Algorithmen und Datenstrukturen

Prof. Dr. Ralf Möller

Universität zu Lübeck

Institut für Informationssysteme

Stefan Werner (Übungen)

sowie viele Tutoren

Danksagung

Die nachfolgenden 4 Präsentationen übernommen aus der Vorlesung „Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen“ (Kapitel 5: Sortieren und Selektieren) gehalten von Christian Scheideler an der TUM

http://www14.in.tum.de/lehre/2008WS/ea/index.html.de

Selektion

Problem: finde k-kleinstes Element in einer Folge von n Elementen

Lösung: sortiere Elemente (z.B. Mergesort), gib k-tes Element aus ! Zeit O(n log n)

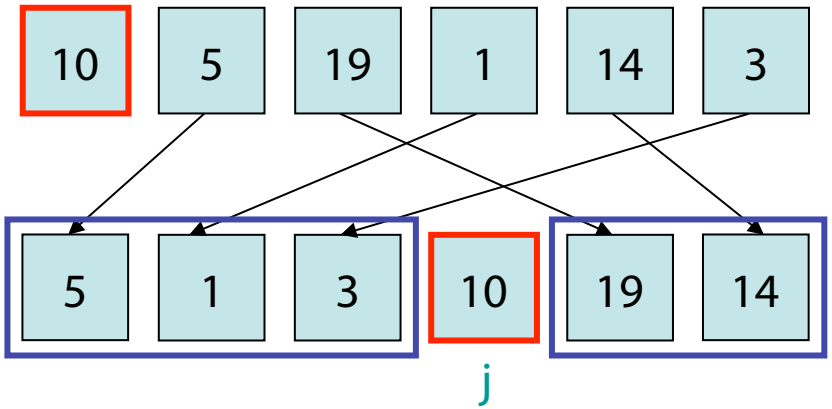
Geht das auch schneller??

Ganz sicher für k=1 (min) und k=n (max)

Ausschluss von n-1 Elementen nötig, also O(n)

Selektion

Ansatz: Verfahre ähnlich zu Quicksort



- j: Position des Pivotelements nach Partitionierung
- k<j: mach mit linker Teilfolge weiter
- k>j: mach mit rechter Teilfolge weiter

Selektion

```
function QUICKSELECT(A, l, r, k)
    // a[l..r]: Restfeld, k: k-kleinstes Element, l≤k≤r
    if r = l then return A[l]
    z := zufällige Position in {l,..,r}
    temp := A[z]; A[z] := A[r]; A[r] := temp
    v := A[r]; i := l-1; j := r
    repeat    // ordne Elemente in [l,r-1] nach Pivot v
      repeat i := i + 1 until A[i] ≥ v
      repeat j := j - 1 until A[j] < v or j = l
      if i < j then temp := A[i]; A[i] := A[j]; A[j] := temp
    until j ≤ i
    temp := A[i]; A[i] := A[r]; A[r] := temp
    if k < i then e := Quickselect(A, l, i-1, k)
    if k > i then e := Quickselect(A, i+1, r, k)
    if k = i then e := A[k]
    return e
```

Quickselect: Analyse

- Aufwand T(n): erwartete Anzahl Vergleiche

Behauptung: T(n) in O(n)

Beweis:

- Pivot ist gut: keine der Teilfolgen länger als $n \cdot 2/3$
- Sei p = Anteil der Fälle, in denen gilt: Pivot ist gut

- p=1/3
- Pivot gut: Restaufwand ≤ T(2n/3)
- Pivot schlecht: Restaufwand ≤ T(n)

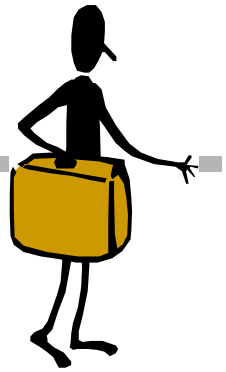
Quickselect: Analyse

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq cn + p \cdot T(n \cdot 2/3) + (1-p) \cdot T(n) \\
p \cdot T(n) &\leq cn + p \cdot T(n \cdot 2/3) \\
T(n) &\leq cn/p + T(n \cdot 2/3) \\
&\leq cn/p + c \cdot (n \cdot 2/3)/p + T(n \cdot (2/3)^2) \\
&\ldots \quad \text{wiederholtes Einsetzen} \\
&\leq (cn/p)(1 + 2/3 + 4/9 + 8/27 + \ldots) \\
&\leq \frac{cn}{p} \sum_{i \geq 0} (2/3)^i \\
&\leq \frac{cn}{1/3} \cdot \frac{1}{1-2/3} = 9cn \in O(n)
\end{aligned}
$$

geometrische Reihe mit $a_0 = 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}$$

Überblick



- Bisher behandelt:
  - Sortieren durch Vergleichen (vorige Sitzungen)
  - Lineares Sortieren
  - Prioritätswarteschlangen
  - Selektion von Elementen aus einem Feld (z.B. Median)
- Es kommt:
  - Realisierung von Mengen
  - Assoziation von Objekten (über sog. Hashtabellen)