Algorithmen und Datenstrukturen

Prof. Dr. Ralf Möller

Universität zu Lübeck

Institut für Informationssysteme

Stefan Werner (Übungen)

sowie viele Tutoren

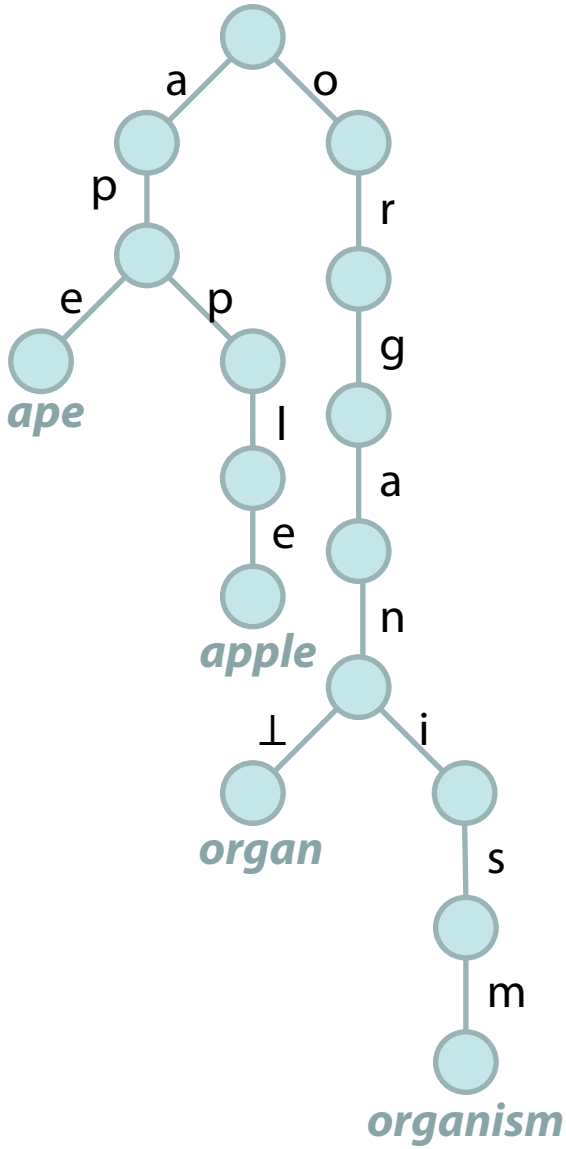
Mengen von Zeichenketten

Danksagung

Die nachfolgenden Präsentationen wurden mit einigen Änderungen übernommen aus:

- „Algorithmen und Datenstrukturen“
  gehalten von Sven Groppe an der UzL

Idee: Ausnutzung von gemeinsamen Präfixen



Trie

- Repräsentation von Mengen von Zeichenketten
- Name stammt nach *Edward Fredkin* von re**TRIE**val
  - Anwendungen von Tries finden sich im Bereich des *Information Retrieval*
    - Informationsrückgewinnung aus bestehenden komplexen Daten (Beispiel Internet-Suchmaschine)
  - auch Radix-Baum oder Suffix-Baum genannt
- Relativ kompakte Speicherung von Daten insbesondere mit gemeinsamen Präfixen

Edward Fredkin, Trie Memory,
Communications of the ACM 3 (9), S. 490–499, **1960**

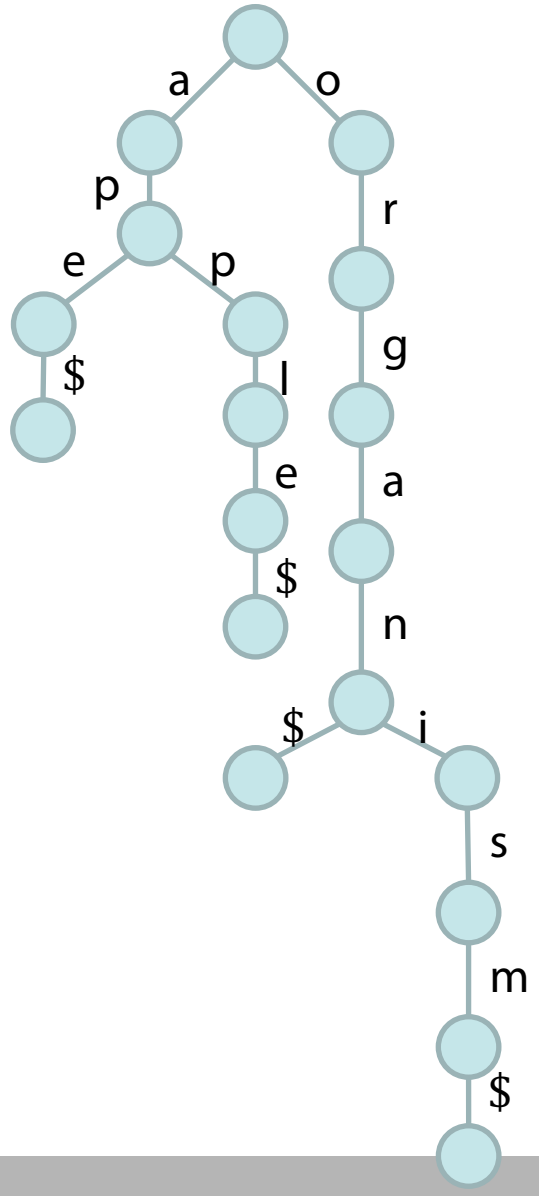
Trie

- Voraussetzung
  - Daten darstellbar als Folge von Elementen aus einem (endlichen) Alphabet
    - Beispiele
      - Zeichenkette „Otto“ besteht aus Zeichen ‚O‘, ‚t‘, ‚t‘ und ‚o‘ (Alphabet ist alle Zeichen)
      - Zahl 7 ist darstellbar als Folge von Bits 111 (Alphabet ist {0, 1})
  - Unter den Elementen aus dem Alphabet besteht eine Ordnung

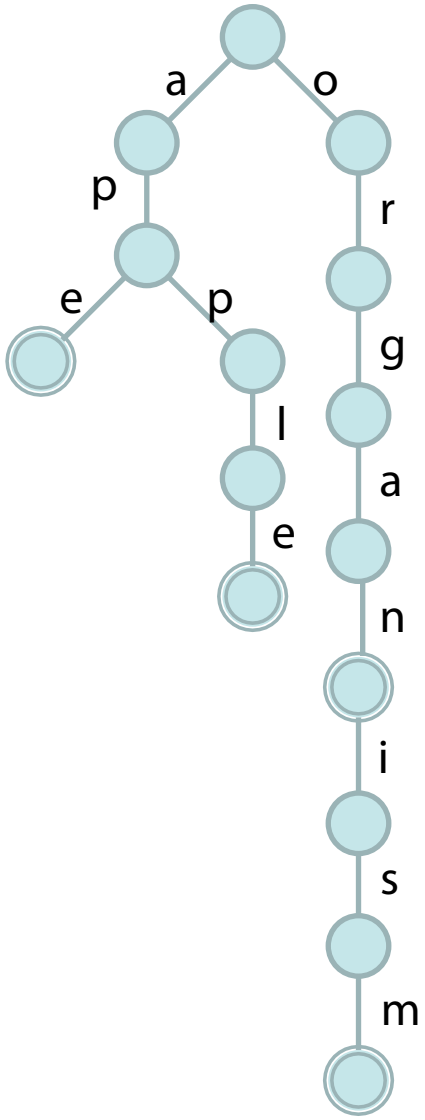
Trie - Definition

- Sei Σ das Alphabet der zu speichernden Wörter inklusive für leeres Zeichen
- Dann ist ein Trie ein Baum
  - Jeder Knoten hat 0 bis maximal $|\Sigma|$ Kinder
  - Jede Kante besitzt einen Bezeichner in Σ
  - Die Kanten zu den Kinder eines Knotens haben *unterschiedliche* Bezeichner
    - d.h. es gibt *keine* Kanten eines Knotens mit demselben Bezeichner
    - in der Regel werden die Kanten sortiert dargestellt und gespeichert
  - steht nur über einen Blattknoten und auch nur wenn der Elternknoten des Blattknotens weitere Kindsknoten besitzt
  - Der Wert eines Blattknotens ergibt sich aus der Konkatenation der Kantenbezeichner von der Wurzel zum Blattknoten
- Anstatt wird manchmal mit einem Terminierungssymbol am Ende eines jeden Wortes oder mit speziellen Auszeichnungen von Knoten gearbeitet

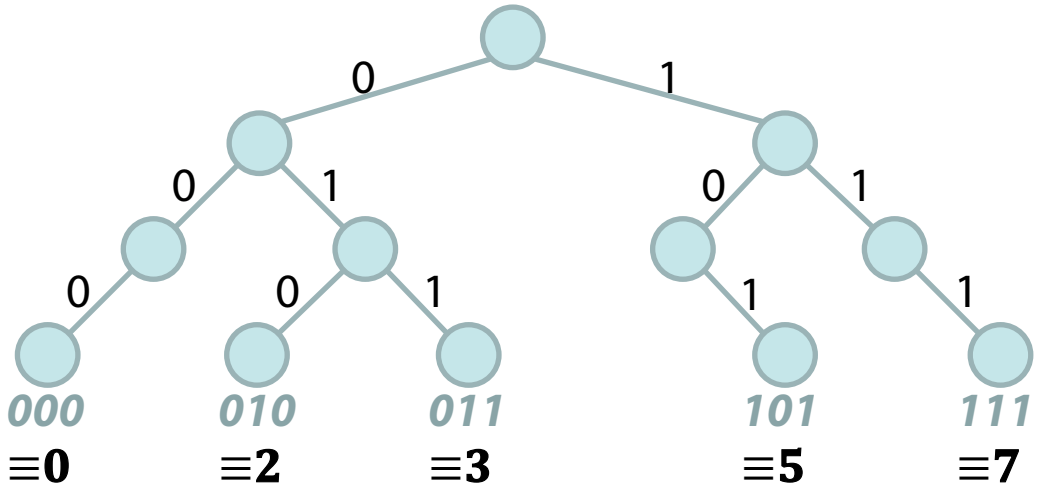
Trie – Variante mit Terminatorsymbol



Trie – Variante mit ausgezeichneten Knoten



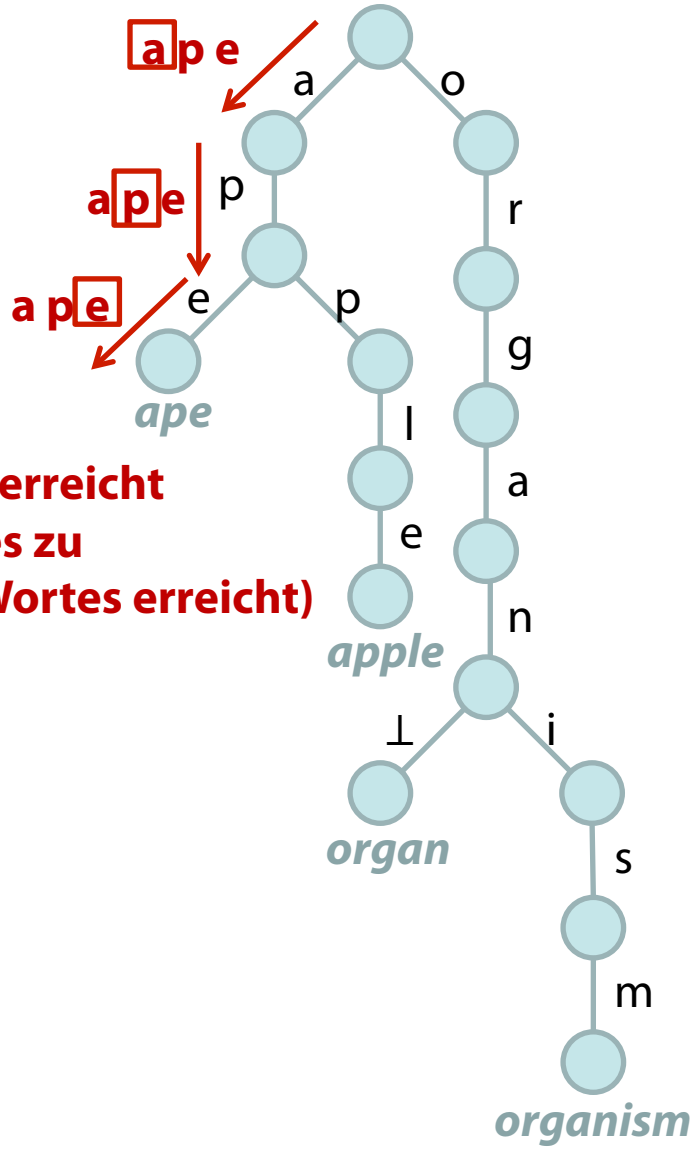
Trie – Beispiel mit Bits als Alphabet



Suche in Tries

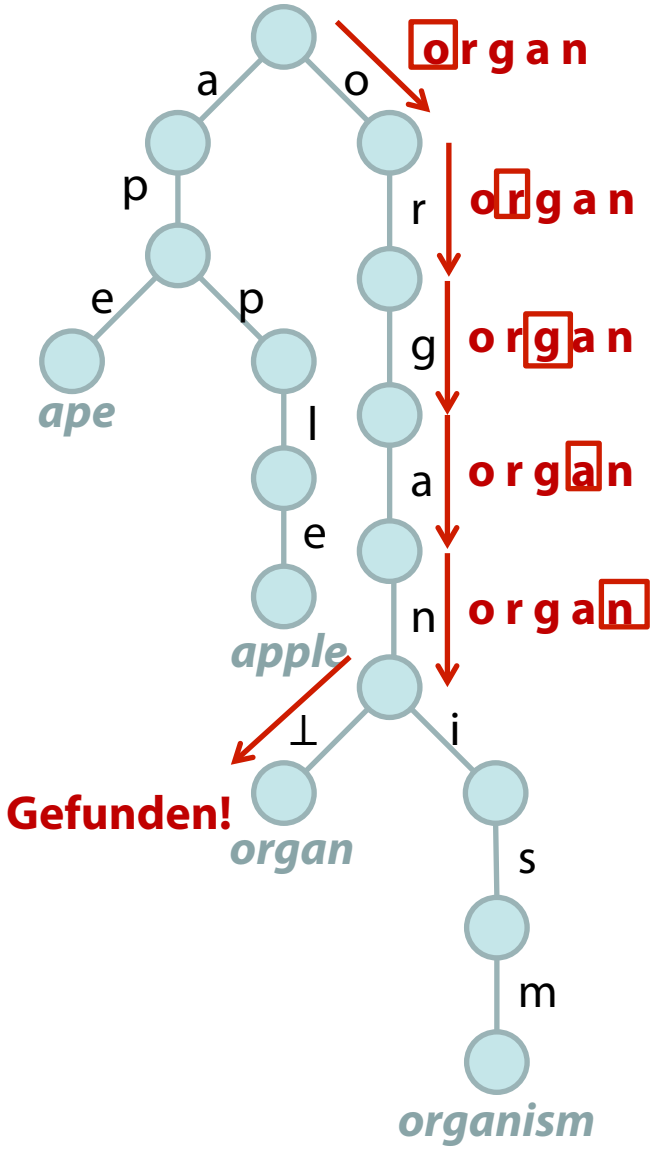
- Wir rufen die Suchmethode mit der Wurzel des Trie auf
- Die Suchmethode erhält als Parameter den momentanen Knoten des Trie sowie das restliche zu suchende Wort
  - Falls das restliche zu suchende Wort leer ist
    - geben wir „**gefunden**“ zurück
      - falls der momentane Knoten ein Blattknoten ist
      - falls eine ausgehende Kante mit dem Bezeichner $\perp$ existiert
    - ansonsten geben wir „**nicht gefunden**“ zurück
  - Falls das restliche zu suchende Wort *nicht leer* ist
    - und falls eine ausgehende Kante existiert mit dem nächsten Zeichen des restlich zu suchenden Wortes, dann rufen wir die Suchmethode mit dem entsprechenden Kindsknoten und um das nächste Zeichen verkürzte restlich zu suchende Wort rekursiv auf
    - ansonsten geben wir nicht „**nicht gefunden**“ zurück

Beispiel: Suche nach **ape**

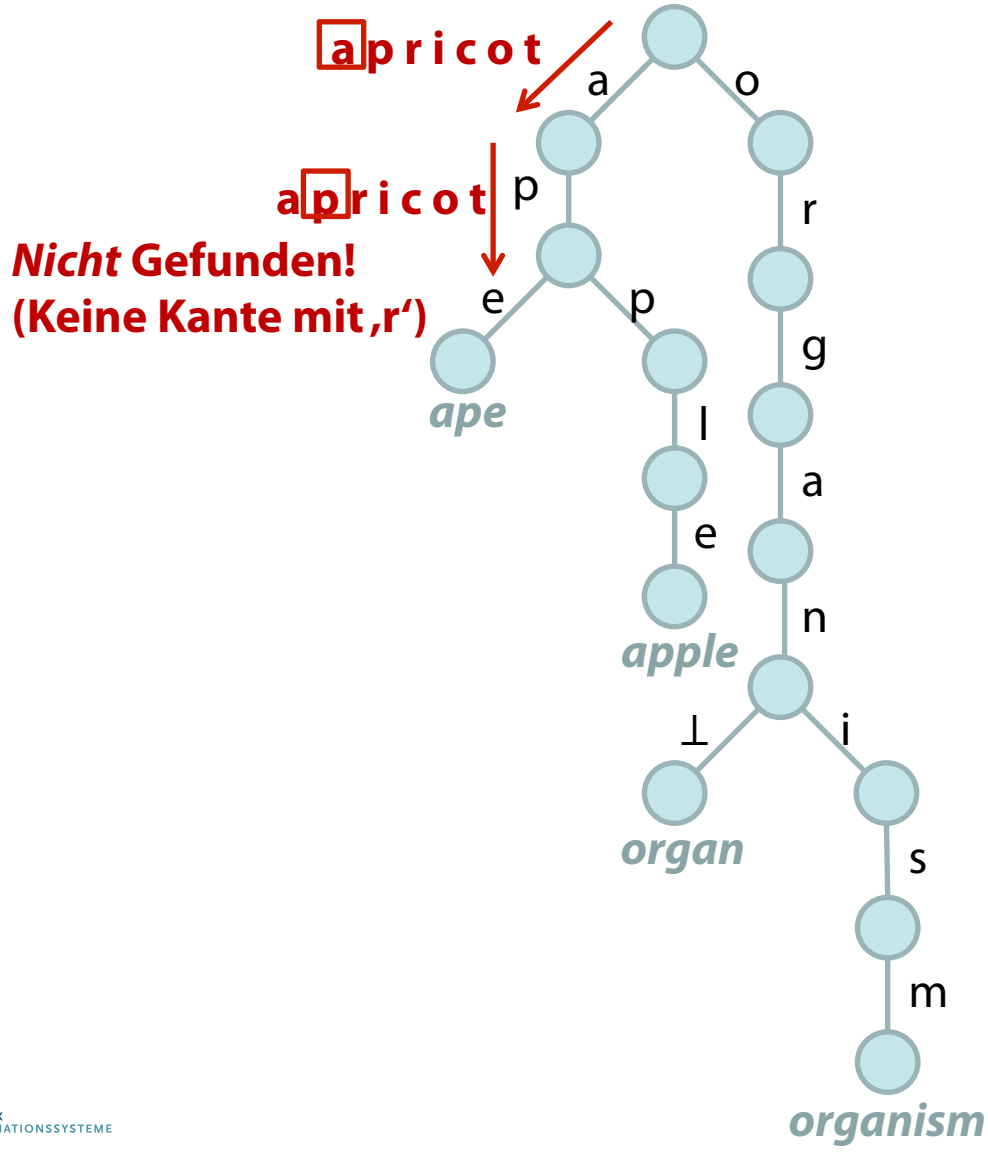


Gefunden!
(Blattknoten erreicht und Ende des zu suchendes Wortes erreicht)

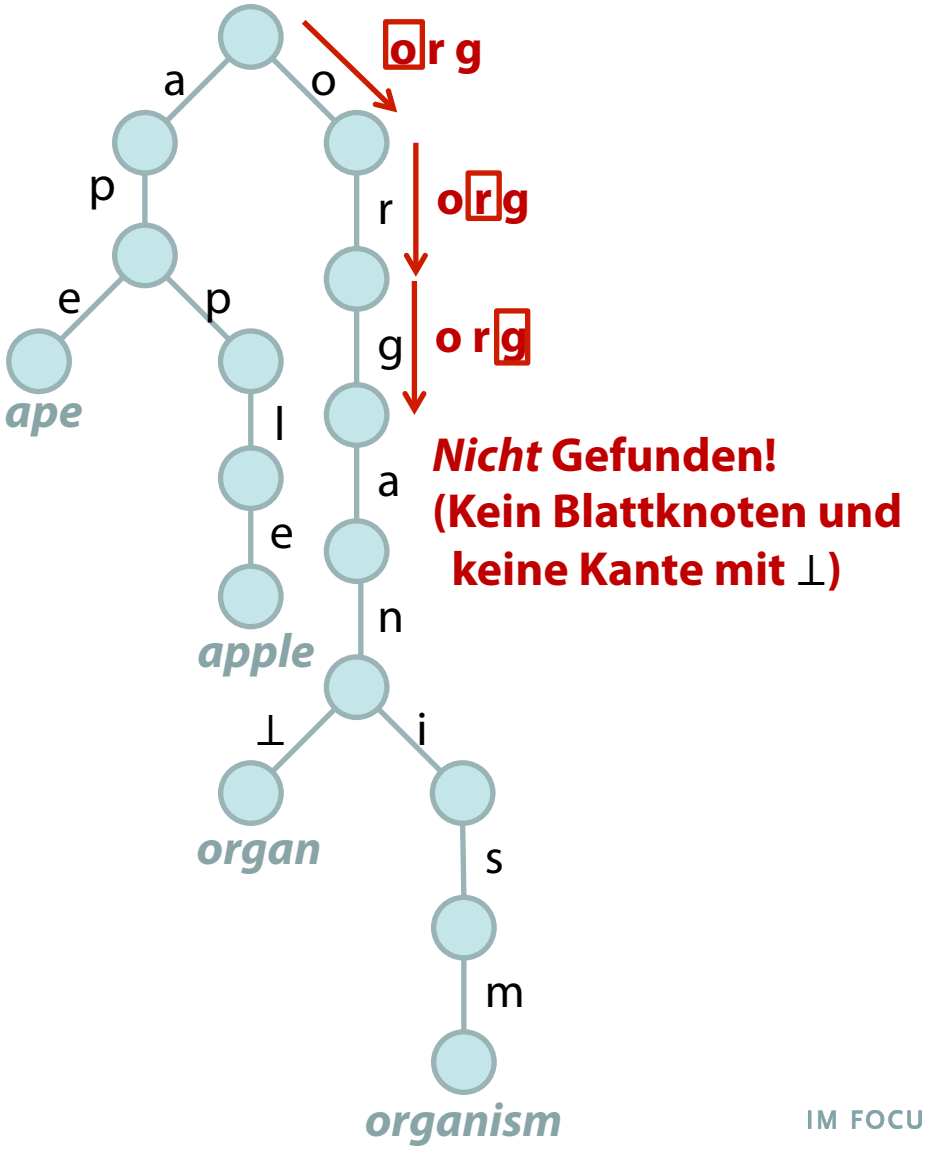
Beispiel: Suche nach **organ**



Beispiel: Suche nach **apricot**



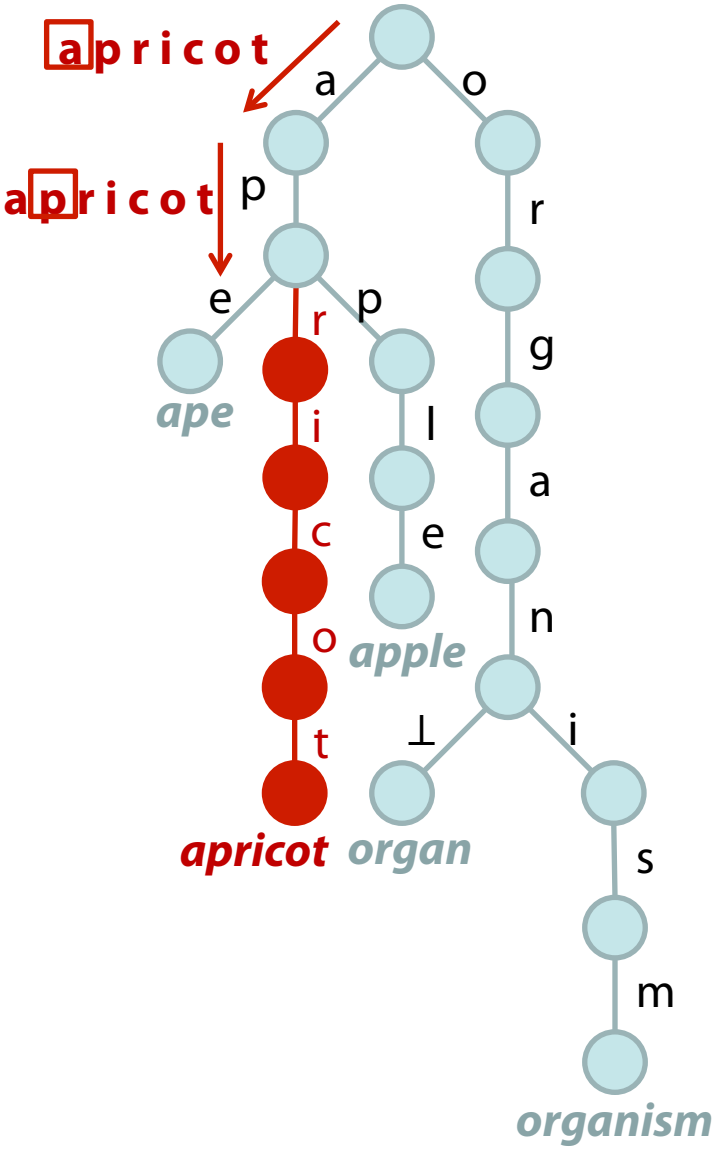
Beispiel: Suche nach **org**



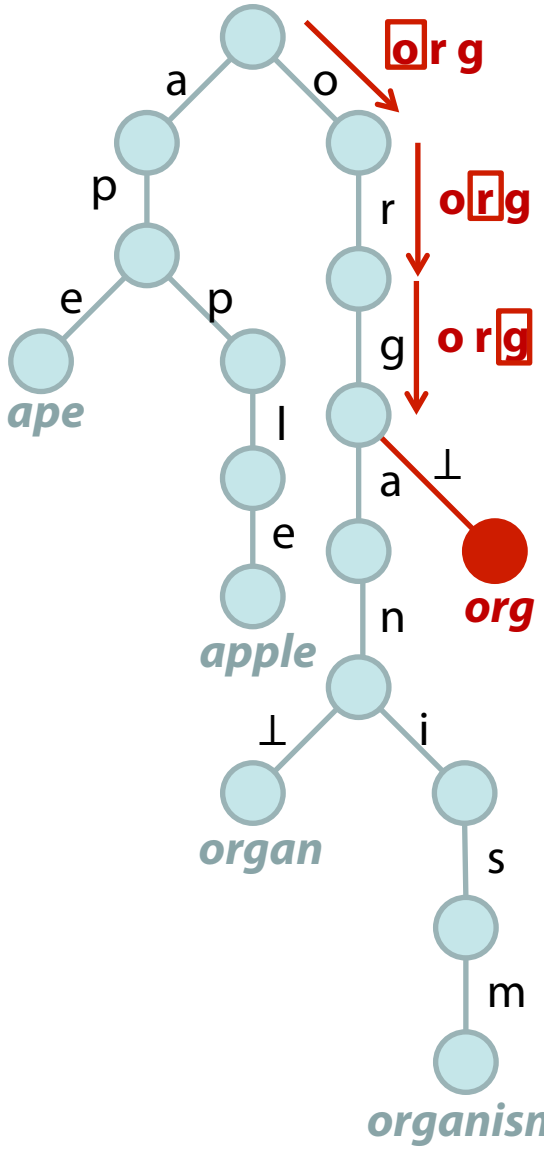
Einfügen in Tries

- Vereinfacht:
  - „Nach einzufügendem Wort suchen und das ergänzen, was fehlt“
- Sonderfälle
  - Füge zusätzlich ein Blattknoten über eine Kante mit Beschriftung $\perp$ zu einem Knoten v hinzu, falls
    - die Suche bei einem inneren Knoten v fertig ist
    - v ein Blattknoten ist und eine neue Kante ausgehend von v hinzugefügt werden muss

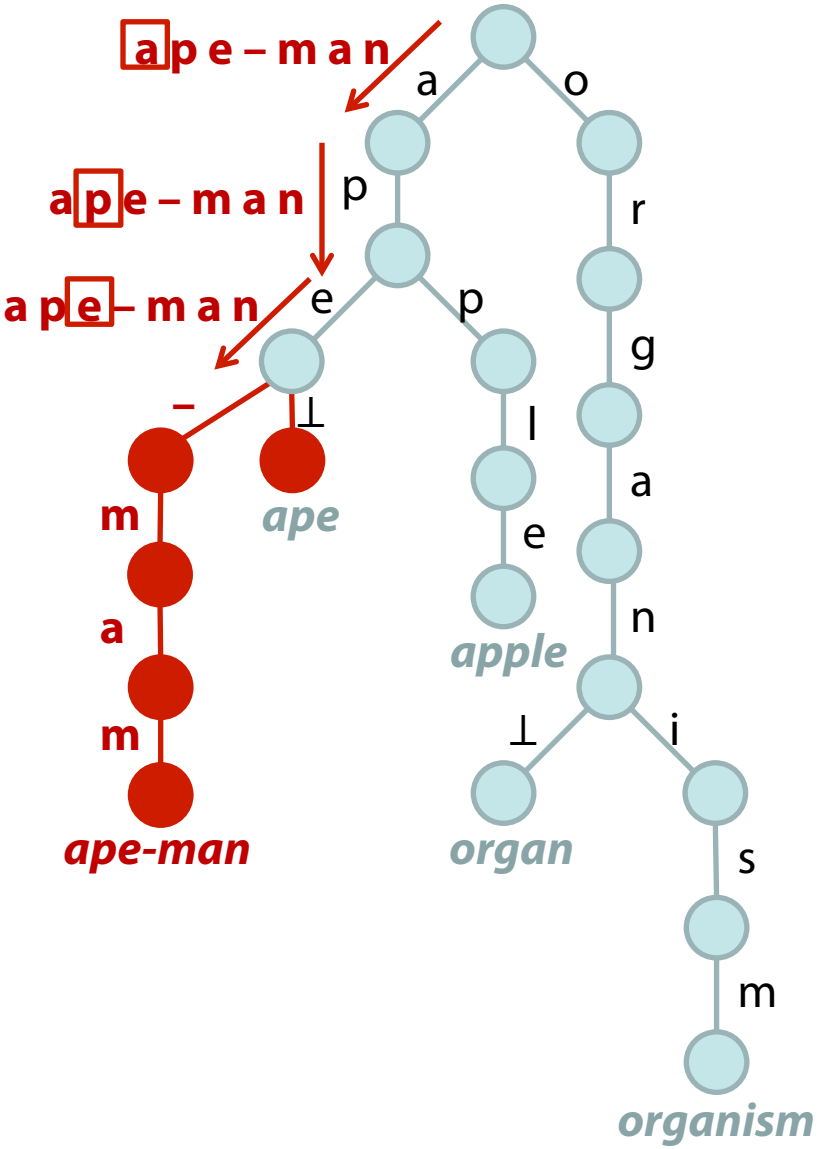
Beispiel: Einfügen von **apricot**



Beispiel: Einfügen von **org**



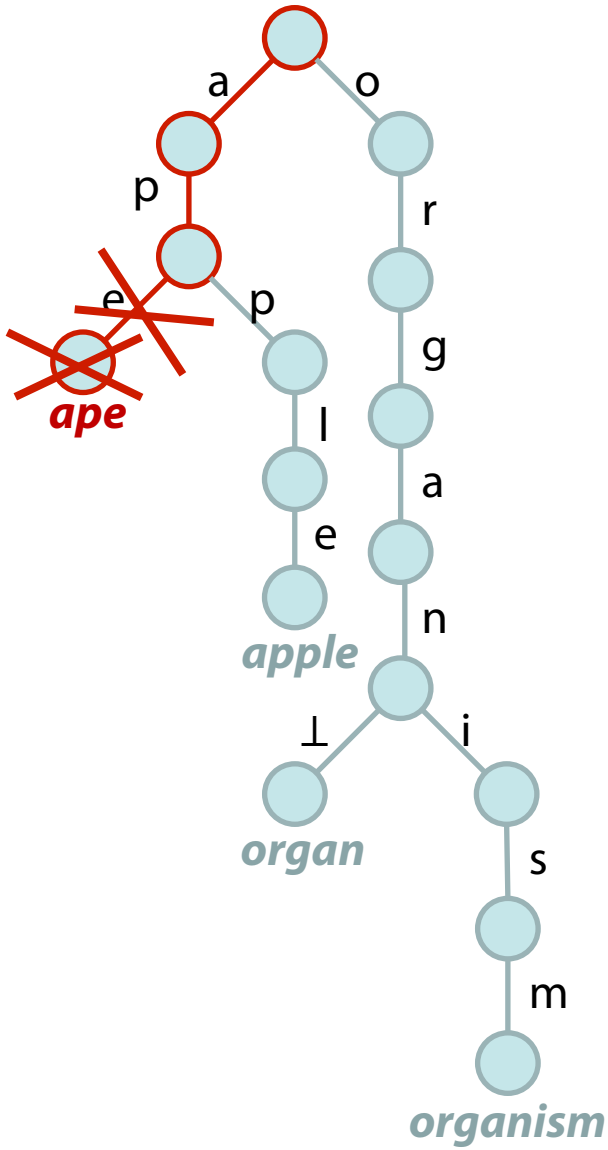
Beispiel: Einfügen von **ape-man**



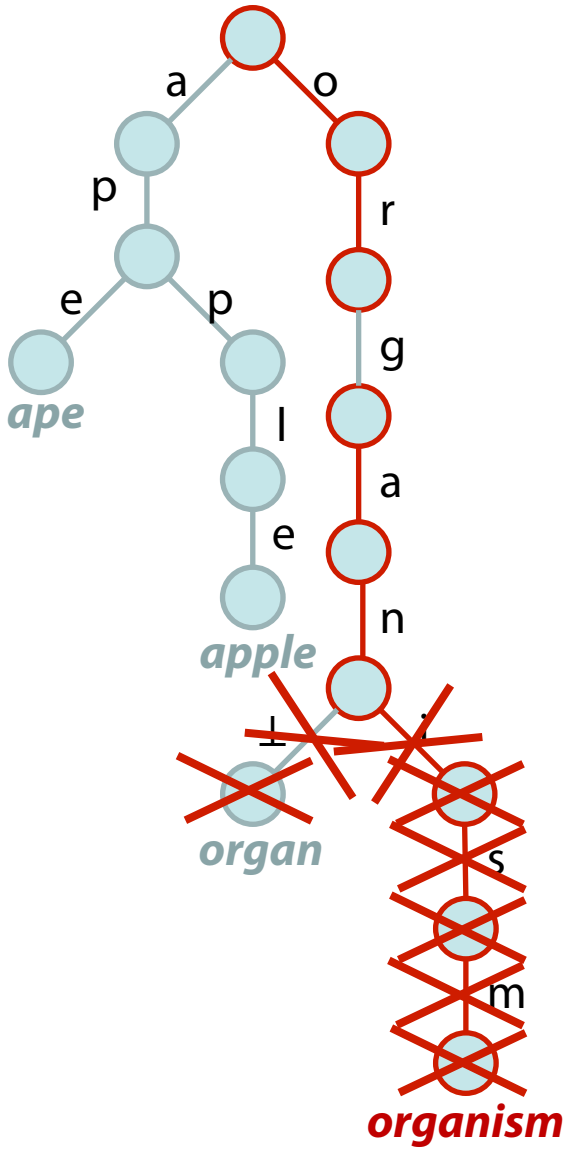
Löschen in Tries

- Zuerst erfolgt eine Suche nach dem zu löschenden Wort
- Beginnend mit dem Blattknoten, der das zu löschende Wort repräsentiert, wird solange der aktuelle Knoten und die Kante zu seinem Elternknoten gelöscht, bis mehr als ein Kindsknoten im Elternknoten vorhanden ist
  - Anschließender Sonderfall:
    - Bei nur einem Kindsknoten, welches über eine $\perp$-Kante verbunden ist, wird dieser ebenfalls gelöscht

Löschen von ***ape***

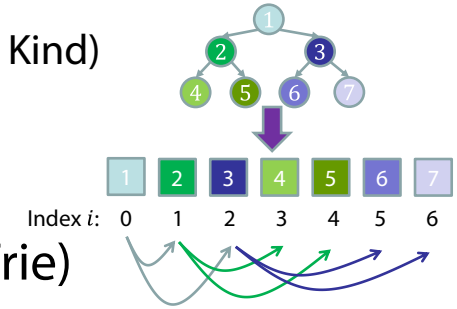


Löschen von ***organism***



Implementationsmöglichkeiten

I. Speicherung in einem Feld (ähnlich zu vollständigen Binärbäumen, jedoch als $|\Sigma|$-ärer Baum, Kantenbeschriftung als Knotenwert)
   - Vorteile
     - Direkte Adressierung der Kante mit gegebener Beschriftung (Falls Zeichen k-tes Zeichen im Alphabet ist, so betrachte k-tes Kind)
       - Damit O(1) pro Knoten für Suche, Einfügen bzw. Löschen
   - Nachteil
     - Großer Platzverbrauch $O(|\Sigma|^t)$ mit t Tiefe des Tries



II. Speicherung als Zeigerstruktur (n sei Knotenanzahl im Trie)
   a) Kinder in Liste
      - **Vorteile:** Geringer Platzbedarf O(n); Einfügen und Entfernen in O(1) pro Knoten
      - **Nachteil:** Suchen in $O(|\Sigma|)$ pro Knoten
   b) Kinder in Feld mit Größe der Kinderanzahl
      - Suchen in $O(\log |\Sigma|)$ pro Knoten (binäre Suche unter den Kindern)
      - **Vorteil:** Geringster Platzbedarf O(n)
      - **Nachteile:** Einfügen und Entfernen in $O(|\Sigma|)$ pro Knoten
   c) Kinder in Feld mit Größe $|\Sigma|$
      - **Vorteile:** Suchen, Einfügen und Entfernen in O(1) pro Knoten
      - **Nachteil:** Platzbedarf von $O(n \cdot |\Sigma|)$

Komplexität der Basisoperationen (Suchen, Einfügen, Löschen)

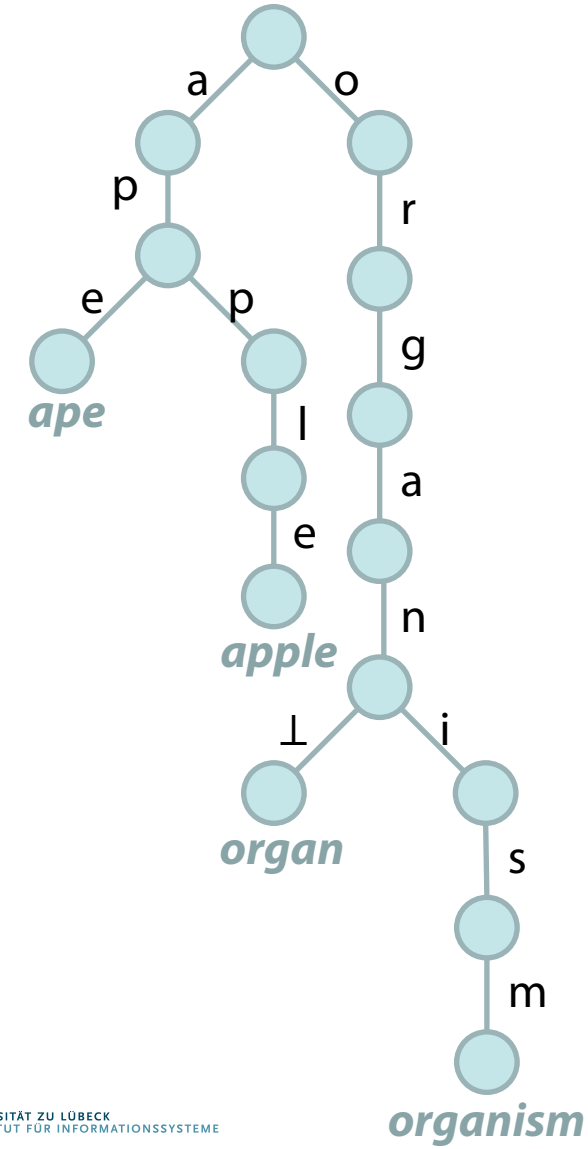
- Alle Basisoperationen hängen ab
  - von der Tiefe t des Tries
    - t ist gleich der (maximalen) Länge der eingefügten Wörter
  - sowie der Kosten f($|\Sigma|$) pro Knoten für diese Operation
    - Abhängig von Speicherstruktur des Tries, siehe vorherige Folie O(t·f($|\Sigma|$))
- Bei geeigneter Implementation oder kleinem $|\Sigma|$: O(t)

Patricia Tries

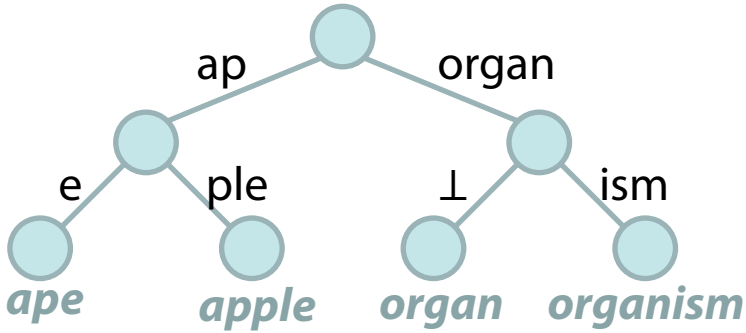
- In Tries haben viele Knoten nur 1 Kind und es bilden sich oft lange “Ketten” mit solchen Knoten
- **Idee:** Diese lange “Ketten” zusammenfassen
  - **Konsequenz:** Kanten sind nicht nur mit einem Zeichen, sondern mit Teilwörtern beschriftet

Donald R. Morrison, PATRICIA - Practical Algorithm to Retrieve Information Coded in Alphanumeric, *Journal of the ACM*, 15(4):514-534, October **1968**

Trie:



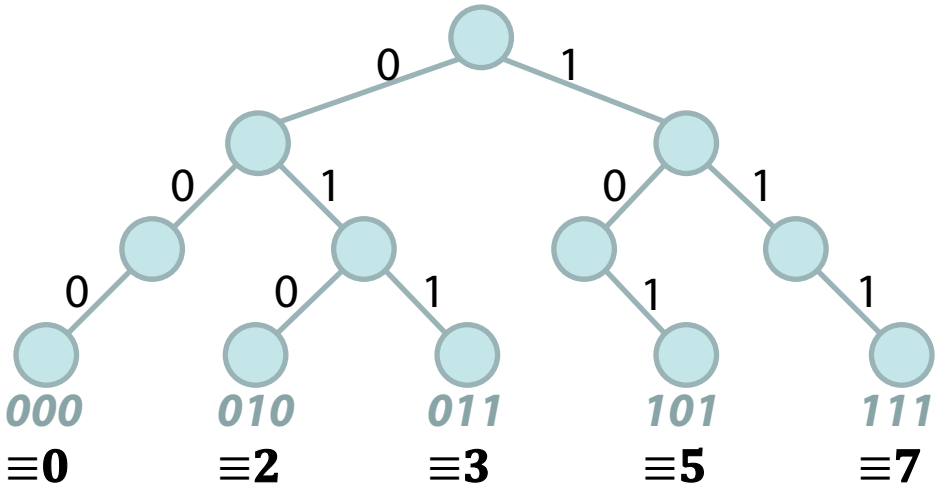
Patricia Trie:



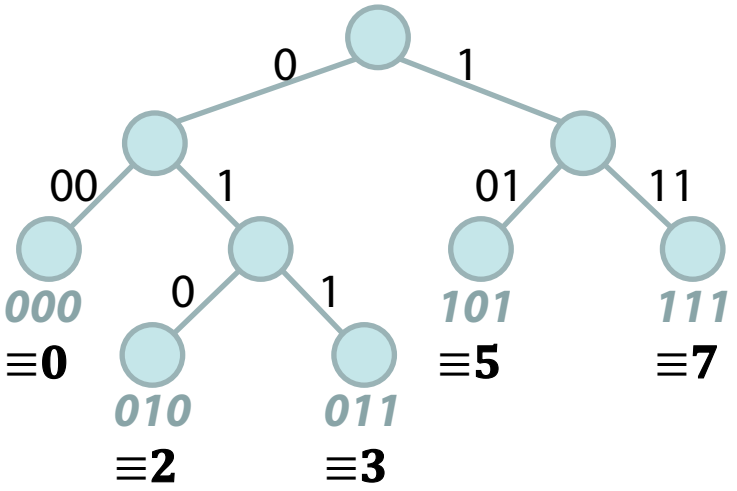
Bedingungen:

- Ausgehende Kanten eines Knotens starten *niemals* mit demselben Zeichen!
- Knoten haben 0 oder 2 bis $|\Sigma|$ viele Kinder, *niemals* haben Knoten 1 Kind!

Trie (binär):



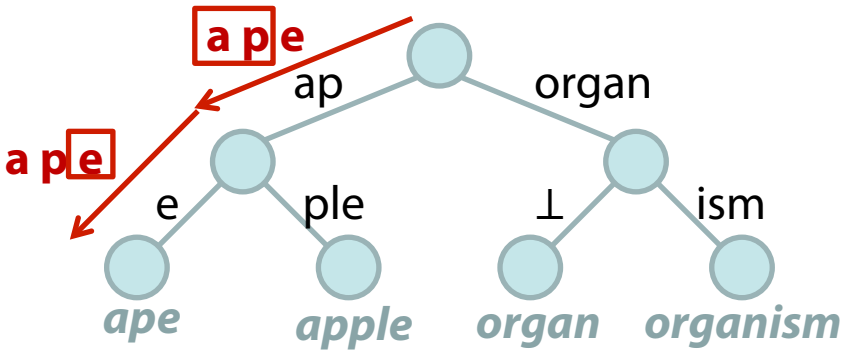
Patricia Trie:



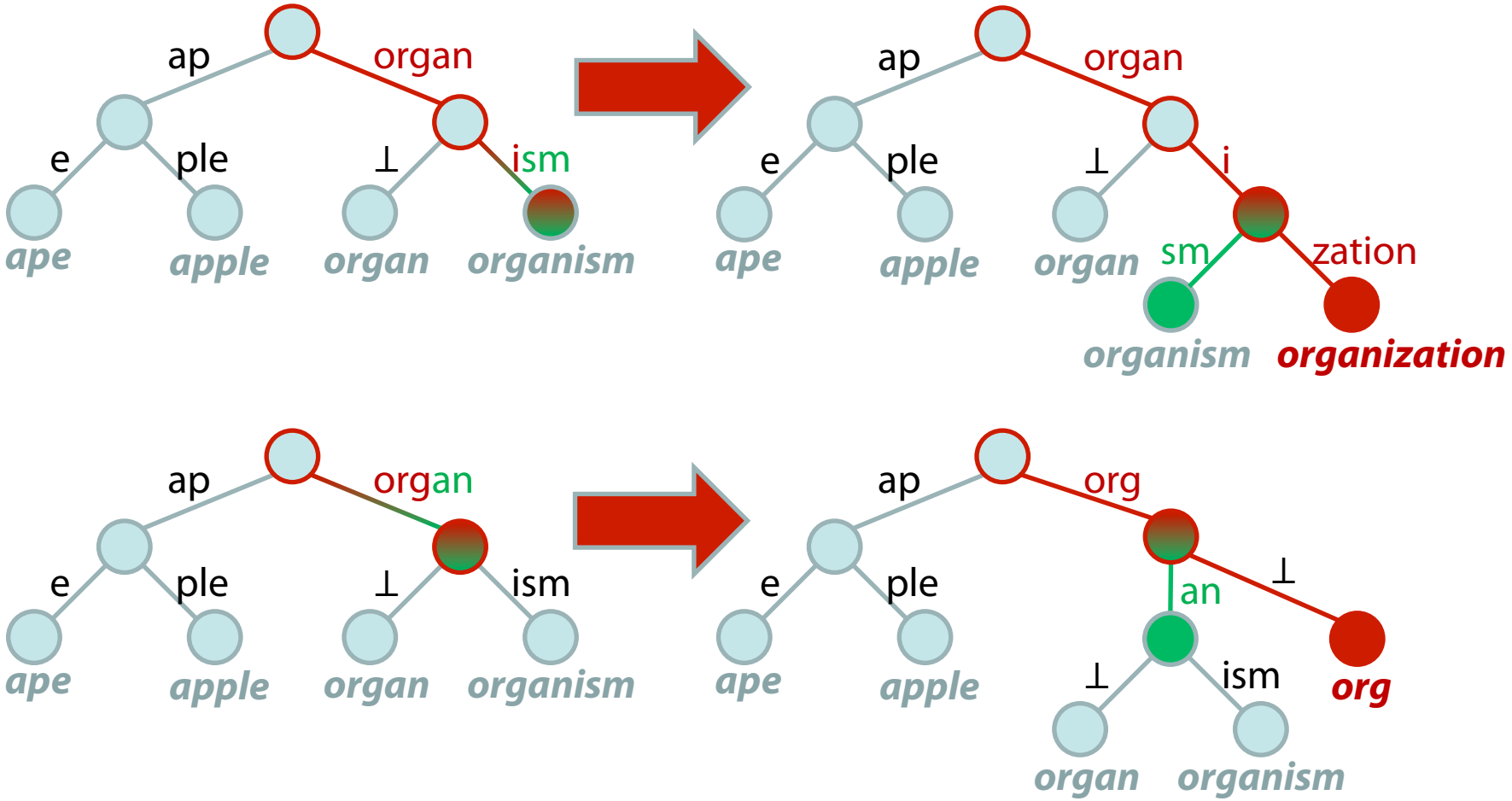
Konsequenzen für die Basisoperationen

- Suchen
  - Anstatt Vergleich von Zeichen nun Vergleich von Teilzeichenketten, sonst keine wesentliche Änderung gegenüber Suchen in Tries
- Einfügen
  - **Neuer Sonderfall:** Aufteilen eines Knotens, „falls Bezeichner der eingehenden Kante (echte) Teilzeichenkette des einzufügenden Wortes ist“
- Löschen
  - **Neuer Sonderfall:** Nach Löschen überprüfen, ob Knoten vereinigt werden können

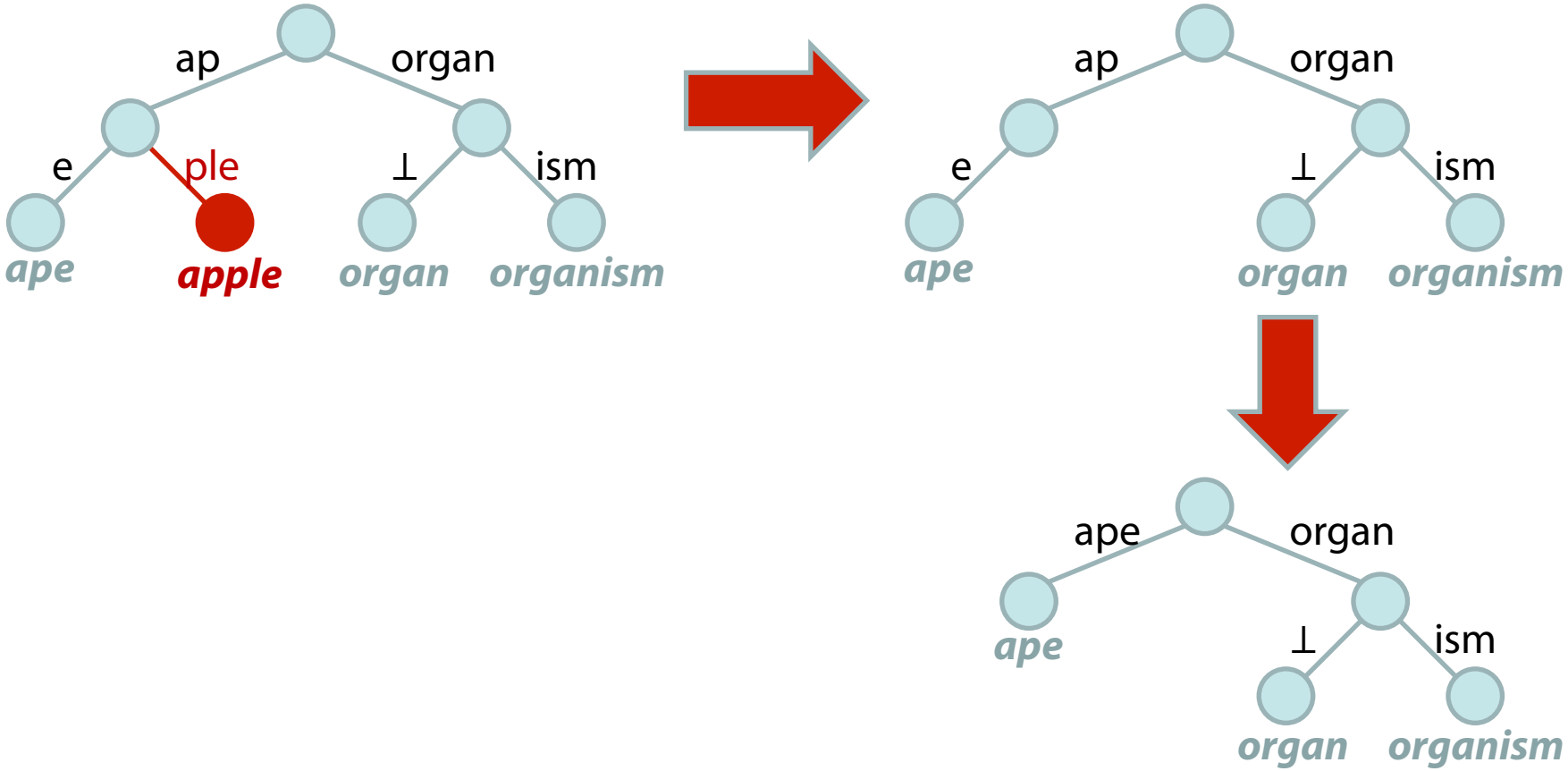
Beispiel Suchen nach ***ape***



Sonderfall beim Einfügen von ***organization*** bzw. ***org***



Beispiel für neuen Sonderfall beim Löschen von ***apple***



Komplexität

- Ergebnisse für Basisoperationen korrelieren asymptotisch mit denen der Tries
  - D.h. bei geeigneter Implementierung $O(t)$ mit t Tiefe des Patricia Tries, welches mit der maximalen Länge der eingefügten Wörter korreliert
- Da Patricia Tries i.d.R. weniger Knoten haben, sind in der Praxis
  - Patricia Tries *schneller* und
  - haben *geringeren Speicherplatzverbrauch*

Zusammenfassung

- Trie
  - n-äres Alphabet
    - Speichern von Zeichenketten
  - binäres Alphabet
    - Speichern von z.B. Zahlen
- Patricia Trie
  - kompaktere Darstellung
  - n-äres Alphabet
  - binäres Alphabet