Algorithmen und Datenstrukturen

Tanya Braun
Prof. Dr. Ralf Möller
Universität zu Lübeck
Institut für Informationssysteme

Tanya Braun (Übungen)
sowie viele Tutoren

Danksagung

Die nachfolgenden Präsentationen wurden mit ausdrücklicher Erlaubnis des Autors übernommen und danach abgewandelt aus:

- „Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen“ (Kapitel 6: Verschiedenes) gehalten von Christian Scheideler an der TUM http://www14.in.tum.de/lehre/2008WS/ea/index.html.de

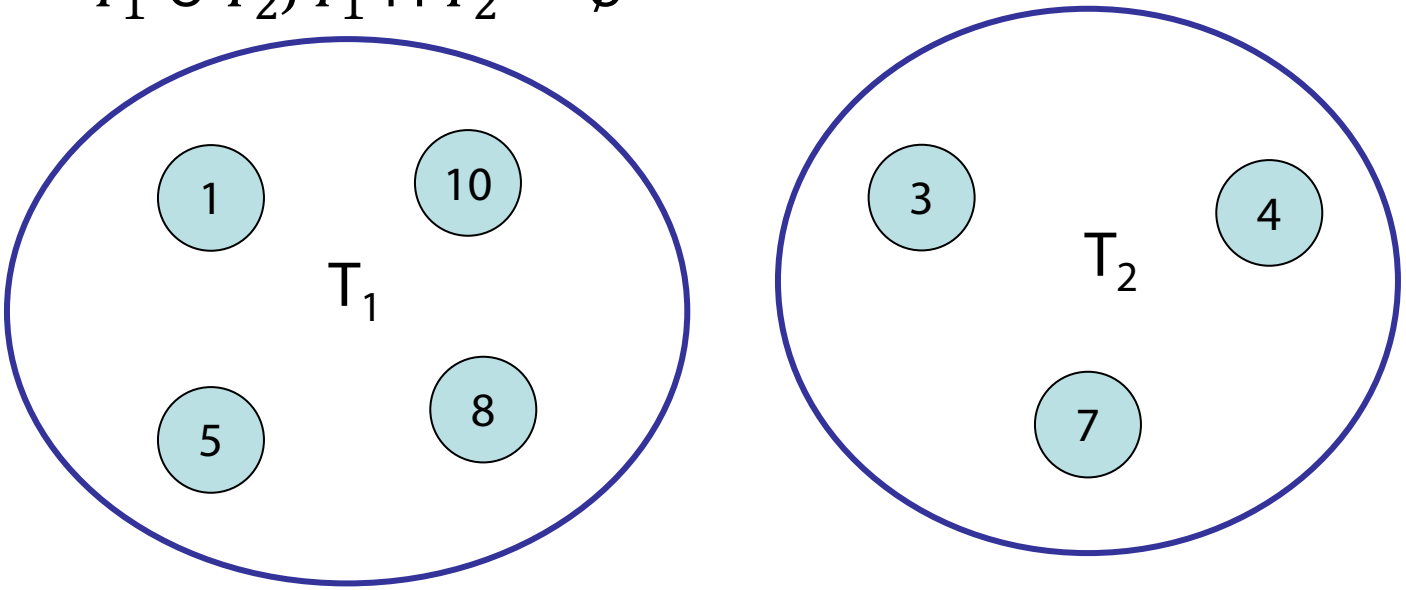
Der Inhalt zum Beweis zur amortisierten Analyse der Union-Find Datenstruktur basieren auf

- Hopcroft, J.E. and Ullman, J.D.; Set Merging Algorithms, SIAM Journal of Computing 2(4), S. 294-303, 1973.

Partitionen einer Menge

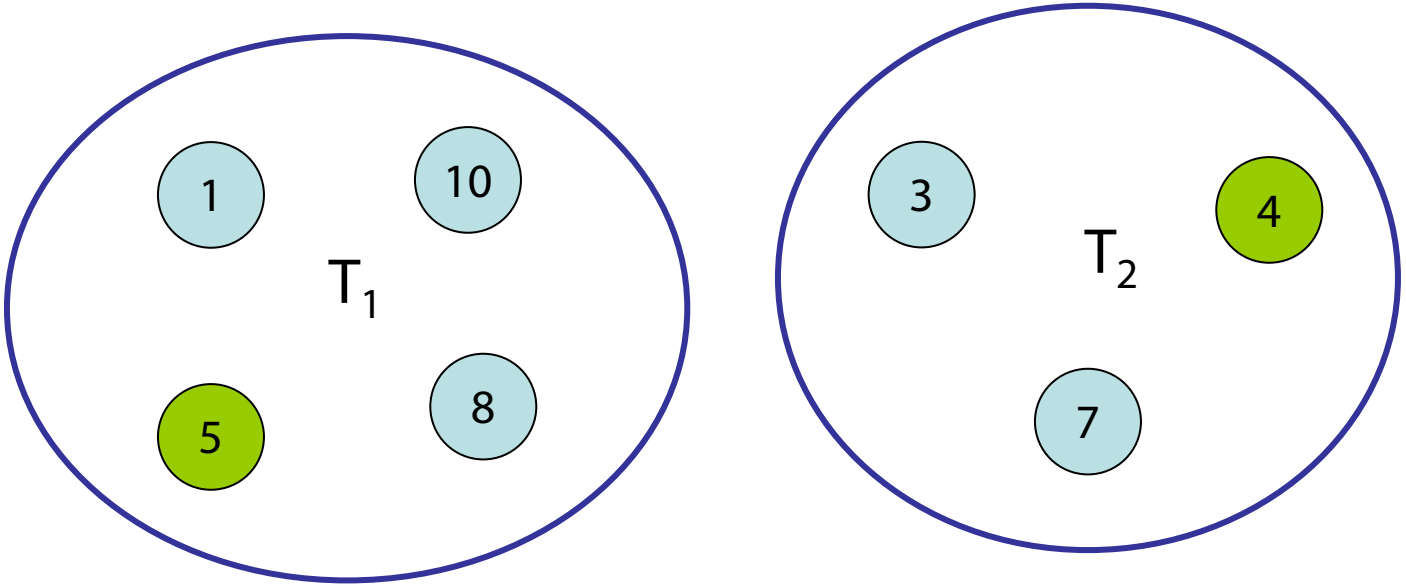
- Disjunkte Teilmengen, die zusammen die Ursprungsmenge ergeben
  - $T = \{1, 5, 8, 10, 3, 4, 7\}$
  - Partitionen: T_1 und T_2
  - $T = T_1 \cup T_2, T_1 \cap T_2 = \emptyset$

Identifizierung?



Identifizierung einer Partition

- Element aus Partition als Repräsentant
  - $T = \{1, 5, 8, 10, 3, 4, 7\}$
  - T_1: Repräsentant 5
  - T_2: Repräsentant 4



: Repräsentant

Datenstruktur für Disjunkte Mengen

Wozu brauchen wir so eine Datenstruktur?

- Effiziente Implementierung von Graphalgorithmen
  - Ermittlung minimaler Spannbäume (Kruskal)
  - Ermittlung starker Zusammenhangskomponenten

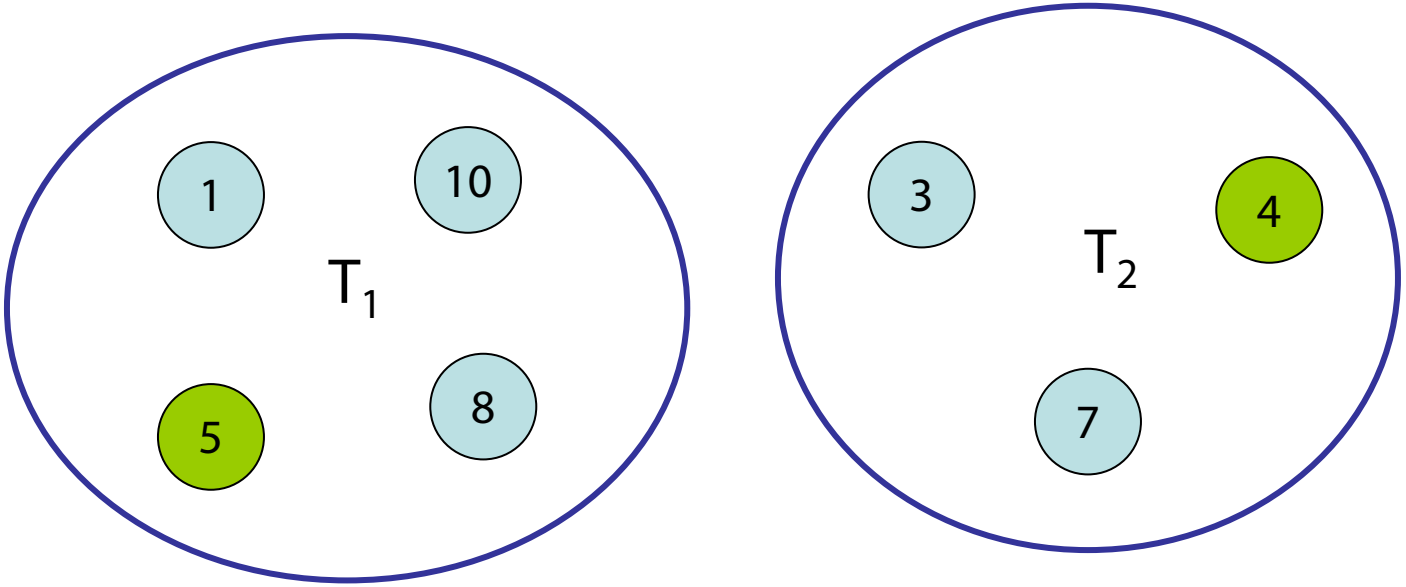
  (Beides kommt in dem Vorlesungsteil zu **Graphen** vor)

Was muss die Datenstruktur können?

- Testen, ob zwei Elemente zu einer Menge gehören
- Zwei Mengen vereinigen

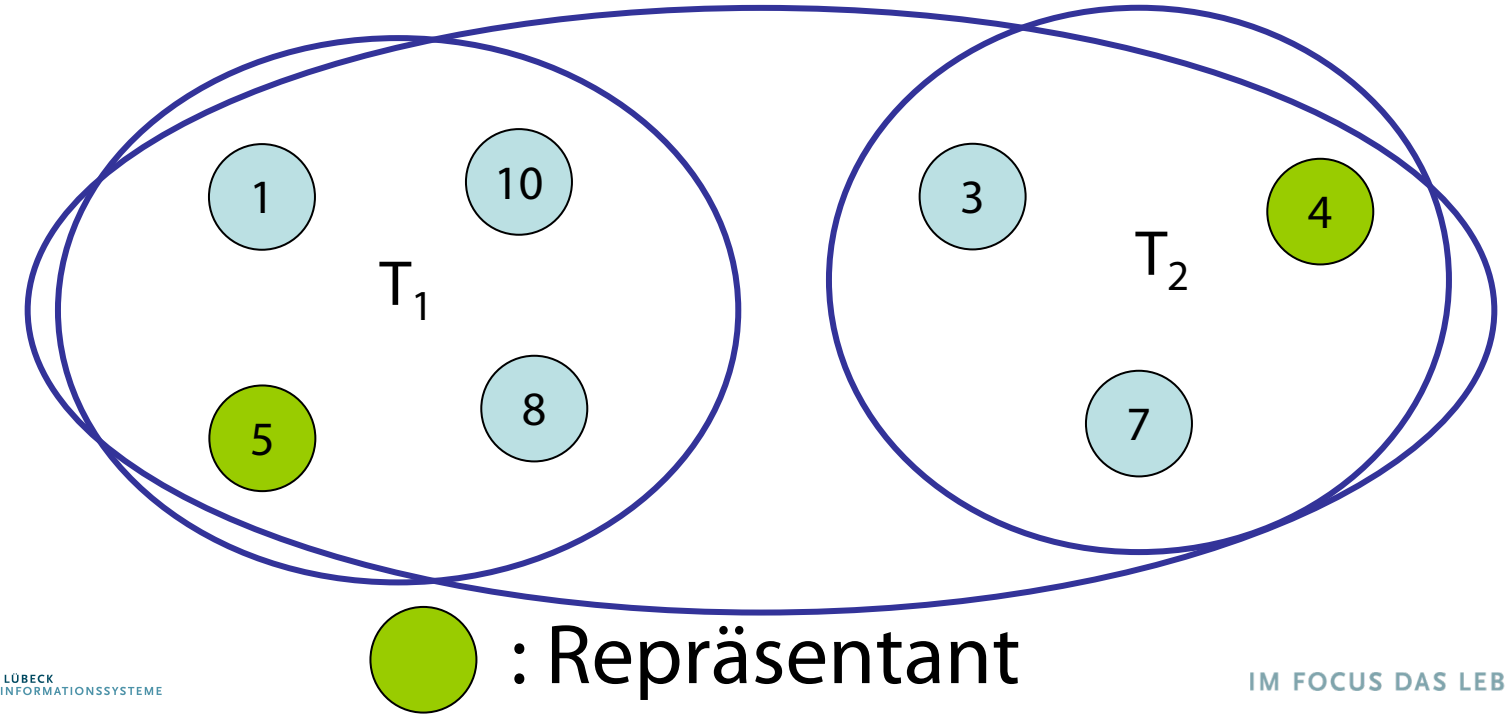
Test: Zugehörigkeit zur selben Partition?

- Gegeben: Partitionen mit Repräsentant, zwei Elemente
  - Partitionen: T_1,T_2, Elemente: 1 und 10, 1 und 3
- Test über Gleichheit der Repräsentanten
  - Anforderung: schnell auf Repräsentant kommen



Vereinigung zweier Partitionen

- Gegeben: Partitionen mit Repräsentant
  - Partitionen: T_1,T_2
- Elemente vereinigen, einen Repräsentanten behalten
  - Anforderung: schnell zwei Mengen verschmelzen



Union-Find Datenstruktur

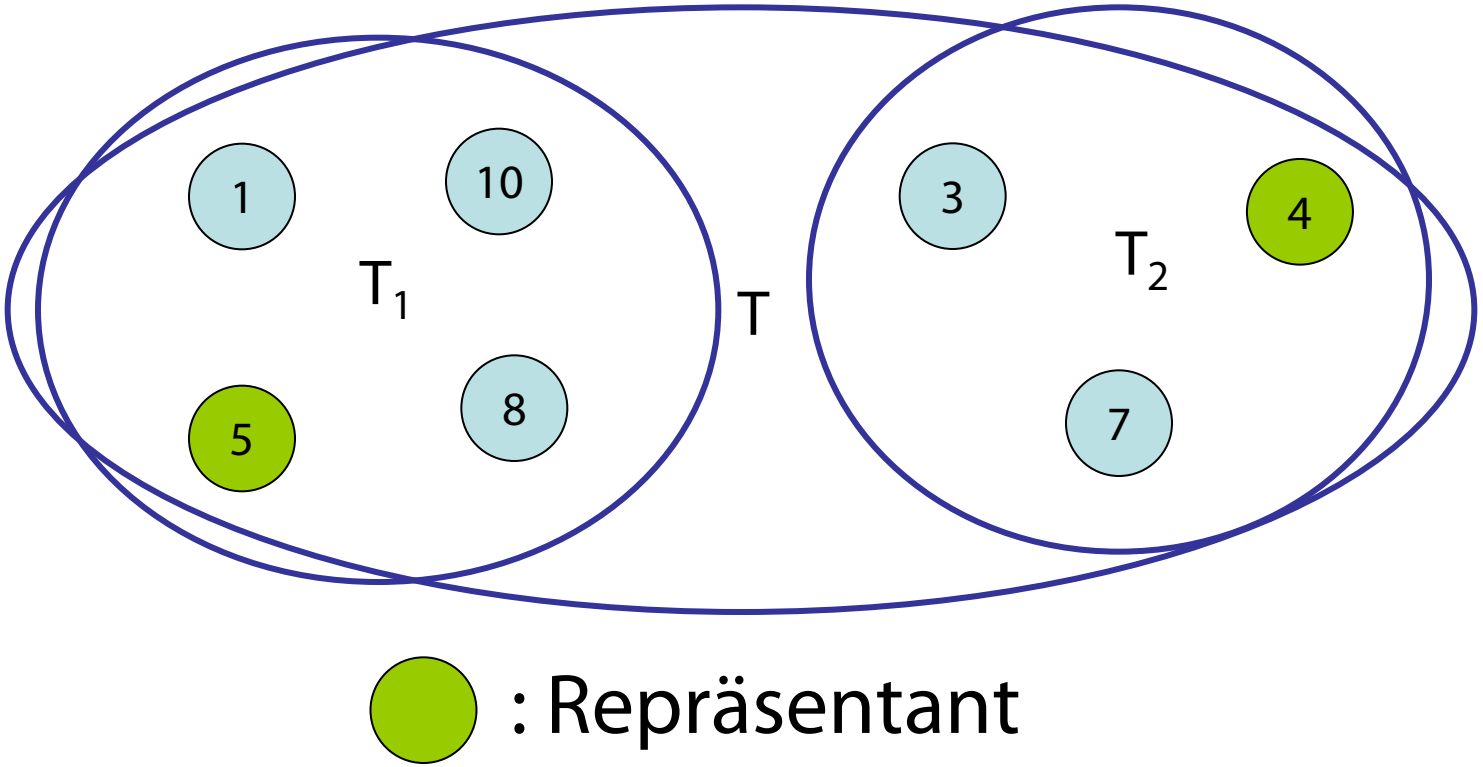
Gegeben: Menge von n Elementen.

Operationen:

- MakeSet(x): erzeugt für x eine (Teil)menge T mit x als Repräsentant (Initialisierung)
- Union(T_1,T_2): vereinigt Elemente in T_1 und T_2 zu $T=T_1 \cup T_2$
- Find(x): gibt (eindeutigen) Repräsentanten der Teilmenge aus, zu der x gehört
  - Nimmt an, dass es einen direkten Zugriff auf x gibt

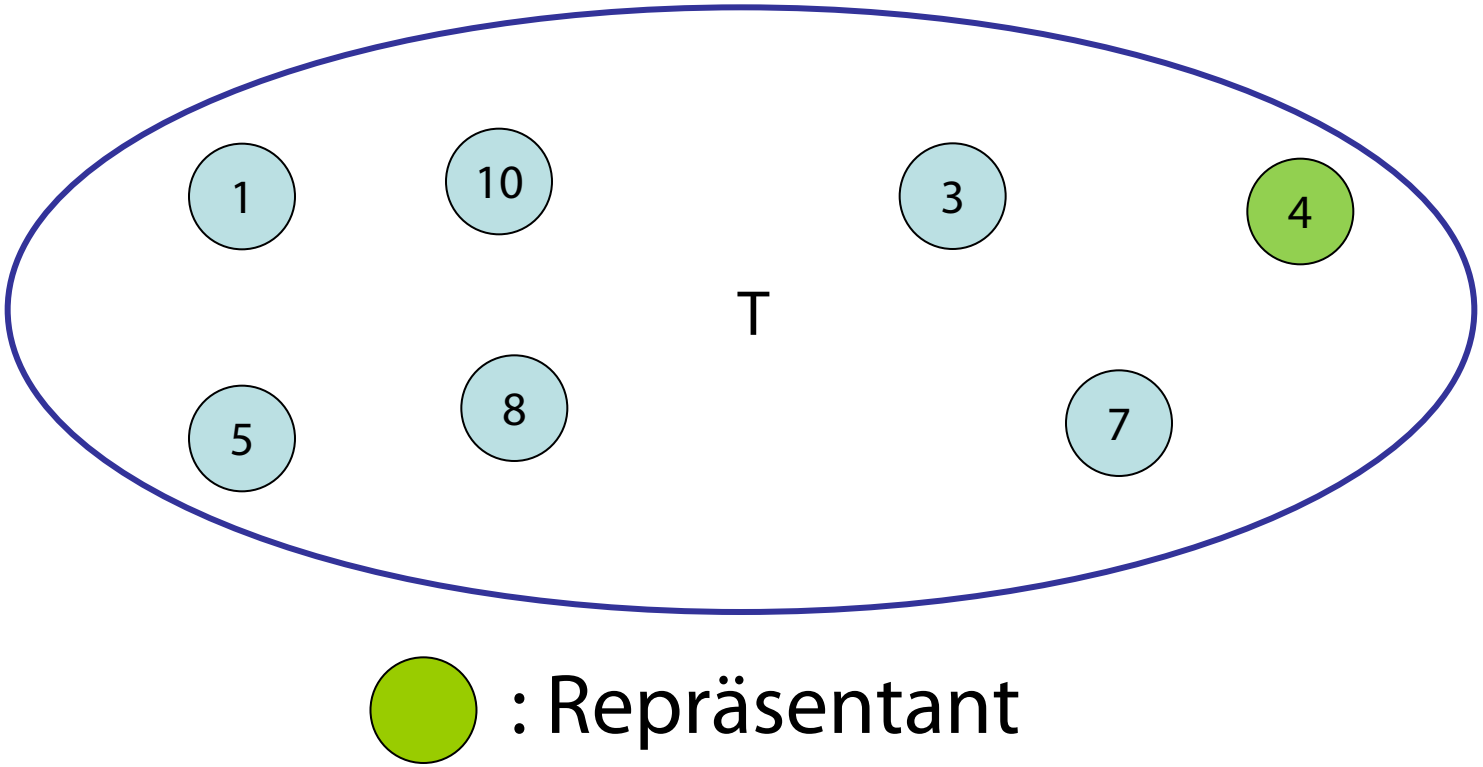
Union-Find Datenstruktur

Union(T_1,T_2):



Union-Find Datenstruktur

Find(10) liefert 4



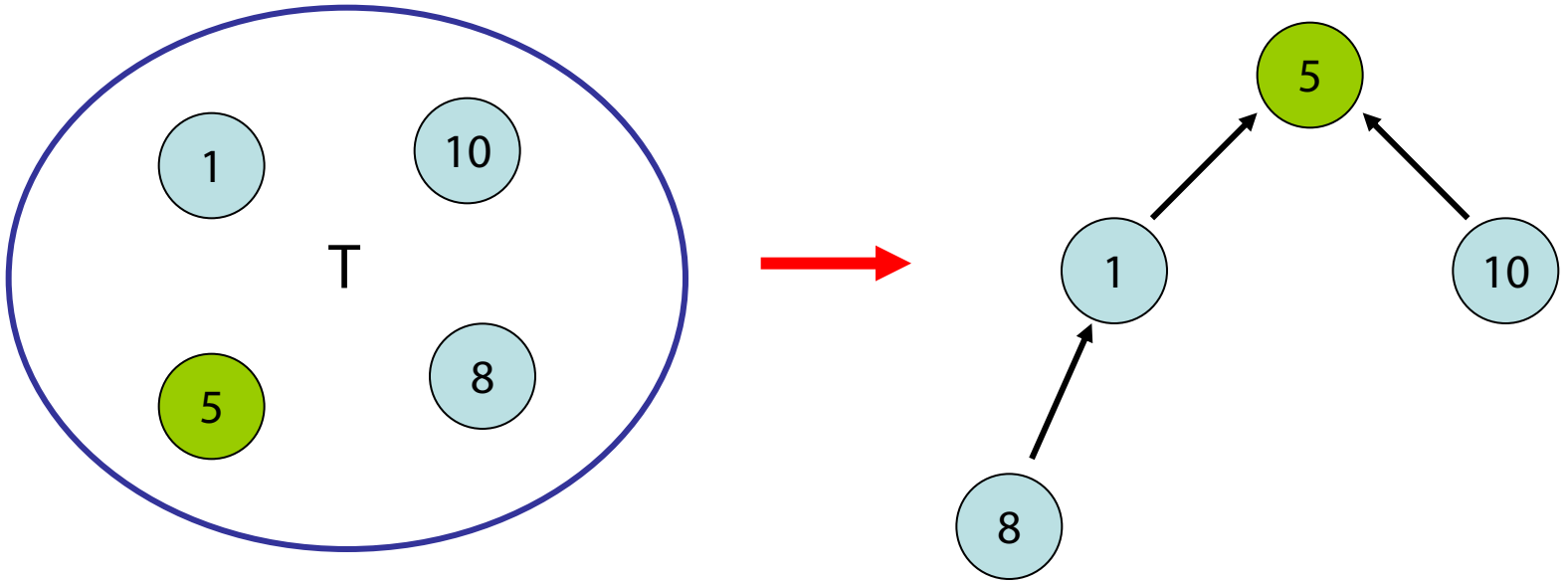
Umsetzung als Datenstruktur

- Version 1: Liste mit Repräsentant als Kopf
  - Schnell bei Union(T_1, T_2) (eine Liste an andere hängen) O(1)
  - Langsam bei Find(x) (durchlaufen bis zum Kopf) O(n)
- Version 2: Baum mit Repräsentant als Wurzel, Elemente als Blattknoten unter Wurzel
  - Schnell bei Find(x) (sofort von Blatt an Wurzel) O(1)
  - Langsam bei Union(T_1, T_2) (für eine Partition alle Blattknoten und Wurzel umhängen) O(n)
- Form von binärem Suchbaum
  - Sehr unausgeglichen oder viel Aufwand um auszugleichen
  - Sortierung nicht nötig

Union-Find Datenstruktur: Gerichteter Baum

Idee: Repräsentiere jede Teilmenge T als gerichteten Baum mit Wurzel als Repräsentant

- Wald von Bäumen für ganze Menge

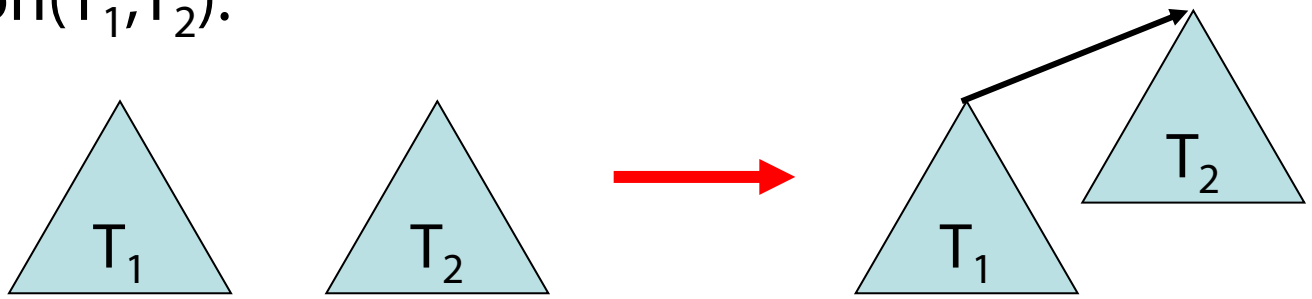


Galler, Bernard A.; Fischer, Michael J., An improved equivalence algorithm, Communications of the ACM 7 (5): 301–303, **1964**

Union-Find Datenstruktur

Realisierung der Operationen:

- Union(T_1,T_2):



- Find(x): Suche Wurzel des Baumes, in dem sich x befindet

Union-Find Datenstruktur

Naïve Implementierung:

- Union(1,5), Union(8,5), Union(10,5), …
- Union(1,5), Union(5,8), Union(8,10), …

Beobachtung

- Tiefe des Baums kann bis zu n (bei n Elementen) sein

Union-Find Datenstruktur

Naïve Implementierung:

- Zeit für Find: O(n)
- Zeit für Union: O(1)
  - Annahme: T_1 und T_2 liegen durch Repräsentant vor

- Schluss?
  - Tiefe des Baums berücksichtigen

Union-Find Datenstruktur

Gewichtete Union-Operation: Mache die Wurzel des flacheren Baums zum Kind der Wurzel des tieferen Baums.

Beobachtung

- Unterschiedlich tiefe Bäumen?
  - Tiefe des neuen Baums ist gleich Tiefe des tieferen Baums
- Was ist bei gleicher Tiefe?
  - Tiefe nimmt um 1 zu

Worst Case bei n Elementen?

Union-Find Datenstruktur

Gewichtete Union-Operation: Mache die Wurzel des flacheren Baums zum Kind der Wurzel des tieferen Baums.

Beh.: Die Tiefe eines Baums mit n Elementen ist höchstens $O(\log n)$

Begründung:

- Die Tiefe von $T=T_1 \cup T_2$ erhöht sich nur dann, wenn $Tiefe(T_1)=Tiefe(T_2)$ ist
- $N(t)$: min. Anzahl Elemente in Baum der Tiefe t
- Es gilt $N(t)=2 \cdot N(t-1) = 2^t$ mit $N(0)=1$
  - Beweis über Induktion
- Also ist $N(\log n) = 2^{\log n} = n$

Union-Find Datenstruktur

Gewichtete Union-Operation: Mache die Wurzel des flacheren Baums zum Kind der Wurzel des tieferen Baums.

Beobachtungen:

- Bei n Elementen ist die max. Tiefe eines Baums $\log n$
- In einem Baum der Tiefe t sind min. 2^t Elemente
- Bei n Elementen im Wald gibt es max. $n/2^t$ Knoten der Tiefe t

Union-Find Datenstruktur

Mit gewichteter Union-Operation:

- Zeit für Find: O(log n)
- Zeit für Union: O(1)

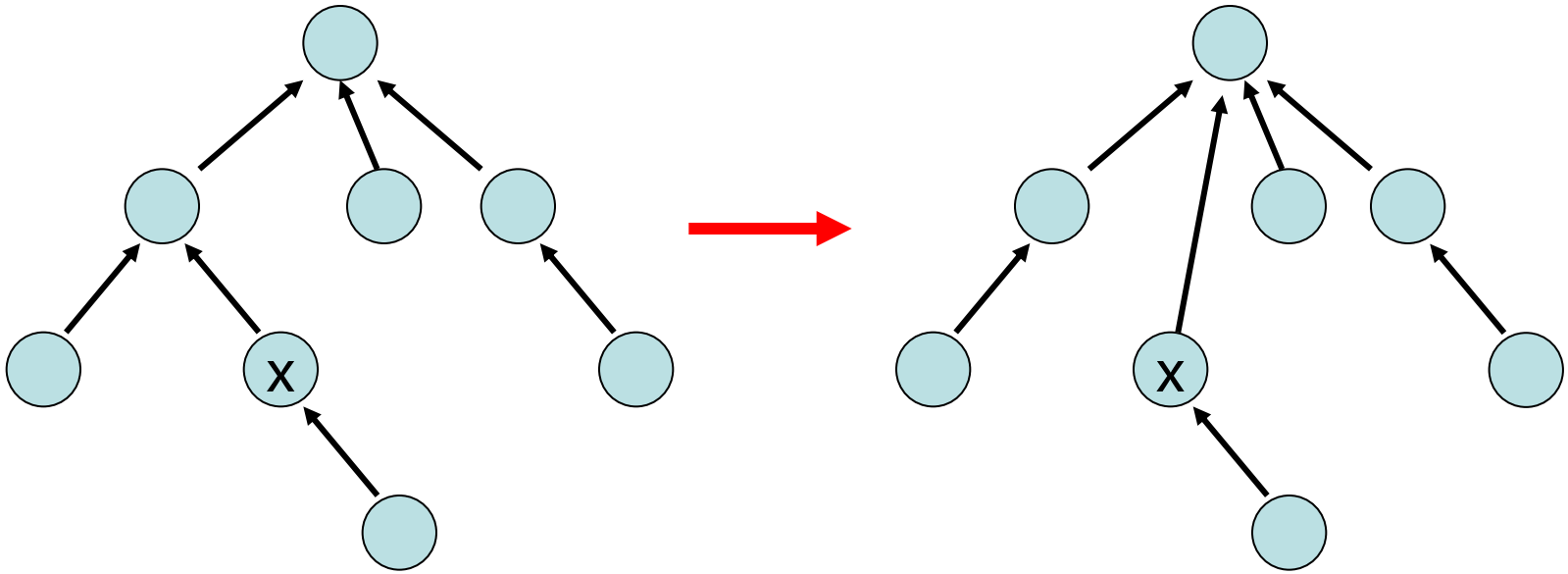
Geht das noch besser für Find?

- Best Case für Find: Nicht-Repräsentanten sind Blattknoten
  - Schnell beim Repräsentant
- Bei Find durchlaufen wir den Pfad vom Element zum Repräsentant
  - Elemente auf Pfad direkt auf Wurzel umleiten

Union-Find Datenstruktur

Besser: gewichtetes Union mit Pfadkompression

- Pfadkompression bei **jedem Find**(x): alle Knoten von x zur Wurzel zeigen direkt auf Wurzel



Union-Find Datenstruktur: Amortisierte Analyse

Theorem: Bei gewichtetem Union mit Pfadkompression ist die amortisierte Zeit für **Find** O(log* n).

Was ist log* n?

Iterierter Logarithmus log* n

Bemerkung: log* n ist definiert als

$\log^* n = 0$ für $n \leq 1$

$\log^* n = \min\{ i > 0 \mid \underbrace{\log \log \ldots \log}_{i\text{-mal}} n \leq 1\}$ sonst

Beipiele:

- $\log^* 2 = 1$
- $\log^* 4 = 2$
- $\log^* 16 = 3$
- $\log^* 2^{65536} = 5$

log* n wächst sehr langsam

Union-Find Datenstruktur: Amortisierte Analyse

Theorem: Bei gewichtetem Union mit Pfadkompression ist die amortisierte Zeit für **Find** $O(\log^* n)$.

$\longrightarrow$ quasi konstant ($\log^* n \leq 5$ für sehr große Zahlen)

Ein paar Hilfsterme und Beobachtungen folgen...

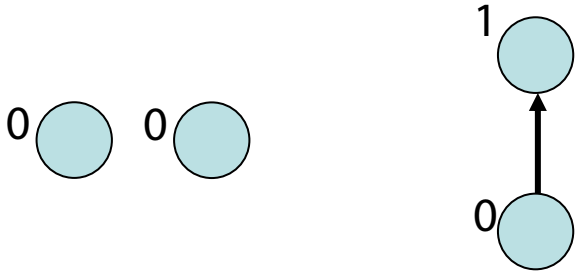
Union-Find Datenstruktur: rank(x)

Ordne jedem Element x zu:

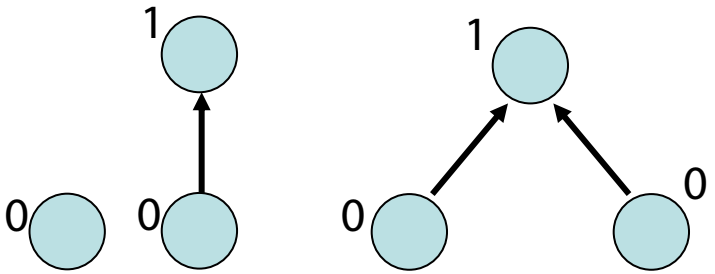
- rank(x) = Tiefe des Unterbaums von Wurzel x ohne Pfadkompression
  - MakeSet(x) setzt rank(x) = 0
  - Union(T_1,T_2) by rank: Erhöht rank(x) um 1 für Wurzel der Vereinigung, wenn für die Repräsentanten x_1, x_2 von T_1, T_2 gilt: $rank(x_1) = rank(x_2)$
  - Kann sich also nur unter Umständen für Repräsentanten ändern

Union-Find Datenstruktur: rank(x)

- Veränderung von rank(x) bei Union(T_1,T_2)
  - Gleiche Ränge



  - Unterschiedliche Ränge

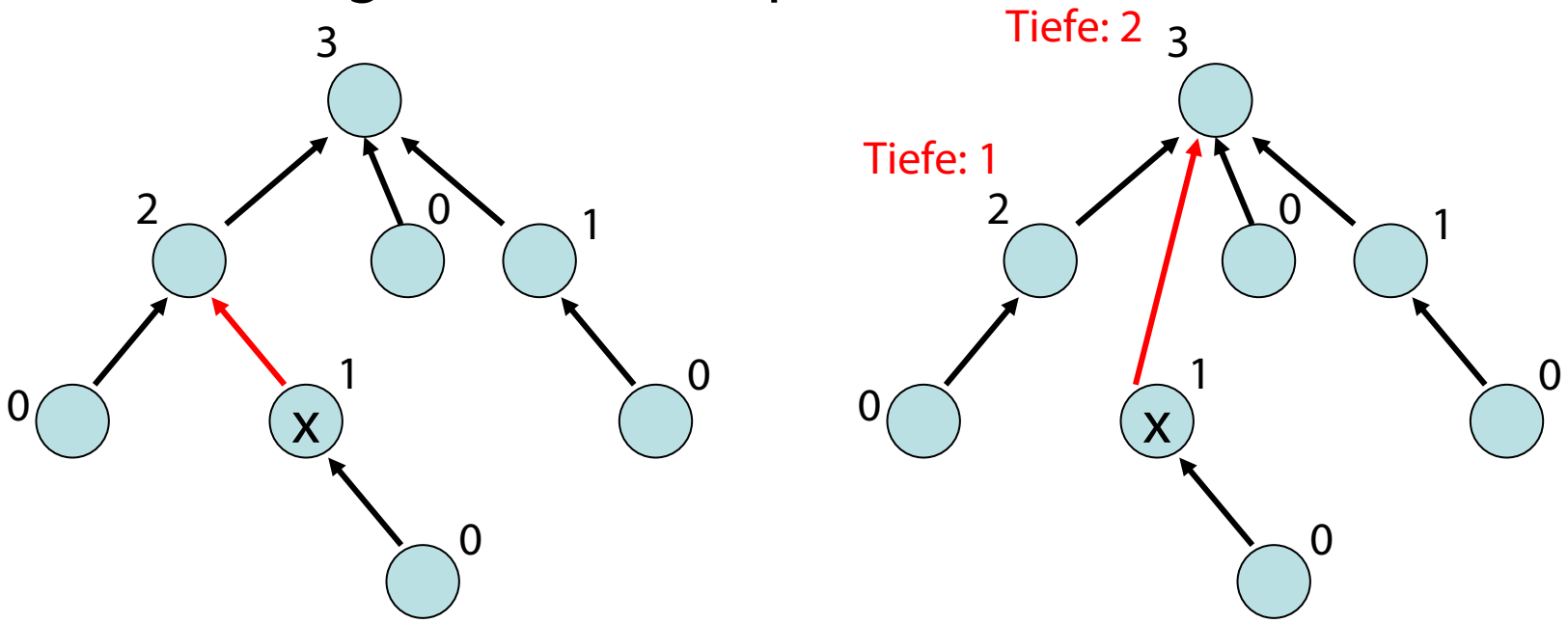


Beobachtungen:

- Wenn ein Repräsentant angehängt wird und damit kein Repräsentant mehr ist, ändert sich sein Rang nicht mehr

Union-Find Datenstruktur: rank(x)

- Auswirkung von Pfadkompression bei Find(x)



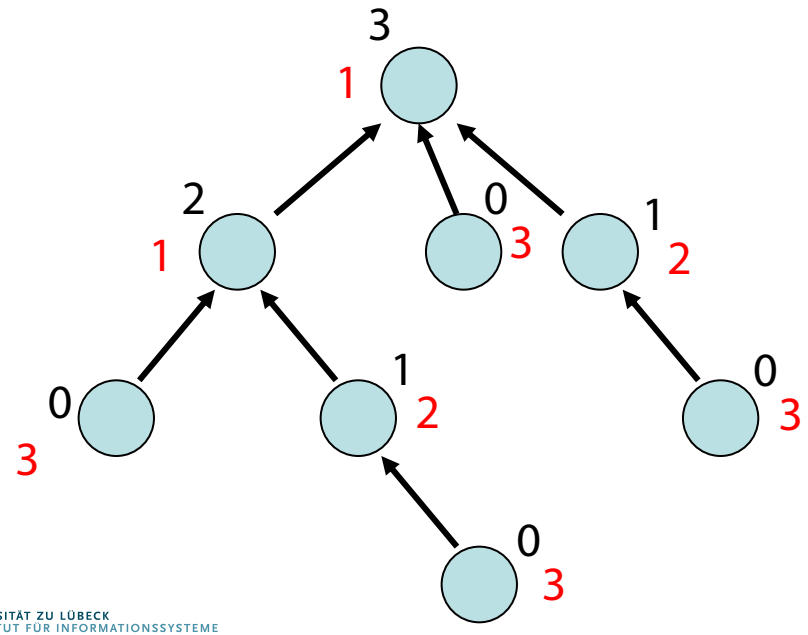
Beobachtungen:

- Auf dem Weg zur Wurzel: rank(x_i) aufsteigend
- Neuer Elternknoten hat höheren Rang

Union-Find Datenstruktur: Amortisierte Analyse

Jedes Element x gehört einer Gruppe g_j an

- Gruppe $g_j = \{v \mid \log^{j+1} n < rank(v) \leq \log^j n\}, j > 0$
  - $\log^j n$ wendet den Logarithmus j-mal auf n an



$n = 8, \log^* 8 = 3$

$\log^1 8 = 3$ — g_1

$\log^2 8 = 1.6$ — g_2

$\log^3 8 = 0.7$ — g_3

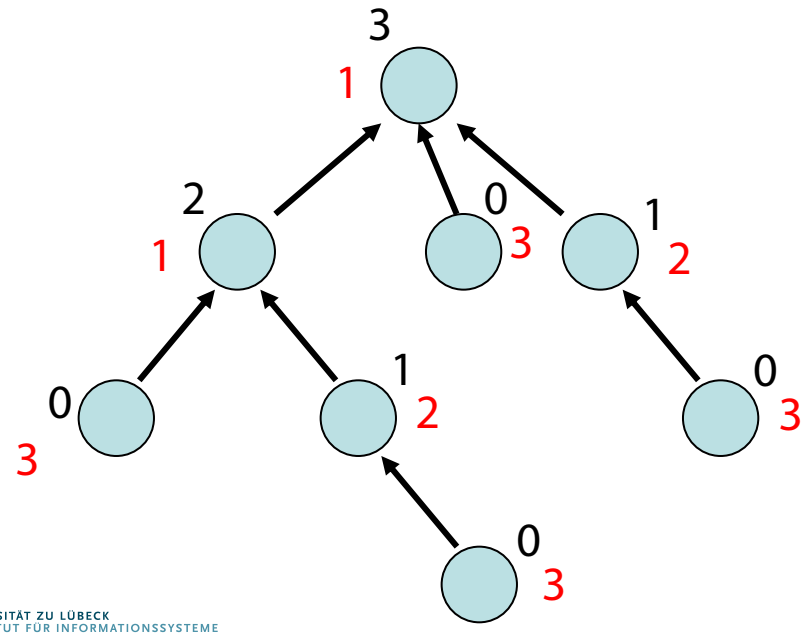
$\log^4 8 = -0.5$

rank(x) $j : x \in g_j$

Union-Find Datenstruktur: Amortisierte Analyse

Beobachtungen:

- Knoten mit Rang log n (max. Rang) liegt in g_1
  - Gruppe $g_j = \{v \mid \log^{j+1} n < rank(v) \leq \log^j n\}, j > 0$
  - $g_1 = \{v \mid \log^2 n < rank(v) \leq \log^1 n\}$



$n = 8, \log^* 8 = 3$

$\log^1 8 = 3$ — g_1

$\log^2 8 = 1.6$ — g_2

$\log^3 8 = 0.7$ — g_3

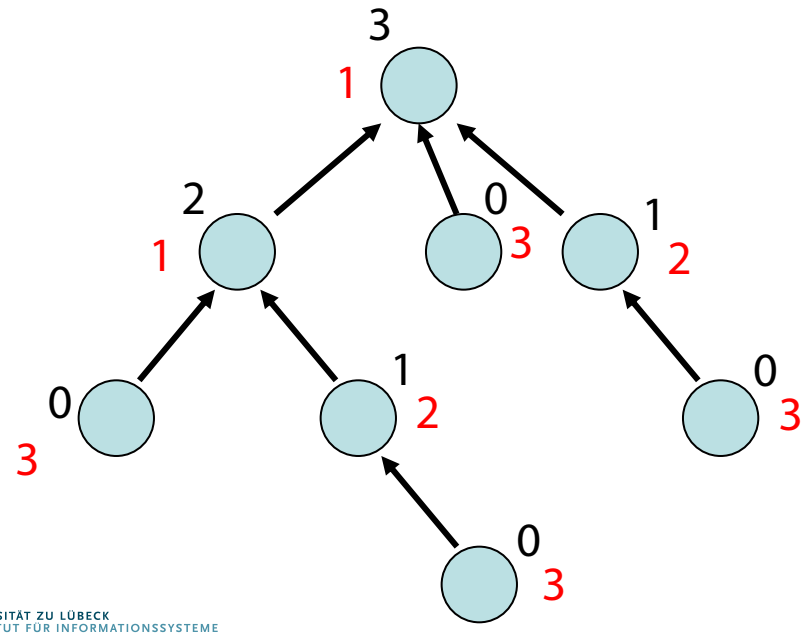
$\log^4 8 = -0.5$

rank(x) $j : x \in g_j$

Union-Find Datenstruktur: Amortisierte Analyse

Beobachtungen:

- Knoten mit Rang 1 sind in $g_{\log^* n - 1}$ oder in $g_{\log^* n}$
- Knoten mit Rang 0 sind in $g_{\log^* n}$ oder in $g_{\log^* n + 1}$
  - Gruppe $g_j = \{v \mid \log^{j+1} n < \text{rank}(v) \leq \log^j n\}, j > 0$
- Max. $(\log^* n) + 1$ Gruppen



$n = 8, \log^* 8 = 3$

$\log^1 8 = 3$ — g_1

$\log^2 8 = 1.6$ — g_2

$\log^3 8 = 0.7$ — g_2

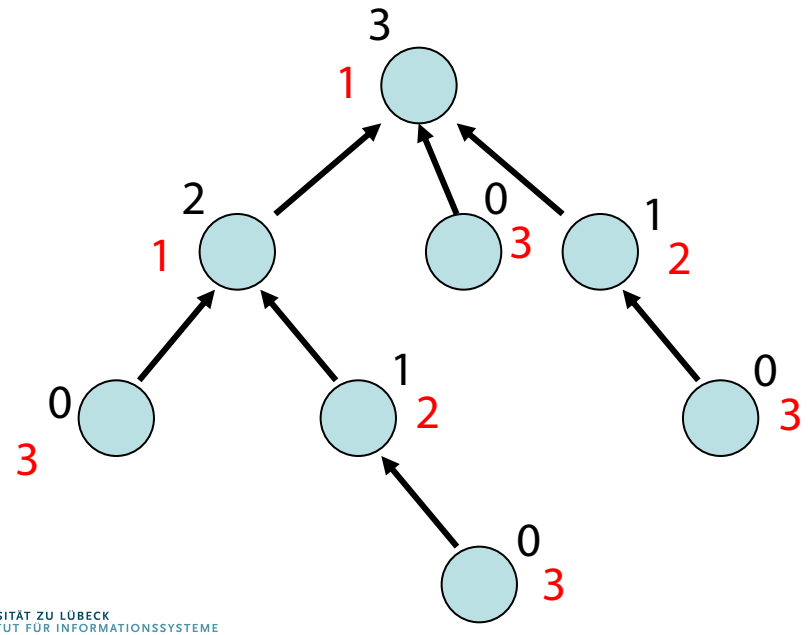
$\log^4 8 = -0.5$ — g_3

rank(x) $j : x \in g_j$

Union-Find Datenstruktur: Amortisierte Analyse

Beobachtungen:

- Es gibt maximal $2n/\log^j n$ Knoten in g_j.
  - g_j enthält Knoten mit Rang zwischen $[\log^{j-1} n, \log^j n]$
  - $n/2^i$ Knoten, die einen Rang i haben können (siehe $N(t)$)
  - Summe mit Abschätzung nach oben



$n = 8, \log^* 8 = 3$

$\log^1 8 = 3$ — g_1

$\log^2 8 = 1.6$ — g_2

$\log^3 8 = 0.7$ — g_3

$\log^4 8 = -0.5$

rank(x) $j : x \in g_j$

Union-Find Datenstruktur

Theorem: Bei gewichtetem Union mit Pfadkompression ist die amortisierte Zeit für **Find** $O(\log^* n)$.

Theorem: Bei gewichtetem Union mit Pfadkompression und gegeben $n \geq 2$ Elementen ist die amortisierte Zeit für $m \geq n$ Operationen $O(m \log^* n)$.

Begründung:

- Sequenz aus m Operationen besteht aus
  - Union: max. $n-1$
  - Find: min. $m-(n-1)$

Union-Find Datenstruktur

Theorem: Bei gewichtetem Union mit Pfadkompression und gegeben $n \geq 2$ Elementen ist die amortisierte Zeit für $m \geq n$ Union und Find Operationen $O(m \log^* n)$.

Begründung:

- Max. $n-1$ Union Operationen
  - Aufwand pro Union von $O(1)$ (konstant)
  - Also Aufwand in $O(n)$
- Max. m Find Operationen
  - Aufwand abhängig von Anzahl der Knoten, die durch Pfadkompression auf die Wurzel umgeleitet werden.

Union-Find Datenstruktur

Theorem: Bei gewichtetem Union mit Pfadkompression und gegeben $n \geq 2$ Elementen ist die amortisierte Zeit für $m \geq n$ Union und Find Operationen $O(m \log^* n)$.

Begründung:

Maximal m Find Operationen

- Find(x): Pfad von x zur Wurzel
  - Jeder Knoten auf dem Pfad wird umgeleitet
  - Kosten (1 Einheit) für das Umleiten aufteilen
    1. Wenn group(x) > group(parent(x)): Find(x) zusortieren
    2. Wenn group(x) = group(parent(x)) : x zusortieren
- Zusortierte Kosten aufsummieren

Union-Find Datenstruktur

Theorem: Bei gewichtetem Union mit Pfadkompression und gegeben $n \geq 2$ Elementen ist die amortisierte Zeit für $m \geq n$ Union und Find Operationen $O(m \log^* n)$.

Begründung:

Kosten für das Umleiten aufteilen

1. Wenn group(x) > group(parent(x)) : Find(x) zusortieren
   - Oder wenn parent(x) Wurzel
   - Max. $\log^* n + 1$ Gruppen
   - Wechsel von einer Gruppe zur nächsten also max. $\log^* n$
   - Kosten, die Find(x) zusortiert werden: max. $\log^* n$
2. Wenn group(x) = group(parent(x)) : x zusortieren

Union-Find Datenstruktur

Theorem: Bei gewichtetem Union mit Pfadkompression und gegeben $n \geq 2$ Elementen ist die amortisierte Zeit für $m \geq n$ Union und Find Operationen $O(m \log^* n)$.

Begründung:

2. Wenn $group(x) = group(parent(x))$: x zusortieren
   - Pro Gruppe max. $2n/\log^j n$ Knoten x_j
   - Jeder Knoten x_j kann max. $\log^j n$ mal umgeleitet werden
     - Dann gehört Elternknoten der nächsten Gruppe an
     - Kosten gehen an Find ab nächstem Mal
   - Pro Gruppe erhalten die Knoten max. $2n$ Kosten
   - Bei max. $\log^* n + 1$ Gruppen: max. $2n (\log^* n + 1)$

Union-Find Datenstruktur

Theorem: Bei gewichtetem Union mit Pfadkompression und gegeben $n \geq 2$ Elementen ist die amortisierte Zeit für $m \geq n$ Union und Find Operationen $O(m \log^* n)$.

Begründung:

- Max. m Find Operationen
  - Pro Find(x): $O(\log^* n)$
  - Bei m Find Operationen: $O(m \log^* n)$
  - Für n Knoten über alle m Find Operationen:
    $O(n (\log^* n + 1)) = O(n (\log \log^* n)) = O(n (\log^* \log n)) = O(n \log^* n)$
  - $O(m \log^* n) + O(n \log^* n) = O((m+n) \log^* n)$

Union-Find Datenstruktur

Theorem: Bei gewichtetem Union mit Pfadkompression und gegeben $n \geq 2$ Elementen ist die amortisierte Zeit für $m \geq n$ Operationen $O(m \log^* n)$.

Begründung:

- Aufwand für Union und Find Operationen
  - Union: $O(n)$
  - Find: $O((m+n) \log^* n)$
  - Zusammen: $O((m+n) \log^* n)$
- Wenn $m >> n$: $O(m \log^* n)$
  - Quasi linear abhängig von m, da $\log^* n$ quasi konstant

Union-Find Datenstruktur

Theorem: Bei gewichtetem Union mit Pfadkompression ist die amortisierte Zeit für **Find** $O(\log^* n)$.

Theorem: Bei gewichtetem Union mit Pfadkompression und gegeben $n \geq 2$ Elementen ist die amortisierte Zeit für $m \geq n$ Operationen $O(m \log^* n)$.

Begründung:

- Wenn $m >> n$ sind fast alle m Operationen Finds
  - Da Anzahl an Unions max. $n-1$
  - Gleiches Argument für n MakeSet(x) Operationen
- Amortisierte Zeit für eine Find Operation $O(\log^* n)$

Zusammenfassung

- Find: O(log* n) amort., Union: O(1)
- Können wir Find auf O(1) bringen?
  - Nur wenn Union nicht mehr in O(1)
  - Die Find-Abschätzung kann tatsächlich noch deutlich verbessert werden[1]: O(α(n)) amort.,
    wobei α die Umkehrfunktion der Ackermannfunktion ist, also SEHR SEHR langsam wächst
- Man kann nicht gleichzeitig Find und Union auf O(1) bringen[2]

[1] Tarjan, Robert E.; van Leeuwen, Worst-case analysis of set union algorithms, Journal of the ACM 31 (2), S. 245–281, **1984**

[2] M. Fredman, M. Saks, The cell probe complexity of dynamic data structures, In: Proceedings of the Twenty-First Annual ACM Symposium on Theory of Computing., S. 345–354, **1989**