty}$. Dann gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\alpha \in \mathrm{Cn}(B_i)$ für alle $i \geq i_0$. Falls $\alpha \notin t(\mathcal{I})$, dann $\neg\alpha \in t(\mathcal{I})$. Es gibt wieder unendlich viele α_{k_j}, die zu $\neg\alpha$ äquivalent sind. Wegen der Erfolgsbedingung ist $\alpha_{k_j} \in \mathrm{Cn}(B_{k_j})$. Folglich gibt es ein $k_{j_0} \geq i_0$, so dass $\neg\alpha \in \mathrm{Cn}(B_{k_{j_0}})$. Aber es ist auch $\alpha \in \mathrm{Cn}(B_{k_{j_0}})$ – im Widerspruch zur Konsistenz von $B_{k_{j_0}}$.

Wenn $B_0 \backslash t(\mathcal{I})$ endlich ist, lässt es sich darstellen durch $B_0 \backslash t(\mathcal{I}) = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. Damit ist $\{\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_m\} \subseteq t(\mathcal{I})$ und es gibt ein α_{n_0}, so dass $\alpha_{n_0} \equiv \neg\beta_0 \wedge \cdots \wedge \neg\beta_m$. Wegen der Erfolgsbedingung ist $\alpha_{n_0} \in \mathrm{Cn}(B_{n_0})$. Da $*$ Vakuität erfüllt, ist $B_{n_0} \subseteq B_0 \cup t(\mathcal{I})$. Da B_{n_0} konsistent ist, folgt weiter, dass $B_{n_0} \subseteq t(\mathcal{I})$. Ab Schritt n_0 erfolgt daher (wegen Vakuität) nur noch ein konsistentes Hinzufügen von α_i für $i \geq n_0$, so dass $\langle B_i \rangle_{n_0 \leq i}$ eine monoton wachsende Folge ist. Folglich konvergiert $\langle B_i \rangle_{i\in\mathbb{N}}$, und mit der ersten Teilaussage folgt $\lim_{i\to\infty} \mathrm{Cn}(B_i) = t(\mathcal{I})$. □

Beweis von Lemma 6.23 (S. 179). Eine Konvention im Rahmen dieses Beweises: Elemente der Domäne werden mit d und gestrichenen sowie indizierten Varianten bezeichnet. Ich konstruiere wie folgt aus $\mathcal{I}$ ein Modell $\mathcal{I}'$, für das $\mathcal{I}'(c) \neq \mathcal{I}'(a)$ gilt:

1. $\Delta^{\mathcal{I}'} = \Delta^{\mathcal{I}} \cup \{d_c\}$ für ein neues Element $d_c \notin \Delta^{\mathcal{I}}$.
2. $\mathcal{I}'(b) = \mathcal{I}(b)$ für alle Konstanten $b \neq c$.
3. $\mathcal{I}'(c) = d_c$.
4. $K^{\mathcal{I}'} = K^{\mathcal{I}}$, falls $d_a \notin K^{\mathcal{I}}$, sonst $K^{\mathcal{I}'} = K^{\mathcal{I}} \cup \{d_c\}$, für alle Konzeptsymbole K.
5. $\langle d_1, d_2 \rangle \in R^{\mathcal{I}'}$ genau dann, wenn

$$\langle d_1, d_2 \rangle \in R^{\mathcal{I}} \text{ oder} \tag{B.25}$$
$$d_1 = d_c \text{ und } \langle d_a, d_2 \rangle \in R^{\mathcal{I}} \text{ oder} \tag{B.26}$$
$$d_2 = d_c \text{ und } \langle d_1, d_a \rangle \in R^{\mathcal{I}} \text{ oder} \tag{B.27}$$
$$d_1 = d_c = d_2 \text{ und } \langle d_a, d_a \rangle \in R^{\mathcal{I}} \tag{B.28}$$

Der Beweis von (I) und (II) erfolgt durch strukturelle Induktion über den Aufbau von C. Die Induktionsvoraussetzung ist, dass (I) und (II) jeweils für C_1 und C_2 an Stelle von C gelte.

- $C = K$: Sei $d \neq d_c$. Falls $d_a \notin K^{\mathcal{I}}$, dann nach Definition von $\mathcal{I}'$ auch $d_c \notin K^{\mathcal{I}'} = K^{\mathcal{I}}$, also gilt (I) und (II). Andernfalls ist $d_a \in K^{\mathcal{I}}$, nach Definition von $\mathcal{I}'$ also $d_c \in K^{\mathcal{I}'} = K^{\mathcal{I}} \cup \{d_c\}$, damit (II). Wenn $d \in K^{\mathcal{I}}$, dann auch $d \in K^{\mathcal{I}'}$. Da $d \notin \{d_c\}$, gilt auch die Umkehrung.

- $C = \neg C_1$: Folgt mit Induktionsvoraussetzung aus der Tatsache, dass allgemein $d \in \neg C_1^{\mathcal{I}}$ genau dann gilt, wenn $d \notin C_1^{\mathcal{I}}$.

- $C = C_1 \sqcap C_2$: Folgt aus der Induktionsvoraussetzung aufgrund der Semantik von $\sqcap$.

- $C = \forall R.C_1$:

  1. Es ist zu zeigen:

$$d_a \in (\forall R.C_1)^{\mathcal{I}} \text{ genau dann, wenn } d_c \in (\forall R.C_1)^{\mathcal{I}'} \tag{B.29}$$

„→“: Sei $d_a \in (\forall RC_1)^{\mathcal{I}}$, also gilt:

$$\text{Für alle } d' \in \Delta^{\mathcal{I}}\text{: Wenn } \langle d_a, d' \rangle \in R^{\mathcal{I}}\text{, dann } d' \in C_1^{\mathcal{I}}. \tag{B.30}$$

Zu zeigen ist $d_c \in C^{\mathcal{I}'}$. Sei hierzu $d'' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ und $\langle d_c, d'' \rangle \in R^{\mathcal{I}'}$. Nach Definition von $R^{\mathcal{I}'}$ folgt: $\langle d_a, d'' \rangle \in R^{\mathcal{I}}$ oder $R^{\mathcal{I}}(d_a, d_a)$ und $d'' = d_c$. Im ersteren Fall ist also $d'' \in \Delta^{\mathcal{I}}$ und wegen (B.30) ist $d'' \in C_1^{\mathcal{I}}$. Nach Induktionsvoraussetzung (bzgl. (I)) ist damit $d'' \in C_1^{\mathcal{I}'}$. Im zweiten Fall gilt wegen (B.30) $d_a \in C_1^{\mathcal{I}}$. Nach Induktionsvoraussetzung (Teil II) gilt $d'' = d_c \in C_1^{\mathcal{I}'}$

„←“: Sei nun $d_c \in (\forall R.C_1)^{\mathcal{I}'}$, d.h. es gelte

$$\text{Für alle } d' \in \Delta^{\mathcal{I}'}\text{ : Wenn } \langle d_c, d' \rangle \in R^{\mathcal{I}'}\text{, dann } d' \in C_1^{\mathcal{I}'}. \tag{B.31}$$

Zu zeigen ist $d_a \in (\forall R.C_1)^{\mathcal{I}}$. Sei hierzu $d'' \in \Delta^{\mathcal{I}}$, insbesondere sei $d'' \neq d_c$, und $\langle d_a, d'' \rangle \in R^{\mathcal{I}}$. Ist $d'' = d_a$, dann nach Definition $\langle d_c, d_c \rangle \in R^{\mathcal{I}'}$, $\langle d_a, d_c \rangle \in R^{\mathcal{I}'}$ und $\langle d_c, d_a \rangle \in R^{\mathcal{I}'}$. Mit (B.31) folgt $d_c \in C_1^{\mathcal{I}'}$. Nach Induktionsvoraussetzung Teil (I) ist dann $d'' \in C_1^{\mathcal{I}}$. Im Fall, dass $d'' \neq d_a$ folgt $\langle d_c, d'' \rangle \in R^{\mathcal{I}'}$, wegen (B.31) gilt auch $d'' \in C_1^{\mathcal{I}'}$, nach Induktionsvoraussetzung Teil (I) folglich $d'' \in C_1^{\mathcal{I}}$.

  2. Es ist zu zeigen:

$$\text{Wenn } d \neq d_c\text{, dann } d \in (\forall R.C_1)^{\mathcal{I}} \text{ gdw. } d \in (\forall R.C_1)^{\mathcal{I}'}. \tag{B.32}$$

„→“: Sei $d \neq d_c$ und es gelte

$$\text{Für alle } d' \in \Delta^{\mathcal{I}}\text{ : Wenn } \langle d, d' \rangle \in R^{\mathcal{I}}\text{ , dann } d' \in C_1^{\mathcal{I}}. \tag{B.33}$$

Zu zeigen ist $d \in (\forall R C_1)^{\mathcal{I}'}$. Sei hierzu $d'' \in \Delta^{\mathcal{I}'}$ und $\langle d, d'' \rangle \in R^{\mathcal{I}'}$. Im Fall, dass $d'' = d_c$, gilt also $\langle d, d_c \rangle \in R^{\mathcal{I}'}$, was nach Definition nur sein kann, wenn $\langle d, d_a \rangle \in R^{\mathcal{I}}$. Mit (B.33) also $d_a \in C_1^{\mathcal{I}}$ und nach Induktionsvoraussetzung Teil (II) schließlich $d_c \in C_1^{\mathcal{I}'}$. Andernfalls ist $d'' \neq d_c$. Damit aber $\langle d, d'' \rangle \in R^{\mathcal{I}'}$, wobei $d'' \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Nach Definition folgt $\langle d, d'' \rangle \in R^{\mathcal{I}}$, mit (B.33) also $d'' \in C_1^{\mathcal{I}}$ und nach Induktionsvoraussetzung Teil (II) schließlich $d'' \in C_1^{\mathcal{I}'}$.

„$\leftarrow$“: Wieder sei $d \neq d_c$ und es gelte

$$\text{Für alle } d' \in \Delta^{\mathcal{I}'} : \text{Wenn } \langle d, d' \rangle \in R^{\mathcal{I}'} \text{, dann } d' \in C_1^{\mathcal{I}'}. \tag{B.34}$$

Es ist zu zeigen $d \in (\forall R C_1)^{\mathcal{I}}$. Sei hierfür $d'' \in \Delta^{\mathcal{I}}$ und $\langle d, d'' \rangle \in R^{\mathcal{I}}$. Da $d, d'' \in \Delta^{\mathcal{I}}$ folgt mit (B.34) $d'' \in C_1^{\mathcal{I}'}$, nach Induktionsvoraussetzung Teil (I) also $d'' \in C_1^{\mathcal{I}}$.

$\square$

Beweis von Korollar 6.24 (S. 180). Wenn bereits $a^{\mathcal{I}} \neq c^{\mathcal{I}}$, dann wähle $\mathcal{I}' = \mathcal{I}$. Ansonsten ist $c^{\mathcal{I}} = a^{\mathcal{I}}$ und es lässt sich mit dem Lemma 6.23 ein Modell $\mathcal{I}'$ mit den dort genannten Eigenschaften konstruieren. Der Beweis erfolgt über den strukturellen Aufbau von α.

- $\alpha = R(a_1, a_2)$:

  „$\leftarrow$“: Wenn $\mathcal{I}' \models \alpha$, dann also $\langle d_1, d_2 \rangle = \langle a_1^{\mathcal{I}'}, a_2^{\mathcal{I}'} \rangle \in R^{\mathcal{I}'}$. Ist $a_1 = c$, dann $\mathcal{I}' \models R(c, a_2)$ und wegen (B.26) $\mathcal{I} \models R(a, a_2)$. Da $\mathcal{I} \models a \doteq c$, gilt damit auch $\mathcal{I} \models R(c, a_2)$. Ähnlich wird für $a_2 = c$ argumentiert. Sind beide a_i verschieden von c, so ist $a_i^{\mathcal{I}'} = a_i^{\mathcal{I}}$, also kann keiner der Fälle (B.26)–(B.28) vorliegen. Mit Fall (B.25) jedoch gilt $\langle d_1, d_2 \rangle \in R^{\mathcal{I}}$, folglich $\mathcal{I} \models R(a_1, a_2)$.

  „$\rightarrow$“: Sei umgekehrt $\mathcal{I} \models \alpha$. Ist $a_1 = c$, dann gilt $\langle d_a, a_2^{\mathcal{I}} \rangle \in R^{\mathcal{I}}$. Nach (B.26) also $\langle d_c, a_2^{\mathcal{I}} \rangle \in R^{\mathcal{I}'}$, folglich $\mathcal{I}' \models R(c, a_2)$. Ähnlich ist der Argumentationsgang für $a_2 = c$. Falls a_1 und a_2 beide verschieden von c sind, folgt wegen (B.25) $\langle a_1^{\mathcal{I}}, a_2^{\mathcal{I}} \rangle \in R^{\mathcal{I}'}$ und wegen $a_i^{\mathcal{I}'} = a_i^{\mathcal{I}}$ also auch $\mathcal{I}' \models R(a_1, a_2)$.

- $\alpha = C(b)$: Falls $b \neq c$, folgt mit dem Lemma 6.23 Teil (I) $\mathcal{I} \models C(b)$ gdw. $b^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$ gdw. $b^{\mathcal{I}'} \in C^{\mathcal{I}'}$ gdw. $\mathcal{I}' \models C(b)$.

  Falls $b = c$, folgt mit dem Lemma 6.23 Teil (II): $\mathcal{I} \models C(c)$ gdw. $c^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$ gdw. $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$ gdw. $d_a \in C^{\mathcal{I}}$ gdw. (2.) $d_c \in C^{\mathcal{I}}$ gdw. $\mathcal{I}' \models C(c)$

- $\alpha = C_1 \sqsubseteq C_2$: α ist äquivalent zu $\top \sqsubseteq C$ für $C = \neg C_1 \sqcup C_2$. Sei $\mathcal{I}' \models \top \sqsubseteq C$. Zu zeigen ist $\mathcal{I} \models \top \sqsubseteq C$. Sei $d \in \Delta^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}'}$, also $d \in C^{\mathcal{I}'}$. Nach dem Lemma 6.23 ist dann auch $d \in C^{\mathcal{I}}$. Was zu zeigen war.

Gelte umgekehrt $\mathcal{I} \models \top \sqsubseteq C$. Zu zeigen ist $\mathcal{I}' \models \top \sqsubseteq C$. Sei $d \in \Delta^{\mathcal{I}'} = \Delta^{\mathcal{I}} \cup \{d_c\}$. Ist $d \neq d_c$, dann nach Voraussetzung $d \in C^{\mathcal{I}}$, wegen des Lemmas 6.23 Teil (I) folglich $d \in C^{\mathcal{I}'}$; insbesondere gilt also $d_a \in C^{\mathcal{I}}$. Nach Lemma 6.23 Teil (II) ist dann $d_c \in C^{\mathcal{I}'}$. Ist $d = d_c$, muss ebenfalls $d_c \in C^{\mathcal{I}'}$ gelten.

□

Beweis von Theorem 6.28 (S. 184). Hier gebe ich nur eine Skizze des auf C. Eschenbach zurückgehenden Beweises. Für einen vollständigen Beweis siehe den Anhang im Aufsatz von Eschenbach und Özçep (2009). Seien $\mathcal{O} = \langle O, \mathcal{V}_c, \mathcal{V}_i \rangle$ eine Ontologie, $a, b, c, d \in \mathcal{V}_c$ Konstanten, $B, C, D, E \in \mathcal{V}_c$ Konzeptsymbole, A eine endliche Folge von Literalen und A' die unendliche Wiederholung von A, wobei festgelegt wird:

$$\begin{aligned}
O &= \{\neg B(a), \neg C(a), \neg D(a), \neg E(a), \neg B(b), \neg C(b), \neg B(c), \neg C(c), \neg D(c),\\
&\quad \neg E(c), \neg B(d), \neg C(d), \neg D(d), \neg E(d)\}\\
A &= \langle \alpha_i \rangle_{i \in \{1,\ldots,16\}} = \langle C(a), B(a), B(b), B(d), E(b), D(b), D(a), D(c), \neg B(c),\\
&\quad \neg C(c), \neg C(d), \neg C(b), \neg D(d), \neg E(d), \neg E(a), \neg E(c) \rangle\\
A' &= \langle \alpha_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}, \text{ mit } \alpha_i = \alpha_{i+16} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Da O endlich ist und weder in O noch in A Rollensymbole oder Konstruktoren (wie Nominalia) vorkommen, die auf Konstanten basieren, lässt sich zeigen, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $O \oplus_2^{\text{expl}} (A')^k = O \odot_2 (A')^k$. (Daher reicht ein Beweis für die Instabilität von $\oplus_2^{\text{expl}}$).

Für alle Literale α mit $\mathcal{V}(\alpha) \subseteq \mathcal{V}_c$ gilt:

$$\begin{aligned}
O \oplus_2^{\text{expl}} A \models \alpha &\quad \text{gdw.} \quad O \models \alpha\\
O \odot_2 A \models \alpha &\quad \text{gdw.} \quad O \models \alpha
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(O, A) &= \mathcal{M}(O, A')\\
&= \{\{B(a)\}, \{C(a)\}, \{D(a)\}, \{B(b)\}, \{D(c)\}, \{B(d)\}\}\\
&= \mathcal{M}(O \oplus_2^{\text{expl}} A, A') = \mathcal{M}(O \odot_2 A, A')
\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass die Menge der minimalen konfligierenden Literalmengen $\mathcal{M}(O, A)$ von A bei Integration von A' immer wieder reproduziert wird. Das Beispiel ist derart konstruiert, dass alle Konstanten $a_i, a_j \in \{a, \ldots, d\}$ zu jeder Phase n der Integration bzgl. der resultierende Menge von Ontologieaxiomen $O^n = O \oplus_2^{\text{expl}} A^n$ miteinander kompatibel sind: Es kommt nie vor, dass für eine Konzeptbeschreibung C in einem Schritt n gilt: $O^n \models C(a_i)$ und $O^n \models \neg C(a_j)$. Eine Inkompatibilität von Konstanten würde sich durch alle folgenden Schritte hindurch konservieren und somit die anvisierte Instabilität verhindern. Der Grund für die Kompatibilität der Konstanten ist, dass bzgl. der Senderontologie geltende Unterschiede zwischen Konstanten in der Sequenz A' „hinreichend weit auseinander“ liegen und durch eine dazwischen liegende Reinterpretation aufgehoben werden können. □

B.6 Beweise zu Kapitel 7

Beweis von Beobachtung 7.3 (S. 190). Sei $X \in M_{\mathcal{O}_2,\mathcal{V}}$. Es ist zu zeigen, dass X konsistent, $(\mathcal{O}_1,\mathcal{V})$-abgeschlossen und inklusionsmaximal in diesen beiden Eigenschaften ist. Aus $X \in M_{\mathcal{O}_2,\mathcal{V}}$ folgt direkt die Konsistenz von X. Zum Beweis der $(\mathcal{O}_1,\mathcal{V})$-Abgeschlossenheit seien $D, E_1, E_2 \in X$ und $E \in \mathrm{Konz}(\mathcal{V})$. Wenn $O_1 \models D \sqsubseteq E$, dann wegen $O_1 \subseteq O_2$ auch $O_2 \models D \sqsubseteq E$; wegen der $(\mathcal{O}_2,\mathcal{V})$-Abgeschlossenheit von X auch $E \in X$. Entsprechend gilt wegen der $(\mathcal{O}_2,\mathcal{V})$-Abgeschlossenheit von X auch, dass $E_1 \sqcap E_2 \in X$. Es bleibt zu zeigen, dass X inklusionsmaximal ist. Sei hierfür Y $(\mathcal{O}_1,\mathcal{V})$-abgeschlossen und $X \subset Y$. Wäre Y konsistent, d.h. $\perp \notin Y$, dann gäbe es eine konsistente, $(\mathcal{O}_2,\mathcal{V})$-abgeschlossene Obermenge Y' von Y und damit auch von X, im Widerspruch dazu, dass X inklusionsmaximal darin ist, konsistent und $(\mathcal{O}_2,\mathcal{V})$-abgeschlossen zu sein. □

Beweis von Lemma 7.4 (S. 190). Sei $Y \in M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_2}$ und $X = Y \cap \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_1) \in M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1}$. Zu zeigen ist, dass $X \in M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1}$. Zunächst ist X konsistent, $\langle\mathcal{O},\mathcal{V}_2\rangle$-abgeschlossen und damit auch $\langle\mathcal{O},\mathcal{V}_1\rangle$-abgeschlossen. X ist auch maximal in dieser Eigenschaft. Denn sei $X_1 \supset X$ und sei X_1 $\langle\mathcal{O},\mathcal{V}_1\rangle$-abgeschlossen. Zu zeigen ist, dass X_1 inkonsistent ist. Wegen der Maximalität von Y ist $Y \cup X_1$ inkonsistent. Wegen des Interpolationslemmas gibt es $Y_1 \subseteq Y \cap \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_1) = X$, so dass $Y_1 \cup X_1$ inkonsistent ist. Aber $Y_1 \cup X_1 \subseteq X \cup X_1$, also ist X_1 inkonsistent. □

Beweis von Beobachtung 7.5 (S. 190). Sei $X \in M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1}$. Aus der Definition folgt unmittelbar $M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_2} \supseteq \biguplus_{X \in M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1}} F_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2}(X)$. Für die andere Richtung sei $Y \in M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_2}$. Definiere $X = Y \cap \mathrm{Konz}(\mathcal{V}_1)$. Wegen Lemma 7.4 ist $X \in M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1}$ und es gilt $Y \in F_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2}(X)$. Insgesamt folgt $M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_2} \subseteq \biguplus_{X \in M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1}} F_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2}(X)$. $M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_2}$ ist auch eine disjunkte Vereinigung der $F_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2}(X)$, da $F_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2}$ injektiv ist. Denn ist $F_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2}(X_1) = F_{\mathcal{O},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2}(X_2)$, dann gibt es $Y \in M_{\mathcal{O},\mathcal{V}_2}$ mit $Y \supseteq X_1 \cup X_2$. Da Y konsistent, ist $X_1 \cup X_2$ auch konsistent, daher muss wegen der Maximalität von X_1 und X_2 auch $X_1 = X_2$ gelten. □

Beweis von Beobachtung 7.14 (S. 198). Das lässt sich unter Ausnutzung der Tatsache, dass die Konzeptkontraktion das Wiedergewinnungspostulat (Recovery) erfüllt (Beobachtung 7.10.6), beweisen. Ich zeige die Aussage für die Typ-1-Variante und für positive Literale $\alpha = K(a)$. Der Beweis für negative Literale ist strukturell ähnlich, und der Beweis für die Typ-2-Operatoren folgt mit Gleichung (7.2). Direkt aus der Beobachtung 7.10.6 folgt, dass

$$K^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}} \subseteq (K \ominus_{\mathcal{S}} \neg\, \mathrm{msc}_O(a) \cup \{\neg\, \mathrm{msc}_O(a)\})^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}}$$

Damit gilt für jedes Modell $\mathcal{I}$ von O, dass

$$\bigcap\{D^{\mathcal{I}} \mid D \in ((K \ominus_{\mathcal{S}} \neg\,\mathrm{msc}_O(a) \cup \{\neg\,\mathrm{msc}_O(a)\})^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}}\} \subseteq$$
$$\bigcap\{D^{\mathcal{I}} \mid D \in K^{\Uparrow}_{\mathcal{O},\mathcal{V}_{rel}}\} = K^{\mathcal{I}} \tag{B.35}$$

Sei $\mathcal{I} \models O \odot_{1,\mathbb{S}} K(a)$. Zu zeigen ist, dass $\mathcal{I} \models K' \sqsubseteq K \sqcup \mathrm{msc}_O(a)$ bzw. äquivalent $\mathcal{I} \models K' \sqcap \neg\,\mathrm{msc}_O(a) \sqsubseteq K$ gilt. Sei hierfür $d \in (K' \sqcap \neg\,\mathrm{msc}_O(a))^{\mathcal{I}}$. Da $O \odot_{1,\mathbb{S}} K(a) \models \{K' \sqsubseteq C \mid C \in K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\,\mathrm{msc}_O(a)\}$, ist $d \in D^{\mathcal{I}}$ für alle $D \in K \ominus_{\mathcal{S}} \neg\,\mathrm{msc}_O(a)$. Mit der Abschätzung in (B.35) folgt $d^{\mathcal{I}} \in K^{\mathcal{I}}$. □

Beweis von Beobachtung 7.17 (S. 200). Die Aussagen in 3, 6, 7, 8, 9, 10, und 11 folgen direkt aus den Definitionen.

Rechtsextensionalität 2 gilt trivialerweise für Literale, da $\alpha \equiv \beta$ genau dann gilt, wenn $\alpha = \beta$.

Linksextensionalität in der ursprünglichen Formulierung (Wenn $O_1 \equiv O_2$, dann auch $(O_1 \circ \alpha) \equiv (O_2 \circ \alpha)$) wird auch von sphärenbasierten Operatoren nicht erfüllt. Zum Beweis der eingeschränkten Linksextensionalität 1 nutzt man die Extensionalität der schwachen Operatoren $\otimes_i$ und die Tatsache, dass wenn die Sphärensysteme identisch sind, das Ergebnis der Konzeptkontraktion bzgl. äquivalenter Ontologien identisch ist.

Die Inklusionseigenschaft 4 folgt aus der Inklusionseigenschaft der schwachen Operatoren des Typs 1 $\otimes_1$ und der Tatsache, dass die Oberabschätzungen von $\hat{K}'$ das Symbol $K' \notin \mathcal{V}_c \cup \mathcal{V}(O)$ enthalten. Die Typ-2-Operatoren erfüllen im Inkonsistenzfall für keine Ontologie und keinen Trigger die Inklusion. Denn im Inkonsistenzfall ist immer eine Abschätzung der Form $\hat{K} \sqsubseteq (K \sqcup \neg K)$ enthalten bzw. es existiert immer eine Subsumption $\hat{K} \sqsubseteq C_\top \in O \odot_{2,\mathbb{S}} \alpha$ mit $\mathcal{V}(C_\top) \subseteq \mathcal{V}_c$ sowie $C_\top \doteq \top$, die nicht in O enthalten ist. Auch für den Fall der endlichen Repräsentierbarkeit der Konzeptkontraktion $\hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\,\mathrm{msc}_O(a)$ durch eine Konzeptbeschreibung $C_{\hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\,\mathrm{msc}_O(a)}$ kann Inklusion nicht garantiert werden, da in $C_{\hat{K} \ominus_{\mathbb{S}(\hat{K})} \neg\,\mathrm{msc}_O(a)}$ nicht zwingend $\hat{K}$ vorkommen muss und daher die Substitution $[K/K']$ ohne Wirkung ist.

Für den Beweis der Konsistenzeigenschaft 12 sind zwei Richtungen zu zeigen. Die einfache Richtung von links nach rechts folgt aus der Erfgolgseigenschaft 7 (im Fall des Typ-1-Operators) und der Konservierungseigenschaft 8 (im Fall des Typ-2-Operators). Zum Beweis der anderen Richtung werde angenommen, dass O konsistent ist. Ich zeige den Beweis für den Typ-1-Operator und für den Fall, dass $\alpha = K(a)$. Der Beweis für $\alpha = \neg K(a)$ ist strukturell ähnlich. Und der Beweis für den Typ-2-Operator folgt aus Gleichung (7.2). Es ist zu zeigen, dass $O \cup \{K'(a), K \sqsubseteq K'\} \cup \{K' \sqsubseteq C \mid C \in K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\,\mathrm{msc}_O(a)\}$ erfüllbar ist. Als Zwischenschritt zeige ich, dass gilt:

$$O \cup \{C(a) \mid C \in K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\,\mathrm{msc}_O(a)\} \text{ ist erfüllbar.} \tag{B.36}$$

Zum Beweis von (B.36) benutze ich den Kompaktheitssatz (Anhang A, S. 245). Da $C \in K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)$ bzgl. $\sqcap$ abgeschlossen ist, reicht es zu zeigen, dass für beliebiges $C \in K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)$ ein Modell $\mathcal{I} \models O \cup \{C(a)\}$ existiert.

Sei $C \in K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)$. Für einen Widerspruchsbeweis werde angenommen, dass $O \models \neg C(a)$. Dann müsste $O \models \mathrm{msc}_O(a) \sqsubseteq \neg C$ gelten. Da der Konzeptrevisionsoperator das Erfolgspostulat erfüllt (Beobachtung 7.10.4, S. 193), gilt $\mathrm{msc}_O(a) \in K \circledast_{\mathbb{S}(K)} \mathrm{msc}_O(a)$ und folglich auch $\neg C \in K \circledast_{\mathbb{S}(K)} \mathrm{msc}_O(a)$. Nach Voraussetzung ist jedoch $C \in K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \mathrm{msc}_O(a) \subseteq K \circledast_{\mathbb{S}(K)} \mathrm{msc}_O(a)$ und insgesamt $\{C, \neg C\} \subseteq K \circledast_{\mathbb{S}(K)} \mathrm{msc}_O(a)$, was der Konsistenz des Konzeptrevisionsoperators (Beobachtung 7.10.7, S. 194) widerspricht. Aus dem Kompaktheitssatz folgt, dass es ein Modell $\mathcal{I} \models O \cup \{C(a) \mid C \in K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)\}$ gibt. Die Modifikation $\mathcal{J}$ von $\mathcal{I}$ werde definiert über:

$$(K')^{\mathcal{J}} = K^{\mathcal{I}} \cup \{a^{\mathcal{I}}\}$$

Da $K' \notin \mathcal{V}(O)$, gilt $\mathcal{J} \models O$, per Definition gilt auch $\mathcal{J} \models \{K \sqsubseteq K', K'(a)\}$. Es bleibt zu zeigen, dass auch die Oberabschätzungen von K' durch $\mathcal{J}$ wahr gemacht werden: $\mathcal{J} \models \{K' \sqsubseteq C \mid C \in K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)\}$. Es gelte $\underline{d} \in (K')^{\mathcal{J}}$. Zunächst gilt, dass $C^{\mathcal{J}} = C^{\mathcal{I}}$ für alle $C \in K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)$, da K' nicht in C vorkommt. Es können zwei Fälle auftreten, $\underline{d} \in K^{\mathcal{I}}$ oder $\underline{d} = a^{\mathcal{I}} = a^{\mathcal{J}}$. Im ersten Fall gibt es aber genau ein mögliches Objekt $H \in [K]^{\mathcal{O}}$, für das gilt $\underline{d} \in H^{\mathcal{I}}$. Da aber $[K]^{\mathcal{O}} \subseteq [K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)]^{\mathcal{O}}$, gilt $K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \mathrm{msc}_O(a) \subseteq H$. Es folgt, dass $\underline{d} \in C^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{J}}$ für alle $C \in K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)$. Im anderen Fall ist $\underline{d} = a^{\mathcal{I}} = a^{\mathcal{J}}$. Da aber $\mathcal{I} \models O \cup \{C(a) \mid C \in K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)\}$ gilt, folgt auch, dass $\mathcal{J} \models O \cup \{C(a) \mid C \in K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)\}$ und somit wieder $\underline{d} \in C^{\mathcal{J}}$ für alle $C \in K \ominus_{\mathbb{S}(K)} \neg\, \mathrm{msc}_O(a)$. □

Beweis von Beobachtung 7.20 (S. 204). Es ist zu zeigen, dass für alle $\hat{L} \in \mathrm{KLit}(\mathcal{V}_c)$ die Menge $\mathbb{S}(\hat{L})$ ein gutartiges Sphärensystem ist. Im Konsistenzfall ist $\mathbb{S}(\hat{L})$ definiert über Gleichung (7.3). Dieses Mengensystem hat $[\hat{L}]^{\mathcal{O}} \cap M_{\mathcal{O}_{res}} = [\hat{L}]^{\mathcal{O}_{res}}$ als minimales Element, $M_{\mathcal{O}} \cap M_{\mathcal{O}_{res}} = M_{\mathcal{O}_{res}}$ als maximales Element und ist linear geordnet. Die Bedingung (SW) wird ebenfalls erfüllt, da die Anwendung der Schnittbildung die Wohlordnungseigenschaft nicht beeinträchtigt. Folglich ist $\mathbb{S}(\hat{L})$ ein gutartiges Sphärensystem. Im Inkonsistenzfall ist $\mathbb{S}(\hat{L})$ definiert über Gleichung (7.4). Das Minimum des Sphärensystems $\mathbb{S}'(\hat{L})$ ist die Menge $\bigcup F[[\hat{L}]^{\mathcal{O}}] \cap M_{\mathcal{O}_{res}}$. Tatsächlich ist wegen Lemma 7.4 auch $\bigcup F[[\hat{L}]^{\mathcal{O}}] \cap M_{\mathcal{O}_{res}} = [\hat{L}]^{\mathcal{O}_{res}}$. Das Maximum des Sphärensystems $\mathbb{S}'(\hat{L})$ ist die Menge $\bigcup F[M_{\mathcal{O}}] \cap M_{\mathcal{O}_{res}}$, die wegen Beobachtung 7.5 identisch mit $M_{\mathcal{O}_{res}}$ ist. Die lineare Ordnung wird nicht zerstört und die Wohlordnungseigenschaft bleibt unter $\bigcup F[\cdot] \cap M_{\mathcal{O}_{res}}$ erhalten. □

Literaturverzeichnis

Alchourrón, C. E., Gärdenfors, P. und Makinson, D. (1985). On the logic of theory change: partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530.

Alchourrón, C. E. und Makinson, D. (1981). Hierarchies of regulations and their logic. In: Hilpinen, R. (Hrsg.), *New Studies in Deontic Logic*, S. 125–148. D. Reidel Publishing.

Alchourrón, C. E. und Makinson, D. (1982). On the logic of theory change: contraction functions and their associated revision functions. *Theoria*, 48:14–37.

Antoniou, G. und Kehagias, A. (2000). A note on the refinement of ontologies. *International Journal of Intelligent Systems*, 15(7):623–632.

Armstrong, T., Marriott, K., Schachte, P. und Søndergaard, H. (1998). Two classes of Boolean functions for dependency analysis. *Science of Computer Programming*, 31(1):3–45.

Baader, F. (2003). Description logic terminology. In: Baader et al. (2003), S. 485–495.

Baader, F., Calvanese, D., McGuinness, D. L., Nardi, D. und Patel-Schneider, P. F. (Hrsg.) (2003). *The Description Logic Handbook: Theory, Implementation and Applications*. Cambridge University Press.

Baader, F., Horrocks, I. und Sattler, U. (2005). Description logics as ontology languages for the semantic web. In: Hutter, D. und Stephan, W. (Hrsg.), *Mechanizing Mathematical Reasoning*, Band 2605 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 228–248. Springer.

Baader, F. und Nutt, W. (2003). Basic description logics. In: Baader et al. (2003), S. 43–95.

Beierle, C. B. und Kern-Isberner, G. (Hrsg.) (2007). *Dynamics of Knowledge and Belief. Proceedings of the Workshop at the 30th Annual German Conference on Artificial Intelligence, KI-2007*. Fernuniversität Hagen.

Ben-Ari, M. (2001). *Mathematical Logic for Computer Science*. Springer, 2. Auflage.

Benferhat, S., Kaci, S., Berre, D. L. und Williams, M.-A. (2004). Weakening conflicting information for iterated revision and knowledge integration. *Artificial Intelligence*, 153(1–2):339–371.

Berners-Lee, T., Hendler, J. und Lassila, O. (2001). The semantic web. *Scientific American*, 284(5):34–43.

Blackburn, P., de Rijke, M. und Venema, Y. (2002). *Modal Logic*, Band 53 von *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, 2. Auflage.

Blackburn, P., Jaspars, J. und de Rijke, M. (1997). Reasoning about changing information. *South African Computer Journal*, 19:2–26.

Bochman, A. (2001). *A Logical Theory of Nonmonotonic Inference and Belief Change*. Springer Verlag.

Bonanno, G., Delgrande, J. P., Lang, J. und Rott, H. (Hrsg.) (2007). *Formal Models of Belief Change in Rational Agents, 26.08. - 30.08.2007*, Band 07351 von *Dagstuhl Seminar Proceedings*. Internationales Begegnungs- und Forschungszentrum für Informatik (IBFI), Schloss Dagstuhl, Deutschland.

Borgida, A. und Serafini, L. (2003). Distributed description logics: assimilating information from peer sources. *Journal on Data Semantics*, 1:153–184.

Bouquet, P., Serafini, L. und Zanobini, S. (2003). Semantic coordination: a new approach and an application. In: *Proceedings of the 2nd International Semantic Web Conference (ISWC-03)*.

Boutilier, C. (1993). Revision sequences and nested conditionals. In: Bajcsy, R. (Hrsg.), *Proceedings of the 13th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-93)*, S. 519–525.

Bratman, M. E. (1987). *Intentions, Plans, and Practical Reason*. Harvard University Press, Cambridge, MA.

Calvanese, D., Giacomo, G. D. und Lenzerini, M. (2001). Ontology of integration and integration of ontologies. In: Goble, C. A., McGuinness, D. L., Möller, R. und Patel-Schneider, P. F. (Hrsg.), *Description Logics*, Band 49 von *CEUR Workshop Proceedings*. CEUR-WS.org.

Chopra, S., Georgatos, K. und Parikh, R. (2001). Relevance sensitive nonmonotonic inference on belief sequences. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 11(1–2):131–150.

Chopra, S. und Parikh, R. (2000). Relevance sensitive belief structures. In: *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, S. 259–285.

Dalal, M. (1988). Investigations into a theory of knowledge base revision: preliminary report. In: *Proceedings of the 7th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-88)*, S. 475–479, St. Paul, Minnesota. AAAI Press.

Darwiche, A. und Pearl, J. (1994). On the logic of iterated belief revision. In: Fagin, R. (Hrsg.), *Proceedings of the 5th Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge (TARK-94)*, S. 5–23. Morgan Kaufmann, Pacific Grove, CA.

Darwiche, A. und Pearl, J. (1997). On the logic of iterated belief revision. *Artificial intelligence*, 89:1–29.

Delgrande, J. P., Dubois, D. und Lang, J. (2006). Iterated revision as prioritized merging. In: Doherty, P., Mylopoulos, J. und Welty, C. (Hrsg.), *Proceedings of the 10th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR-06)*, S. 210–220. AAAI Press.

Delgrande, J. P. und Schaub, T. (2000). A consistency-based model for belief change: preliminary report. arXiv:cs/0003052v3.

Delgrande, J. P. und Schaub, T. (2003). A consistency-based approach for belief change. *Artificial Intelligence*, 151(1–2):1–41.

Delgrande, J. P. und Schaub, T. (2004). Two approaches to merging knowledge bases. In: Alferes, J. und Leite, J. (Hrsg.), *Proceedings of the 9th European Conference on Logics in Artificial Intelligence (JELIA-04)*, Band 3229 von *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, S. 426–438.

Delgrande, J. P. und Schaub, T. (2007). A consistency-based framework for merging knowledge bases. *Journal of Applied Logics*, 5(3):459–477.

Doan, A., Madhavan, J., Dhamankar, R., Domingos, P. und Halevy, A. (2003). Learning to match ontologies on the semantic web. *The VLDB Journal*, 12(4):303–319.

Dou, D., McDermott, D. V. und Qi, P. (2002). Ontology translation by ontology merging and automated reasoning. In: *Proceedings of the EKAW-02 Workshop on Ontologies for Multi-Agent Systems*, S. 3–18.

Dou, D., McDermott, D. V. und Qi, P. (2003). Ontology translation on the semantic web. In: Meersman, R., Tari, Z. und Schmidt, D. C. (Hrsg.), *Proceedings of the OTM Confederated International Conferences, CoopIS, DOA, and ODBASE 2003, Catania, Sicily, Italy, November 3-7, 2003*, Band 2888 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 952–969. Springer.

Erdur, R. C. und Dikenelli, O. (2002). A FIPA-compliant agent framework with an extra layer for ontology dependent reusable behaviour. In: Yakhno, T. (Hrsg.), *Proceedings of the 2nd International Conference on Advances in Information Systems (ADVIS-02), Izmir, Turkey, October 23–25, 2002*, Band 2457 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 283–292. Springer.

Eschenbach, C. und Grüninger, M. (Hrsg.) (2008). *Formal Ontology in Information Systems, Proceedings of the 5th International Conference (FOIS-08), Saarbrücken, Germany, October 31st – November 3rd, 2008*, Band 183 von *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*. IOS Press.

Eschenbach, C. und Özçep, Ö. L. (2009). Ontology revision based on reinterpretation. Erscheint in *Logic Journal of IGPL*, doi: 10.1093/jigpal/jzp039.

Euzenat, J. und Valtchev, P. (2004). Similarity-based ontology alignment in OWL-Lite. In: de Mántaras, R. und Saitta, L. (Hrsg.), *Proceedings of the 16th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI-04)*, S. 333–337. IOS Press.

Fine, K. (1991). The study of ontology. *Nous*, 25(3):263–294.

Flouris, G., Huang, Z., Pan, J. Z., Plexousakis, D. und Wache, H. (2006). Inconsistencies, negations and changes in ontologies. In: Gil, Y. und Mooney, R. (Hrsg.), *Proceedings of the 21st National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-06)*, S. 1295–1300. AAAI Press.

Flouris, G., Manakanatas, D., Kondylakis, H., Plexousakis, D. und Antoniou, G. (2008). Ontology change: classification and survey. *The Knowledge Engineering Review*, 23(2):117–152.

Flouris, G., Plexousakis, D. und Antoniou, G. (2005). On applying the AGM theory to DLs and OWL. In: Gil, Y., Motta, E., Benjamins, V. R. und Musen, M. (Hrsg.), *Proceedings of the 4th International Semantic Web Conference (ISWC-05)*, Band 3729 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 216–231. Springer.

Foo, N. (1995). Ontology revision. In: Ellis, G., Levinson, R., Rich, W. und Sowa, J. (Hrsg.), *Proceedings of the 3rd International Conference on Conceptual Structures (ICCS-95)*, Band 954 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 16–31.

Franklin, S. und Graesser, A. (1996). Is it an agent, or just a program?: A taxonomy for autonomous agents. In: *Proceedings of the 3rd International Workshop on Agent Theories, Architectures and Languages (ATAL-96)*, Band 1193 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 21–35, Berlin, Germany. Springer-Verlag.

Freund, M. und Lehmann, D. J. (2002). Belief revision and rational inference. *Computing Research Repository (CoRR)*, cs.AI/0204032.

Fuhrmann, A. (1997). *An Essay on Contraction*. Cambridge University Press, Cambridge, England.

Gangemi, A., Guarino, N., Masolo, C. und Oltramari, A. (2003). Sweetening WORDNET with DOLCE. *AI Magazine*, 24(3):13–24.

Gärdenfors, P. (1988). *Knowledge in Flux: Modeling the Dynamics of Epistemic States*. The MIT Press, Bradford Books, Cambridge, MA.

Gärdenfors, P. (2000). *Conceptual Spaces: The Geometry of Thought*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Gärdenfors, P. und Rott, H. (1995). Belief revision. In: Gabbay, D., Hoger, C. und Robinson, J. (Hrsg.), *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, Band 4, S. 35–132. Oxford University Press.

Genesereth, M. R. und Fikes, R. E. (1992). Knowledge interchange format, version 3.0, reference manual. Technical Report Logic-92-1, Computer Science Department, Stanford University.

Goeb, M., Reiss, P., Schiemann, B. und Schreiber, U. (2007). Dynamic TBox-handling in agent-agent-communication. In: Beierle und Kern-Isberner (2007), S. 100–117.

Gómez-Pérez, A., Fernández-López, M. und Corcho, O. (2004). *Ontological Engineering*. Springer.

Grau, B. C., Horrocks, I., Kazakov, Y. und Sattler, U. (2008). Modular reuse of ontologies: theory and practice. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 31:273–318.

Grove, A. (1988). Two modellings for theory change. *Journal of Philosophical Logic*, 17:157–170.

Gruber, T. R. (1993). Toward principles for the design of ontologies used for knowledge sharing. In: Guarino, N. und Poli, R. (Hrsg.), *Formal Ontology in Conceptual Analysis and Knowledge Representation*. Kluwer Academic Publishers.

Haase, P. und Qi, G. (2007). An analysis of approaches to resolving inconsistencies in DL-based ontologies. In: *Proceedings of the International Workshop on Ontology Dynamics (IWOD-07)*.

Haase, P. und Stojanovic, L. (2005). Consistent evolution of OWL ontologies. In: Gomez-Perez, A. und Euzenat, A. (Hrsg.), *Proceedings of the 2nd European Semantic Web Conference (ESWC-05)*, S. 182–197. Springer-Verlag.

Habel, C. (1996). Representations as basis of cognitive processes. In: *Proceedings of the 20th Annual German Conference on Artificial Intelligence (KI-96), Dresden, Germany, September 17-19*, S. 99–101.

Hansson, S. O. (1993a). Reversing the Levi identity. *Journal of Philosophical Logic*, 22:637–669.

Hansson, S. O. (1993b). Theory contraction and base contraction unified. *The Journal of Symbolic Logic*, 58(2):602–625.

Hansson, S. O. (1999a). A survey of non-prioritized belief revision. *Erkenntnis*, S. 413–427.

Hansson, S. O. (1999b). *A Textbook of Belief Dynamics*. Kluwer Academic Publishers.

Hansson, S. O. (2006). Logic of belief revision. Website. Stand: Juli 2009. `http://plato.stanford.edu/entries/logic-belief-revision/`.

Hansson, S. O. und Ferme, E. (1999). Selective revision. *Studia Logica*, 63(3):331–342.

Harper, W. (1977). Rational conceptual change. In: *Proceedings of the 1976 Biennal Meeting of the Philosophy of Science Association (PSA-76)*, Band 1, S. 462–494.

Herzig, A. und Rifi, O. (1998). Update operations: a review. In: Prade, H. (Hrsg.), *Proceedings of the 13th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI-98)*, S. 13–17.

Herzig, A. und Rifi, O. (1999). Propositional belief base update and minimal change. *Artificial Intelligence*, 115(1):107–138.

Horrocks, I. und Patel-Schneider, P. (2004). Reducing OWL entailment to description logic satisfiability. *Journal of Web Semantics*, 1(4):345–357.

Kalfoglou, Y. und Schorlemmer, W. (2005). Ontology mapping: the state of the art. In: Kalfoglou, Y., Schorlemmer, W., Sheth, A., Staab, S. und Uschold, M. (Hrsg.), *Semantic Interoperability and Integration*, Band 04391 von *Dagstuhl Seminar Proceedings*. IBFI, Schloss Dagstuhl, Germany.

Katsuno, H. und Mendelzon, A. (1991). On the difference between updating a knowledge base and revising it. In: Allen, J., Fikes, R. und Sandewall, E. (Hrsg.), *Proceedings of the 2nd International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR-91)*, S. 387–394, San Mateo, California. Morgan Kaufmann.

Katsuno, H. und Mendelzon, A. O. (1992). Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52(3):263–294.

Keller, A. M. und Winslett, M. (1985). On the use of an extended relational model to handle changing incomplete information. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 11(7):620–633.

Kelly, K. T. (1995). *The Logic of Reliable Inquiry*. Oxford University Press.

Kelly, K. T. (1998a). Iterated belief revision, reliability, and inductive amnesia. *Erkenntnis*, 50:11–58.

Kelly, K. T. (1998b). The learning power of belief revision. In: Gilboa, I. (Hrsg.), *Proceedings of the 7th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK-98)*, S. 111–124. Morgan Kaufmann.

Klein, M. (2001). Combining and relating ontologies: an analysis of problems and solutions. In: *IJCAI-01 Workshop on Ontologies and Information Sharing, Seattle, WA*, S. 53–62.

Küsters, R. und Molitor, R. (2000). Computing most specific concepts in description logics with existential restrictions. LTCS-Report 00-05, LuFG Theoretical Computer Science, RWTH Aachen, Germany.

Labrou, Y., Finin, T. und Peng, Y. (1999). Agent communication languages: The current landscape. *IEEE Intelligent Systems*, 14(2):45–52.

Lehmann, D. J. (1995). Belief revision, revised. In: *Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-95)*, S. 1534–1540.

Levesque, H. J. (1984). Foundations of a functional approach to knowledge representation. *Artificial Intelligence*, 23(2):155–212.

Levi, I. (1977). Subjunctives, dispositions and chances. *Synthese*, 34:423–455.

Levi, I. (1980). *The Enterprise of Knowledge*. The MIT Press, Cambridge, MA.

Levi, I. (1991). *The Fixation of Belief and its Undoing*. Cambridge University Press, Cambridge, MA.

Lewis, D. (1973). *Counterfactuals*. Harvard University Press, Cambridge, MA.

Makinson, D. (1985). How to give it up: A survey of some formal aspects of the logic of theory change. *Synthese*, 62:347–363.

Makinson, D. (2007). Propositional relevance through letter-sharing: review and contribution. In: Bonanno et al. (2007).

Makinson, D. und Gärdenfors, P. (1989). Relations between the logic of theory change and nonmonotonic logic. In: Fuhrmann, A. und Morreau, M. (Hrsg.), *Proceedings of the Workshop "Logic of Theory Change", Konstanz, FRG, October 13–15, 1989*, Band 465 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 185–205. Springer.

Makinson, D. und Kourousias, G. (2007). Parallel interpolation, splitting, and relevance in belief change. *Journal of Symbolic Logic*, 72:994–1002.

Martin, E. und Osherson, D. (1997). Scientific discovery based on belief revision. *Journal of Symbolic Logic*, 62(4):1352–1370.

Martin, E. und Osherson, D. (1998). *Elements of Scientific Inquiry*. The MIT Press.

Martin, E. und Osherson, D. (2000). Scientific discovery on positive data via belief revision. *Journal of Philosophical Logic*, 29(5):483–506.

Meyer, T., Lee, K. und Booth, R. (2005). Knowledge integration for description logics. In: Veloso, M. M. und Kambhampati, S. (Hrsg.), *Proceedings of the 20th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-2005)*, S. 645–650. AAAI Press/The MIT Press.

Monk, D. J. (1976). *Mathematical Logic*. Springer.

Nayak, A. C. (1994). Iterated belief change based on epistemic entrenchment. *Erkenntnis*, 41:353–390.

Nayak, A. C., Pagnucco, M. und Sattar, A. (1996). Changing conditional beliefs unconditionally. In: *Proceedings of the 6th Conference of Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK-96)*, S. 119–135. Morgan Kaufmann.

Nebel, B. (1989). A knowledge level analysis of belief revision. In: *Proceedings of the 1st International Conference in Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR-89)*, S. 301–311.

Newell, A. (1982). The knowledge level. *Artificial Intelligence*, 18:87–127.

Noy, N. F. (2004). Semantic integration: a survey of ontology-based approaches. *SIGMOD Record*, 33(4):65–70.

Noy, N. F. und Musen, M. A. (2003). The PROMPT suite: interactive tools for ontology merging and mapping. *International Journal of Human-Computer Studies*, 59(6):983–1024.

Özçep, Ö. L. (2006). Ontology revision through concept contraction. In: Artemov, S. und Parikh, R. (Hrsg.), *Proceedings of the Workshop on Rationality and Knowledge, 18th European Summerschool in Logic, Language, and Information (ESSLLI-06), Universidad de Malaga, August 7–11*, S. 79–90.

Özçep, Ö. L. (2008). Towards principles for ontology integration. In: Eschenbach und Grüninger (2008), S. 137–150.

Özçep, Ö. L. und Eschenbach, C. (2007). On the conservativity and stability of ontology-revision operators based on reinterpretation. In: Beierle und Kern-Isberner (2007), S. 84–99.

Palmer, S. E. (1978). Fundamental aspects of cognitive representations. In: Rosch, E. und Lloyd, B. (Hrsg.), *Cognition and categorization*, S. 259–303. Erlbaum, Hillsdale, NJ.

Parikh, R. (1999). Beliefs, belief revision, and splitting languages. In: Moss, L., Ginzburg, J. und de Rijke, M. (Hrsg.), *Logic, Language and Computation*, Band 2, S. 266–278. CSLI Publications.

Peppas, P. (2004). The limit assumption and multiple revision. *Journal of Logic and Computation*, 14(3):355–371.

Peppas, P., Chopra, S. und Foo, N. Y. (2007). Distance semantics for relevance-sensitive belief revision. In: Bonanno et al. (2007).

Poizat, B. (2000). *A Course in Model Theory*. Universitext. Springer Verlag.

Qi, G., Liu, W. und Bell, D. A. (2006). A revision-based approach to handling inconsistency in description logics. In: *Proceedings of the 11th International Workshop on Non-Monotonic Reasoning (NMR-06)*, S. 124–132.

Rao, A. S. und Georgeff, M. P. (1991). Modeling rational agents within a BDI-architecture. In: *Proceedings of the 2nd International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR-91)*, S. 473–484.

Rosch, E. (1973). Natural categories. *Cognitive Psychology*, 4:328–350.

Rosch, E. (1975). Cognitive representations of semantic categories. *Journal of Experimental Psychology: General*, 104(3):192–233.

Rott, H. (1993). Belief contraction in the context of a general theory of rational choice. *Journal of Symbolic Logic*, 58:1426–1450.

Rott, H. (2000). Two dogmas of belief revision. *The Journal of Philosophy*, 97(9):503–522.

Rott, H. (2001). *Change, Choice and Inference: A Study of Belief Revision and Nonmonotonic Reasoning*, Band 42 von *Oxford Logic Guides*. Oxford University Press.

Schlechta, K. (2004). *Coherent Systems*, Band 2 von *Studies in Logic and Practical Reasoning*. Elsevier, Amsterdam.

Schöning, U. (2000). *Logik für Informatiker*. Spektrum Akademischer Verlag, 5. Auflage.

Smith, B. (2008). Ontology (science). In: Eschenbach und Grüninger (2008), S. 21–35.

Tarski, A. (1956). On some fundamental concepts of metamathematics. In: Woodger, J. (Hrsg.), *Logic, Semantics, Metamathematics, Papers from 1923 to 1938*, S. 30–36. Clarendon Press, Oxford.

Tobies, S. (2000). The complexity of reasoning with cardinality restrictions and nominals in expressive description logics. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 12:199–217.

Visser, P. R. S., Jones, D. M., Bench-Capon, T. J. M. und Shave, M. J. R. (1997). An analysis of ontological mismatches: heterogeneity versus interoperability. In: *AAAI-97 Spring Symposium on Ontological Engineering, Stanford, USA*.

Wassermann, R. (1998). Revising concepts. In: *Proceedings of the 5th Workshop on Logic, Language, Information and Comunication (WoLLIC-98), Sao Paulo*.

Wassermann, R. und Fermé, E. (1999). A note on prototype revision. Spinning Ideas. Electronic Essays dedicated to Peter Gärdenfors on his 50th Birthday.

Weiss, G. (Hrsg.) (1999). *Multiagent Systems – A Modern Approach to Distributed Artificial Intelligence*. MIT Press, Cambridge, Massachussetts.

Winslett, M. (1988). Reasoning about action using a possible models approach. In: *Proceedings of the 7th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-88)*, S. 89–93.

Wooldridge, M. (2002). *An Introduction to MultiAgent Systems*. John Wiley & Sons Ltd., West Sussex, England.

Wooldridge, M. und Jennings, N. R. (1995). Intelligent agents: Theory and practice. *Knowledge Engineering Review*, 10:115–152.

Zhang, D. (2004). Properties of iterated multiple belief revision. In: Lifschitz, V. und Niemelä, I. (Hrsg.), *Proceedings of the 7th International Conference on Logic Programming and Nonmonotonic Reasoning (LPNMR-04)*, Band 2923 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 314–325. Springer.

Zhang, D. und Foo, N. (2001). Infinitary belief revision. *Journal of Philosophical Logic*, 30(6):525–619.

Zhang, D. und Foo, N. Y. (2002). Convergency of learning process. In: McKay, B. und Slaney, J. (Hrsg.), *Proceedings of the 15th Australian Joint Conference on Artificial Intelligence*, Band 2667 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 547–556. Springer.

Zimmermann, A. und Euzenat, J. (2006). Three semantics for distributed systems and their relations with alignment composition. In: Cruz, I., Decker, S., Allemang, D., Preist, C., Schwabe, D., Mika, P., Uschold, M. und Aroyo, L. (Hrsg.), *Proceedings of the 5th International Semantic Web Conference (ISWC-06), Athens, GA, USA, November 5–9, 2006*, Band 4273 von *Lecture Notes in Computer Science*, S. 16–29. Springer.

Index

Symbole

A