
Algorithmen und Datenstrukturen

Prof. Dr. Ralf Möller

Universität zu Lübeck

Institut für Informationssysteme

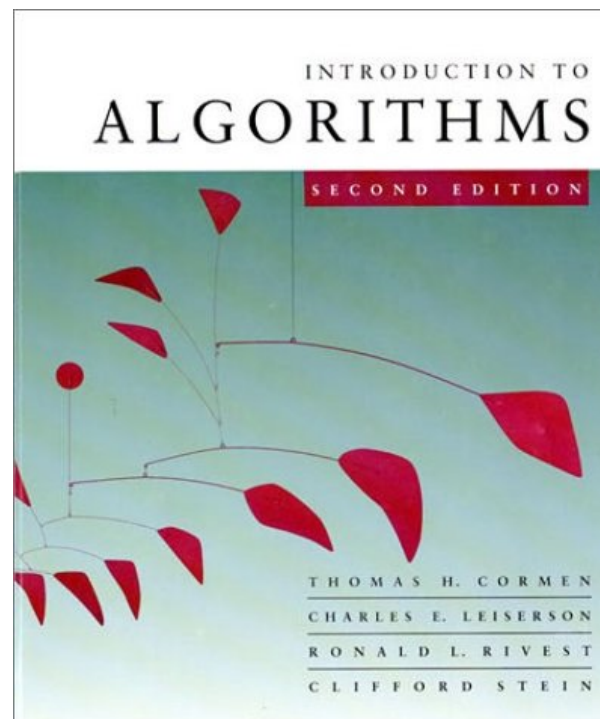
Stefan Werner (Übungen)

sowie viele Tutoren



Danksagung

- Animationen wurden übernommen aus dem Kurs: CS 3343 Analysis of Algorithms von Jianhua Ruan
- Inhalte sind angelehnt an



Algorithmen-Entwurfsmuster

Beispielproblemklasse: Optimierungsprobleme

- Beladungsprobleme
- Anordnungsprobleme
- Planungsprobleme

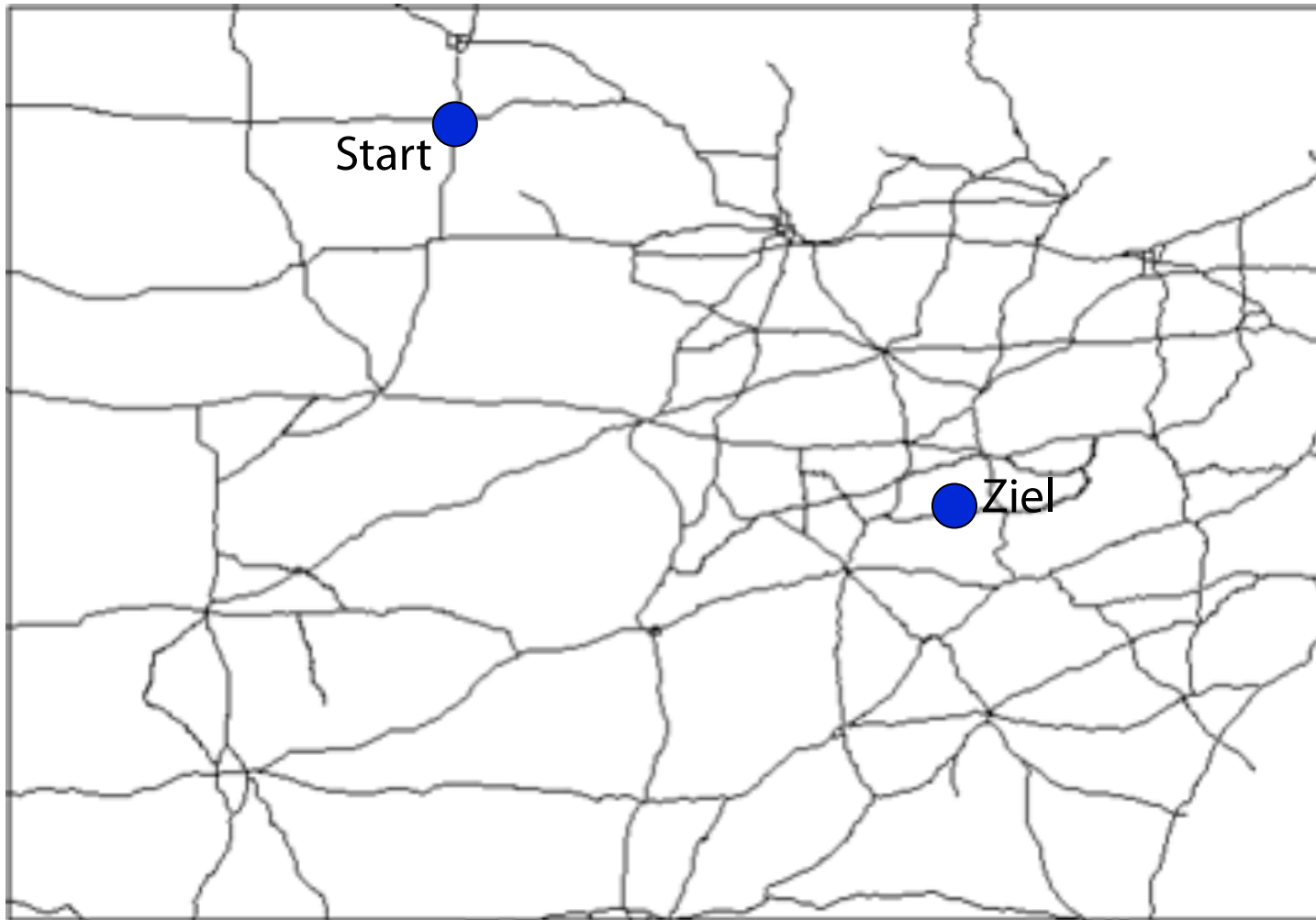
Naiver Ansatz (Brute-Force) ist fast immer kombinatorisch oder die optimale Lösung wird nicht gefunden (Unvollständigkeit)

Entwurfsziel: Vermeidung von Kombinatorik unter Beibehaltung der Vollständigkeit

Überblick

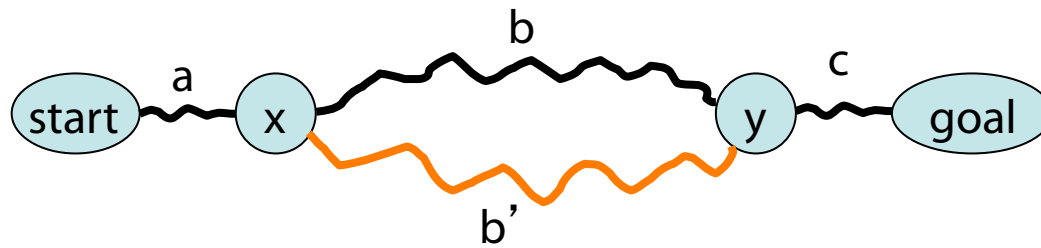
- **Dynamische Programmierung**
 - Name historisch begründet (sollte gut klingen, kein Bezug zum heutigen Begriff der Programmierung)
 - **Bellmans Optimalitätsprinzip**
 - **Fragestellung:** Wie können Problemlösungen aus Lösungen für Teilprobleme hergeleitet werden, so dass Vollständigkeit erreicht wird
- **Gierige Algorithmen (Greedy Algorithms)**
 - Verfolgung nur des augenscheinlich aktuell günstigsten Wegs zum Ziel
 - **Fragestellung:**
Wann sind gierige Algorithmen vollständig?

Kürzeste Wege als Optimierungsproblem betrachtet



Bellmans Optimalitätsprinzip

Behauptung: Falls ein Weg $\text{start} \rightarrow \text{goal}$ optimal ist, muss jeder Teilweg $x \rightarrow y$, der auf dem optimalen Pfad liegt, optimal sein



$a + b + c$ ist kürzester Weg

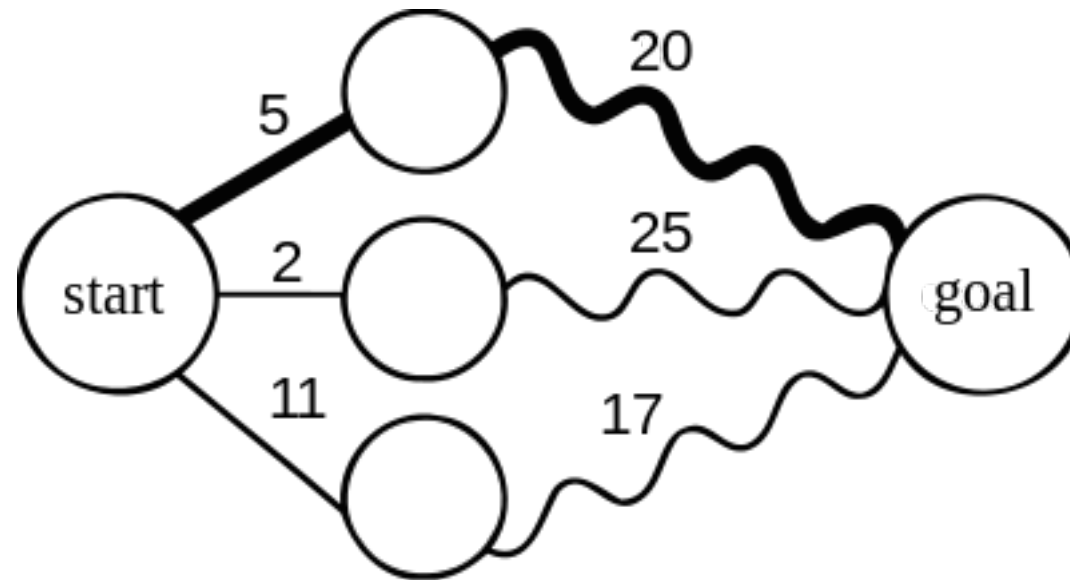
$b' < b$

$a + b' + c < a + b + c$

Beweis durch Widerspruch:

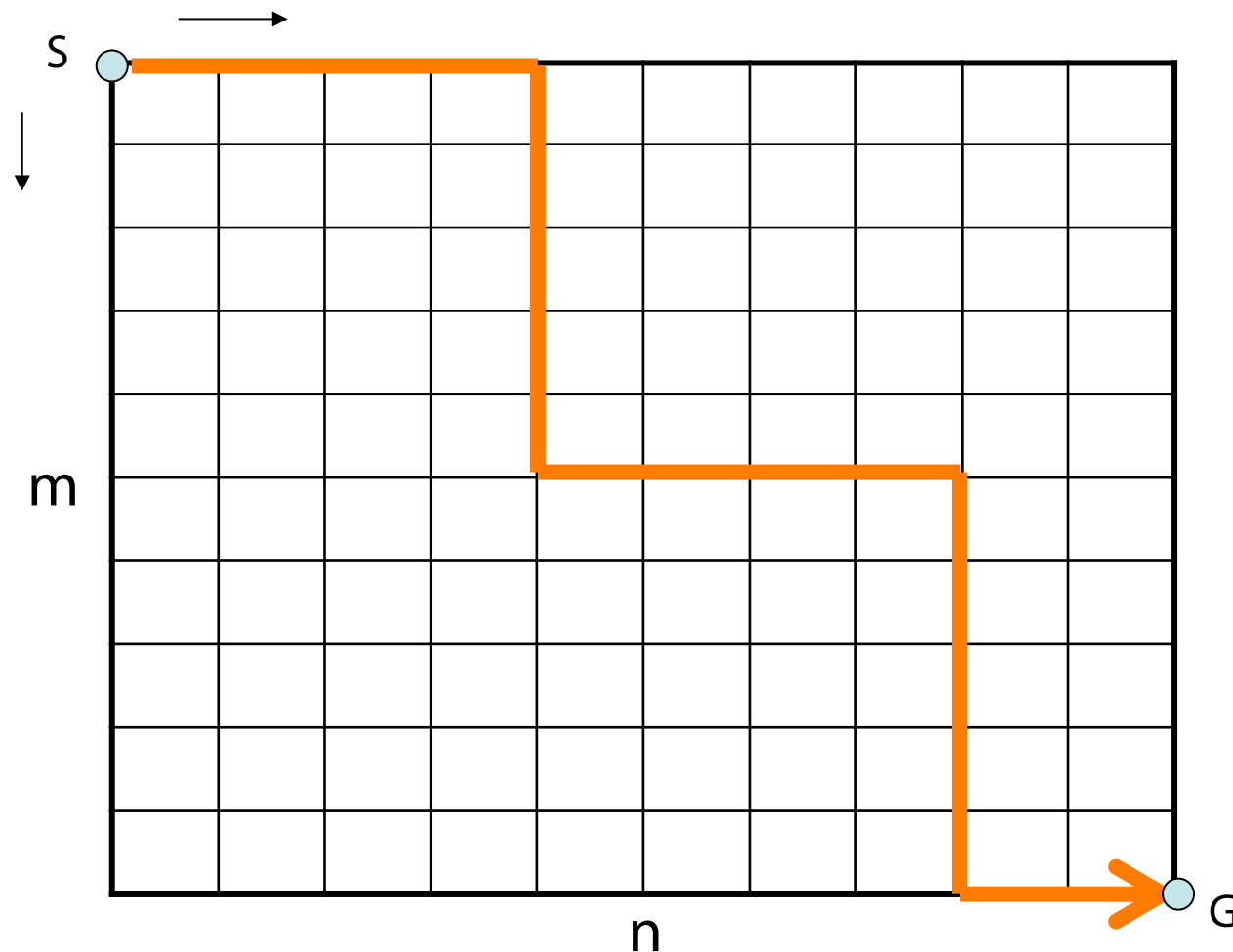
- Falls Teilweg b zwischen x und y nicht kürzester Weg, können wir ihn durch kürzeren Weg b' ersetzen
- Dadurch wird der Gesamtweg kürzer und der betrachtete Weg $\text{start} \rightarrow \text{goal}$ ist nicht optimal: Widerspruch
- Also muss b der kürzeste Weg von x nach y sein

Problem des kürzesten Pfads



$$SP(\text{start}, \text{goal}) = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{dist}(\text{start}, A) + SP(A, \text{goal}) \\ \text{dist}(\text{start}, B) + SP(B, \text{goal}) \\ \text{dist}(\text{start}, C) + SP(C, \text{goal}) \end{array} \right.$$

Ein spezielles Szenario für den kürzesten Pfad

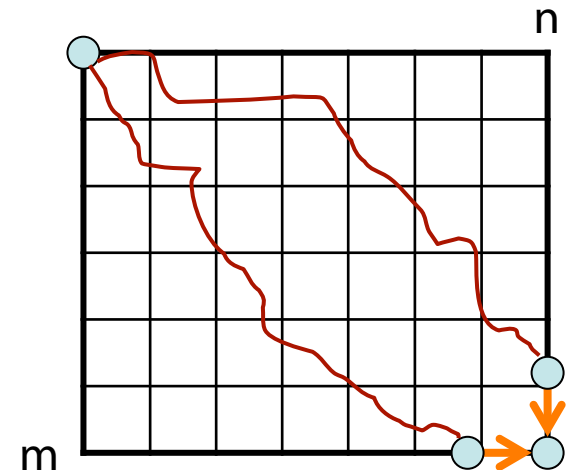


Jeder Kante sind (verschiedene) Kosten zugeordnet. Schritte nur nach rechts oder nach unten möglich. Ziel: Kürzester Weg von S nach G.

Betrachtung eines Lösungsansatzes

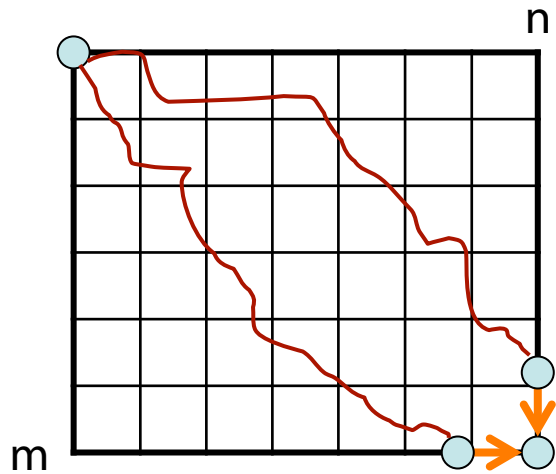
Annahme: Kürzester Pfad gefunden

- Folgende Kanten kommen vor
 - $(m, n-1)$ nach (m, n) Fall 1
 - $(m-1, n)$ nach (m, n) Fall 2
- Fall 1:
 - Suche kürzesten Pfad von $(0, 0)$ nach $(m, n-1)$
 - $SP(0, 0, m, n-1) + \text{dist}(m, n-1, m, n)$ ist die kürzeste Pfadlänge
- Fall 2:
 - Suche kürzesten Pfad von $(0, 0)$ nach $(m-1, n)$
 - $SP(0, 0, m-1, n) + \text{dist}(m-1, n, m, n)$ ist die kürzeste Pfadlänge
- Wir wissen nicht, welcher Fall eintreten wird
 - Falls wir die zwei Pfade haben, können wir aber vergleichen
 - Dann lässt sich der kürzeste Pfad leicht bestimmen



Rekursiver Lösungsansatz

Sei $F(i, j) = SP(0, 0, i, j)$. $\Rightarrow F(m, n)$ die Länge von SP von $(0, 0)$ nach (m, n)



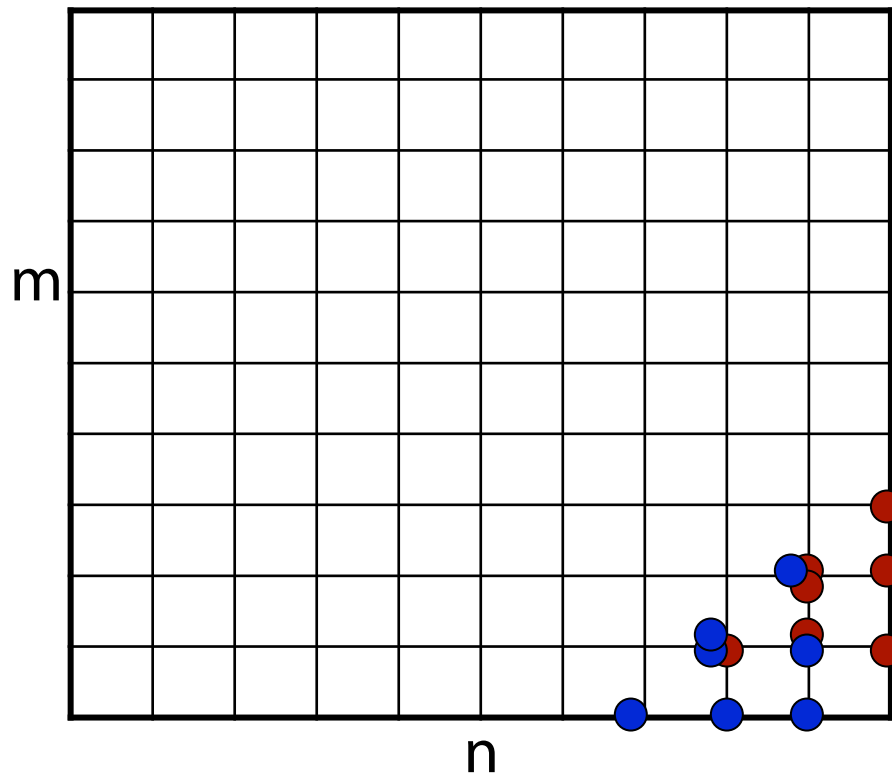
$$F(m, n) = \min \begin{cases} F(m-1, n) + \text{dist}(m-1, n, m, n) \\ F(m, n-1) + \text{dist}(m, n-1, m, n) \end{cases}$$



Generalisierung

$$F(i, j) = \min \begin{cases} F(i-1, j) + \text{dist}(i-1, j, i, j) \\ F(i, j-1) + \text{dist}(i, j-1, i, j) \end{cases}$$

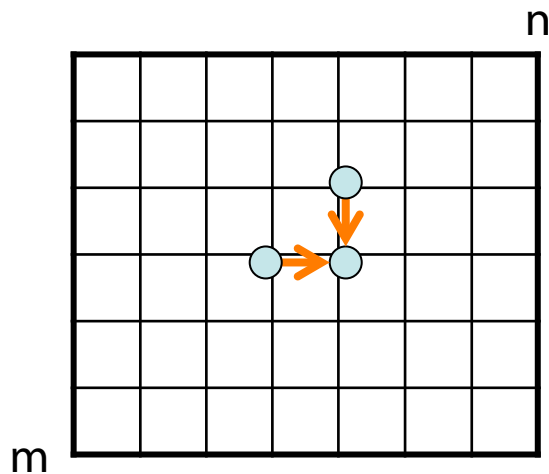
Vermeide Neuberechnungen



- Um den kürzesten Pfad von $(0, 0)$ nach (m, n) zu finden, benötigen wir die kürzesten Pfade nach $(m-1, n)$ und $(m, n-1)$
- Bei rekursivem Aufruf werden Lösungen immer wieder neu berechnet
- Strategie: Löse Teilprobleme in richtiger Reihenfolge, so dass redundante Berechnungen vermieden werden

Prinzip der Dynamischen Programmierung

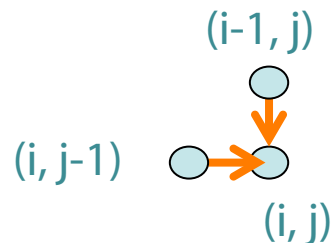
Sei $F(i, j) = SP(0, 0, i, j)$. $\Rightarrow F(m, n)$ die Länge von SP von $(0, 0)$ nach (m, n)



$$F(i, j) = \min \begin{cases} F(i-1, j) + \text{dist}(i-1, j, i, j) \\ F(i, j-1) + \text{dist}(i, j-1, i, j) \end{cases}$$

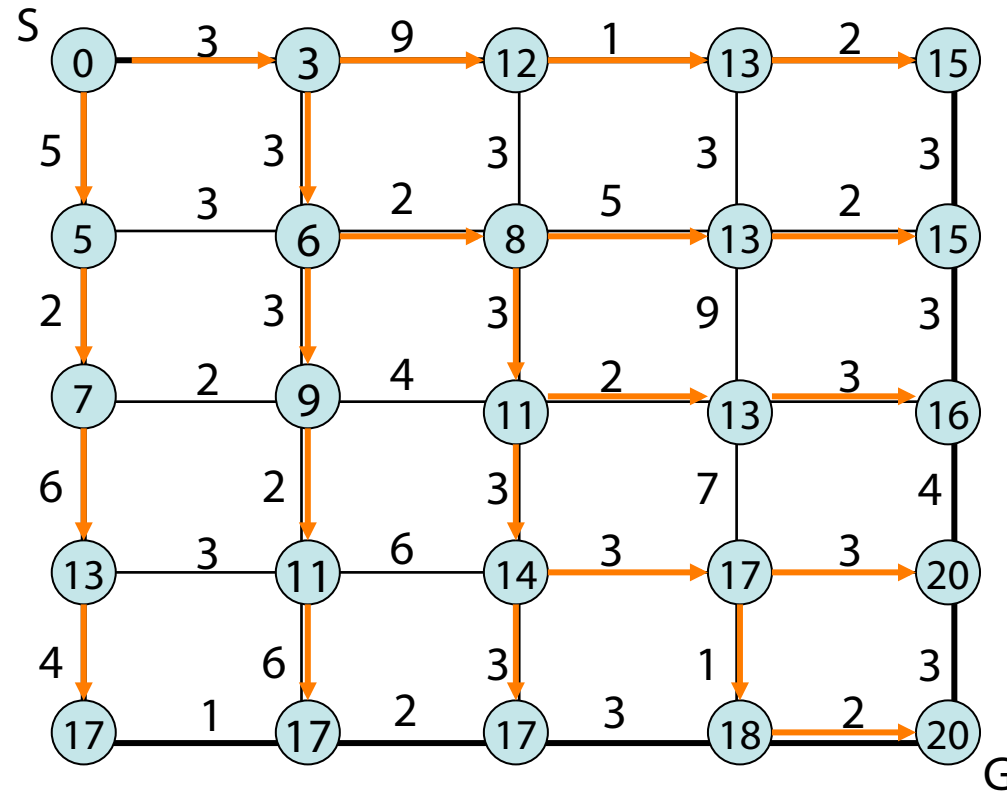
Grenzfall: $i = 0$ oder $j = 0$
Leicht zu identifizieren

$i = 1 .. m, j = 1 .. n$
Anzahl der Unterprobleme: $m \cdot n$



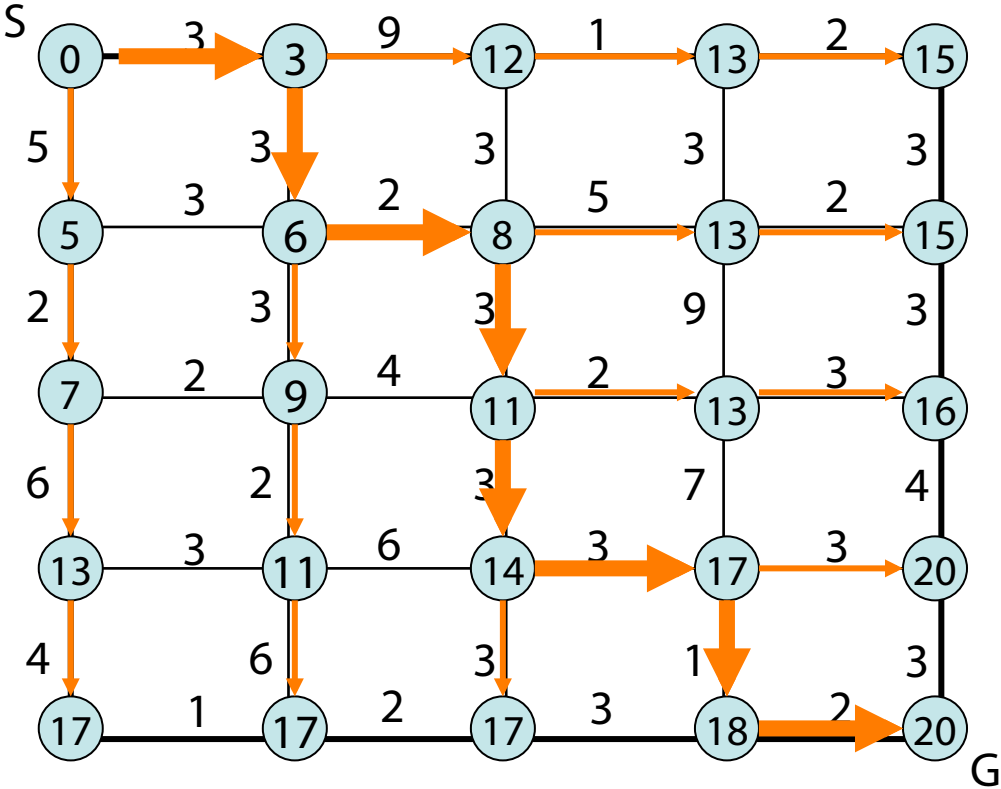
Datenabhängigkeit definiert
Anordnung der Teilprobleme;
hier von links nach rechts,
von oben nach unten

Dynamische Programmierung: Illustration



$$F(i, j) = \min \begin{cases} F(i-1, j) + \text{dist}(i-1, j, i, j) \\ F(i, j-1) + \text{dist}(i, j-1, i, j) \end{cases}$$

Rückverfolgung zur Bestimmung der Lösung



Kürzester Pfad hat die Länge 20

Elemente der Dynamischen Programmierung

- Optimale Unterstrukturen
 - Optimale Lösungen des ursprünglichen Problems enthält optimale Lösungen von Teilproblemen
- Überlappung von Teilproblemen
 - Einige Teilprobleme kommen in vielen Lösungen vor
 - Formulierung von Lösungen als Rekurrenz auf Teillösungen
- Speicherung und Wiederverwendung
 - Wähle Ordnung der Teilprobleme sorgfältig aus, so dass jedes Teilproblem eines höheren Problems vorher gelöst wurde und die Lösung wiederverwendet werden kann
 - Verwende ggf. Caching

Überblick über betrachtete Probleme

- Sequenzausrichtungsprobleme (mehrere Varianten)
 - Vergleich zweier Zeichenketten auf Ähnlichkeit
 - Definition von Ähnlichkeit nötig
 - Nützlich in vielen Anwendungen
 - Vergleich von DNA-Sequenzen, Aufsätzen, Quellcode
 - Beispielproblem: Longest-Common-Subsequence (LCS)
- Anordnungsprobleme
- Planungsprobleme (Scheduling)
- Rucksackproblem (mehrere Varianten)

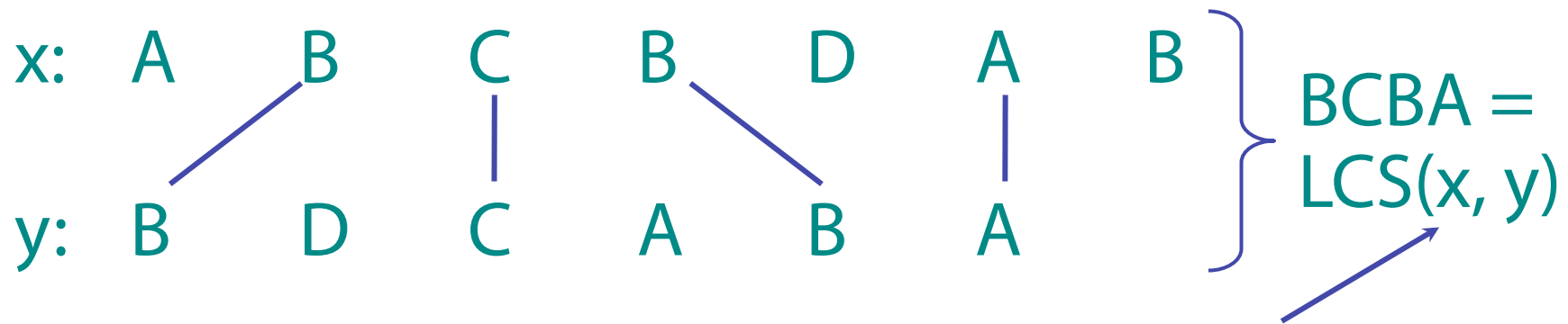
Gemeinsame Teilsequenz (Common Subsequence)

- **Teilsequenz** einer Zeichenkette: Zeichenkette mit 0 oder mehr ausgelassenen Zeichen
- **Gemeinsame Teilsequenz** von zwei Zeichenketten
 - Teilsequenz von beiden Zeichenketten
- **Beispiel:**
 - $x = \langle A B C B D A B \rangle, y = \langle B D C A B A \rangle$
 - $\langle B C \rangle$ und $\langle A A \rangle$ sind gemeinsame Teilsequenzen von x und y

Längste gemeinsame Teilsequenz

Gegeben seien zwei Sequenzen $x[1..m]$ und $y[1..n]$, bestimme eine längste gemeinsame Teilsequenz (longest common subsequence, LCS)

- NB: „eine“ längste, nicht die längste



Funktionale Notation
(aber keine Funktion)

Brute-Force-Algorithmus?

Prüfe jede Teilsequenz von $x[1..m]$ und prüfe, ob es sich auch um eine Teilsequenz von $y[1..n]$ handelt

Analyse:

- 2^m Teilsequenzen in x vorhanden (jeder Bitvektor der Länge m bestimmt unterschiedliche Teilsequenz)
- Dieser Algorithmus wäre in $\Theta(2^m)$, also exponentiell

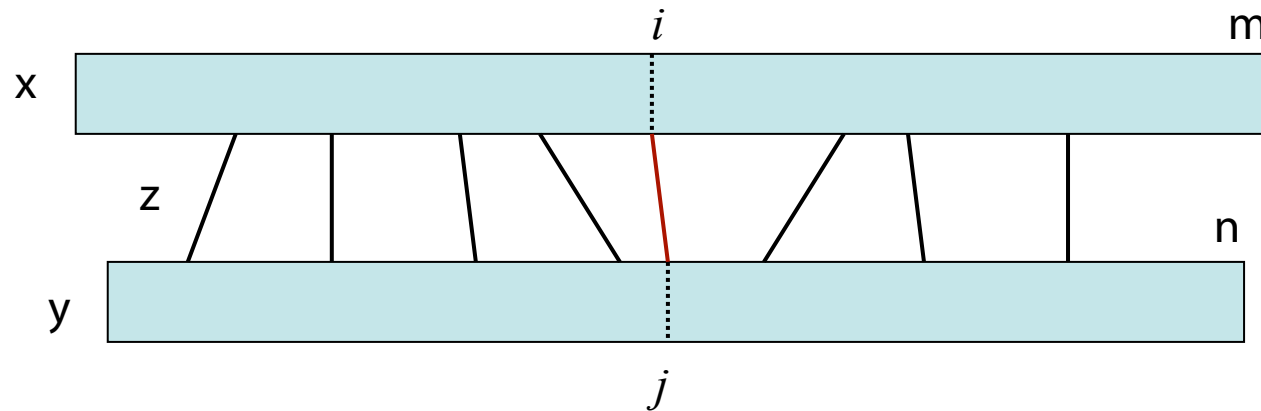
Auf dem Weg zu einer besseren Strategie:

- Ansatz der dynamischen Programmierung
 - Bestimme opt. Substruktur, überlappende Teilprobleme
- Zunächst: Bestimmung der Länge eines LCS, dann Bestimmung eines LCS



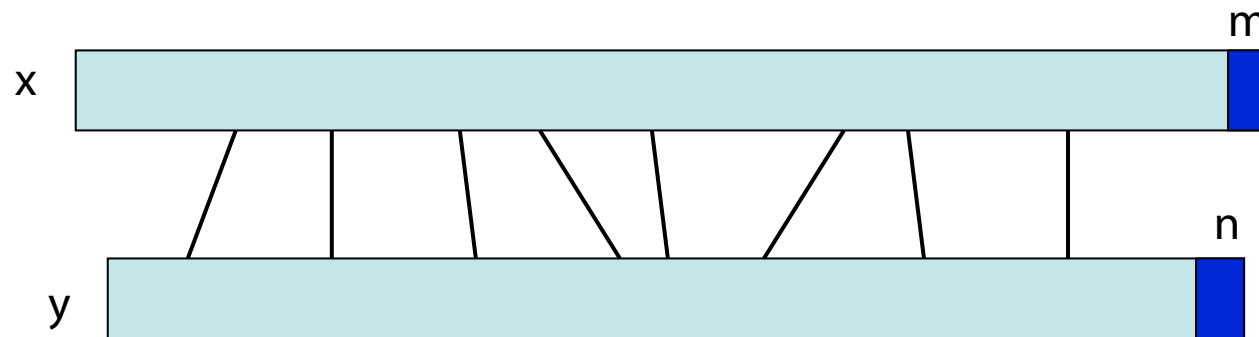
Optimale Substruktur

- Falls $z = \text{LCS}(x, y)$, dann gilt für jeden Präfix u : uz ist ein LCS von ux und uy



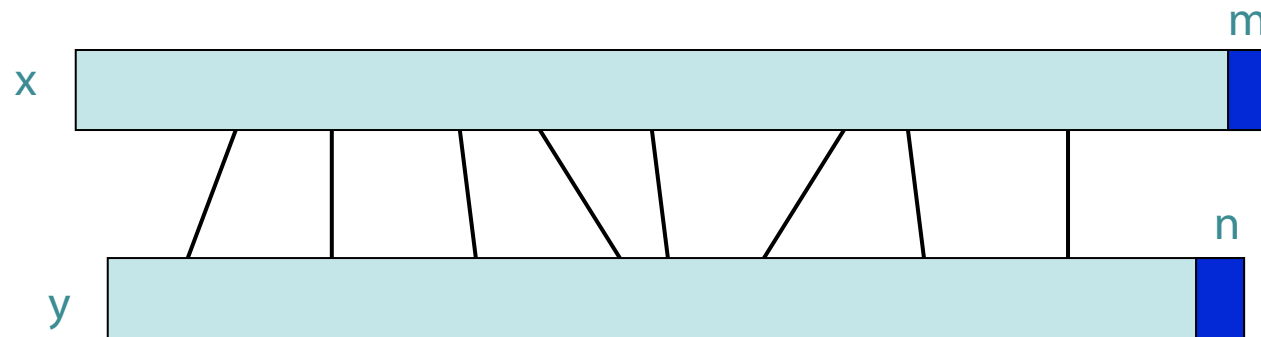
- Teilprobleme: Finde LCS von Präfixen von x und y

Rekursiver Ansatz



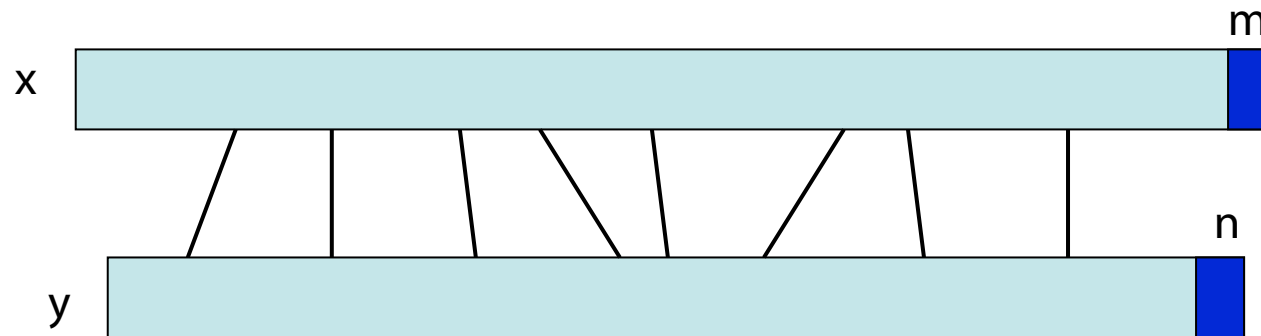
- Fall 1: $x[m]=y[n]$: Es gibt **einen** optimalen LCS in dem $x[m]$ mit $y[n]$ abgeglichen wird \longrightarrow Finde LCS ($x[1..m-1], y[1..n-1]$)
- Fall 2: $x[m]\neq y[n]$: Mindestens einer ist in LCS
 - Fall 2.1: $x[m]$ nicht in LCS \longrightarrow Finde LCS ($x[1..m-1], y[1..n]$)
 - Fall 2.2: $y[n]$ nicht in LCS \longrightarrow Finde LCS ($x[1..m], y[1..n-1]$)

Rekursiver Ansatz



- **Fall 1: $x[m]=y[n]$**
 - Reduziere beide Sequenzen um 1 Zeichen
 - $LCS(x, y) = LCS(x[1..m-1], y[1..n-1]) \parallel x[m]$
- **Fall 2: $x[m] \neq y[n]$**
 - $LCS(x, y) = LCS(x[1..m-1], y[1..n])$ oder $LCS(x[1..m], y[1..n-1])$, was immer länger ist
 - Konkatenierung
 - Reduziere eine der Sequenzen um 1 Zeichen

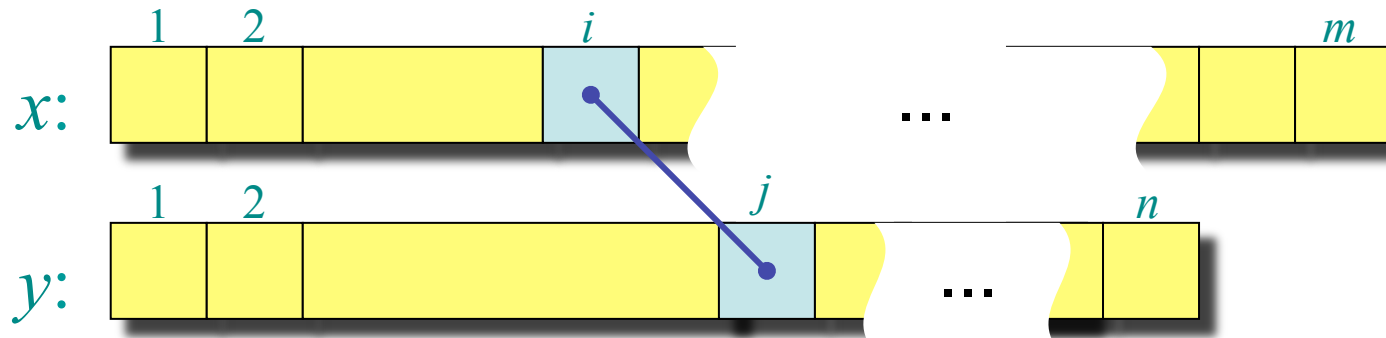
Finden der Länge eines LCS



- Sei $c[i, j]$ die Länge von $LCS(x[1..i], y[1..j])$
dann ist $c[m, n]$ die Länge von $LCS(x, y)$
- Falls $x[m] = y[n]$ dann
 $c[m, n] = c[m-1, n-1] + 1$
- Falls $x[m] \neq y[n]$ dann
 $c[m, n] = \max(\{ c[m-1, n], c[m, n-1] \})$

Generalisierung: Rekursive Formulierung

$$c[i, j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{falls } x[i] = y[j], \\ \max\{c[i-1, j], c[i, j-1]\} & \text{sonst} \end{cases}$$



Rekursiver Algorithmus für LCS

Procedure $LCS(x, y, i, j)$:

if $x[i] = y[j]$

then $c[i, j] := LCS(x, y, i-1, j-1) + 1$

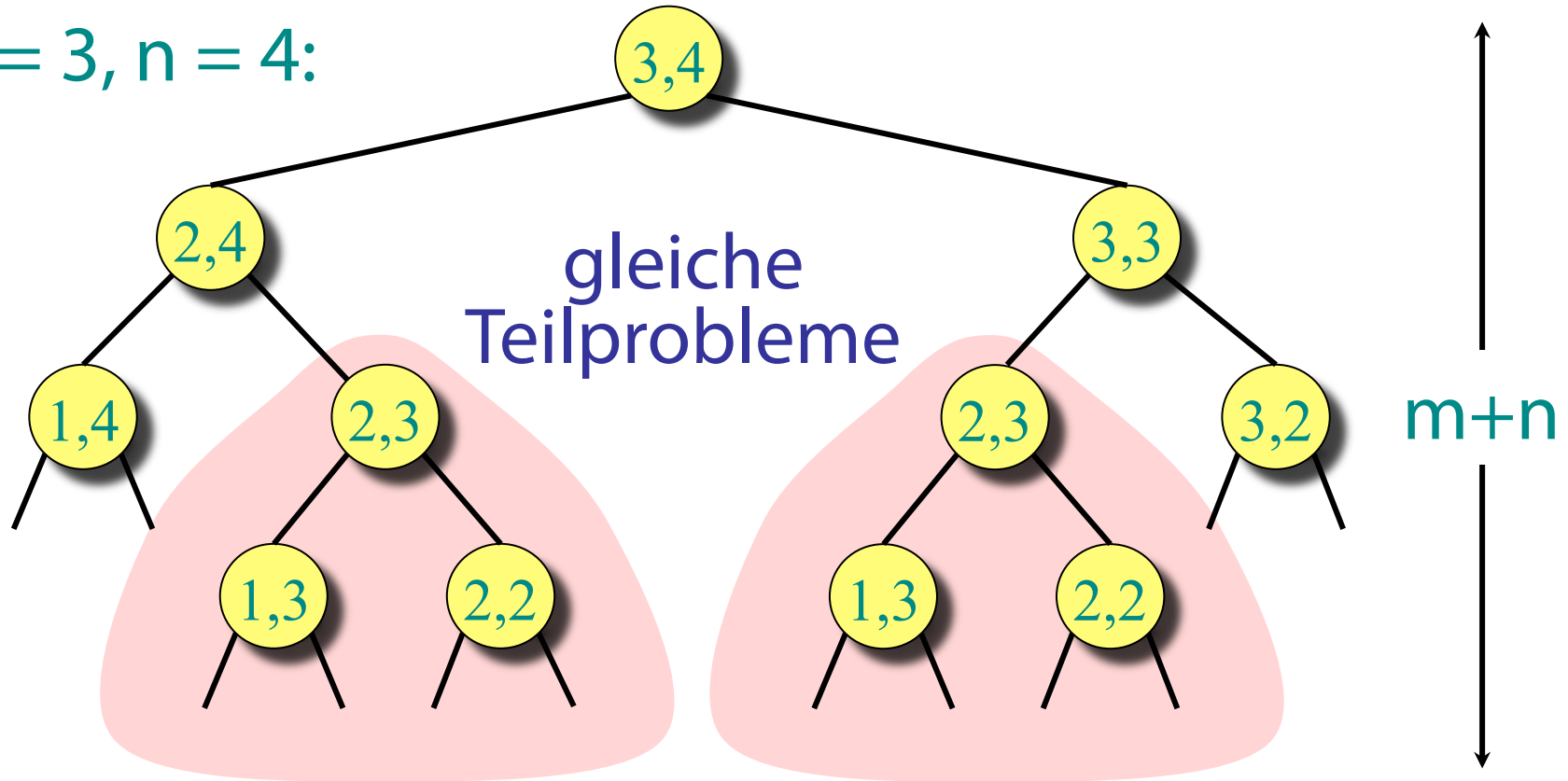
else $c[i, j] := \max(\{ LCS(x, y, i-1, j),$
 $LCS(x, y, i, j-1) \})$

Schlimmster Fall: $x[i] \neq y[j]$

dann zwei Subprobleme, jedes mit nur
einer Dekrementierung (um 1)

Rekursionsbaum

$m = 3, n = 4$:

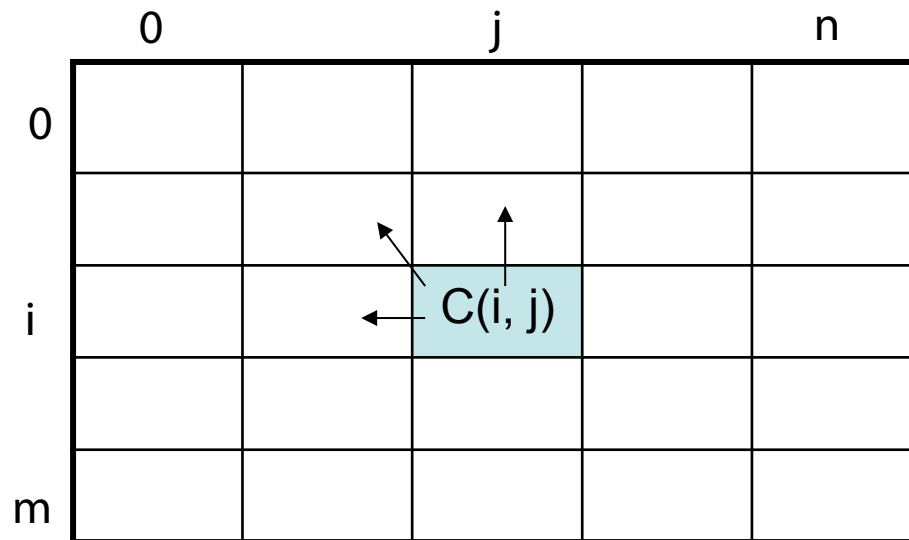


Höhe = $m + n$ \Rightarrow potentiell exponentieller Aufwand mit wiederholter Lösung gleicher Teilprobleme!

Dynamische Programmierung

- Finde richtige Anordnung der Teilprobleme
- Gesamtanzahl der Teilprobleme: $m \cdot n$

$$c[i, j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{falls } x[i] = y[j], \\ \max(\{c[i-1, j], c[i, j-1]\}) & \text{sonst.} \end{cases}$$



Algorithmus LCS

Function `LCS-length(X, Y)`:

`m := length(X); n := length(Y)`

`c: Array [m, n] of Integer`

for `i` from 1 to `m` do `c[i,0] := 0` // Sonderfall: `Y[0]`

for `j` from 1 to `n` do `c[0,j] := 0` // Sonderfall: `X[0]`

for `i` from 1 to `m` // für alle `X[i]`

for `j` from 1 to `n` // für alle `Y[j]`

if `X[i] = Y[j]` then

`c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1`

else `c[i,j] := max({ c[i-1,j], c[i,j-1] })`

return `c`

LCS Anwendungsbeispiel

- $X = \text{A B C B}$
- $Y = \text{B D C A B}$

Was ist der LCS von X und Y?

$\text{LCS}(X, Y) = \text{B C B}$

$X = \text{A } \mathbf{B} \quad \mathbf{C} \quad \mathbf{B}$

$Y = \quad \mathbf{B} \text{ D } \mathbf{C} \text{ A } \mathbf{B}$

LCS Beispiel (0)

ABCB
BDCAB

i	j	0	1	2	3	4	5
		Y[j]	B	D	C	A	B
0	X[i]						
1	A						
2	B						
3	C						
4	B						

$X = ABCB; m = |X| = 4$

$Y = BDCAB; n = |Y| = 5$

Alloziere Array $c[5,6]$



LCS Beispiel (1)

ABCB
BDCAB

		j					
		0	1	2	3	4	5
		Y[j]	B	D	C	A	B
i	X[i]						
0		0	0	0	0	0	0
1	A	0					
2	B	0					
3	C	0					
4	B	0					

for i from 1 to m $c[i,0] := 0$
 for j from 1 to n $c[0,j] := 0$

LCS Beispiel (2)

ABCB
BDCAB

		j					
		0	1	2	3	4	5
		Y[j]	B	D	C	A	B
i	0	X[i]	0	0	0	0	0
	1	A	0	0			
	2	B	0				
	3	C	0				
	4	B	0				

if $X_i = Y_j$ then
 $c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1$
 else $c[i,j] := \max(c[i-1,j], c[i,j-1])$

LCS Beispiel (3)

ABCB
BDCAB

	j	0	1	2	3	4	5
i	Y[j]		B	D	C	A	B
0	X[i]	0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0		
2	B	0					
3	C	0					
4	B	0					

if $X_i = Y_j$ then
 $c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1$
 else $c[i,j] := \max(c[i-1,j], c[i,j-1])$

LCS Beispiel (4)

ABCB
BDCAB

i	j	0	1	2	3	4	5
	Y[j]		B	D	C	A	B
0	X[i]	0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0	1	
2	B	0					
3	C	0					
4	B	0					

if $X_i = Y_j$ then
 $c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1$
 else $c[i,j] := \max(c[i-1,j], c[i,j-1])$

LCS Beispiel (5)

ABCB
BDCAB

i	j	0	1	2	3	4	5
		Y[j]	B	D	C	A	B
0	X[i]	0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0	1	1
2	B	0					
3	C	0					
4	B	0					

if $X_i = Y_j$ then
 $c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1$
 else $c[i,j] := \max(c[i-1,j], c[i,j-1])$

LCS Beispiel (6)

ABCB
BDCAB

		j					
		0	1	2	3	4	5
		Y[j]	B	D	C	A	B
i	X[i]						
0		0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0	1	1
2	B	0	1				
3	C	0					
4	B	0					

if $X_i = Y_j$ then
 $c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1$
 else $c[i,j] := \max(c[i-1,j], c[i,j-1])$

LCS Beispiel (7)

ABCB
BD CAB

i	j	0	1	2	3	4	5
	Y[j]		B	D	C	A	B
0	X[i]	0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0	1	1
2	B	0	1	1	1	1	
3	C	0					
4	B	0					

if $X_i = Y_j$ then
 $c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1$
 else $c[i,j] := \max(c[i-1,j], c[i,j-1])$

LCS Beispiel (8)

ABCB
BDCAB

i	j	0	1	2	3	4	5
		Y[j]	B	D	C	A	B
0	X[i]	0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0	1	1
2	B	0	1	1	1	1	2
3	C	0					
4	B	0					

if $X_i = Y_j$ then
 $c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1$
 else $c[i,j] := \max(c[i-1,j], c[i,j-1])$

LCS Beispiel (9)

ABCB
BDCAB

		j					
		0	1	2	3	4	5
		Y[j]	B	D	C	A	B
i	X[i]	0	0	0	0	0	0
0	A	0	0	0	0	1	1
1	B	0	1	1	1	1	2
2	C	0	1	1			
3	B	0					
4							

if $X_i = Y_j$ then
 $c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1$
 else $c[i,j] := \max(c[i-1,j], c[i,j-1])$

LCS Beispiel (10)

ABCB
BDCAB

i	j	0	1	2	3	4	5
		Y[j]	B	D	C	A	B
0	X[i]	0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0	1	1
2	B	0	1	1	1	1	2
3	C	0	1	1	2		
4	B	0					

if $X_i = Y_j$ then
 $c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1$
 else $c[i,j] := \max(c[i-1,j], c[i,j-1])$

LCS Beispiel (11)

ABCB
BDCAB

i	j	0	1	2	3	4	5
	Y[j]		B	D	C	A	B
0	X[i]	0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0	1	1
2	B	0	1	1	1	1	2
3	C	0	1	1	2	2	2
4	B	0					

if $X_i = Y_j$ then
 $c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1$
 else $c[i,j] := \max(c[i-1,j], c[i,j-1])$

LCS Beispiel (12)

ABCB
BDCAB

i	j	0	1	2	3	4	5
		Y[j]	B	D	C	A	B
0	X[i]	0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0	1	1
2	B	0	1	1	1	1	2
3	C	0	1	1	2	2	2
4	B	0	1				

if $X_i = Y_j$ then
 $c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1$
 else $c[i,j] := \max(c[i-1,j], c[i,j-1])$

LCS Beispiel (13)

ABCB
BD CAB

i \ j	0	1	2	3	4	5	
	Y[j]	B	D	C	A	B	
0	X[i]	0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0	1	1
2	B	0	1	1	1	1	2
3	C	0	1	1	2	2	2
4	B	0	1	1	2	2	

Arrows in the table indicate the path for the LCS: from (4,1) to (4,2) to (3,3) to (2,4) to (1,5).

if $X_i = Y_j$ then

$$c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1$$

else $c[i,j] := \max(c[i-1,j], c[i,j-1])$



LCS Beispiel (14)

ABC**B**
 BDCAB**B**

i	j	0	1	2	3	4	5
		Y[j]	B	D	C	A	B
0	X[i]	0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0	1	1
2	B	0	1	1	1	1	2
3	C	0	1	1	2	2	2
4	B	0	1	1	2	2	3

if $X_i = Y_j$ then
 $c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1$
 else $c[i,j] := \max(c[i-1,j], c[i,j-1])$

LCS-Algorithmus: Analyse

- Der LCS-Algorithmus bestimmt die Werte des Feldes $c[m,n]$
- Laufzeit?

$O(m \cdot n)$

Jedes $c[i,j]$ wird in konstanter Zeit berechnet, und es gibt $m \cdot n$ Elemente in dem Feld

Wie findet man den tatsächlichen LCS?

- Für $c[i, j]$ ist bekannt wie es hergeleitet wurde:

$$c[i, j] = \begin{cases} c[i-1, j-1] + 1 & \text{falls } x[i] = y[j], \\ \max(c[i, j-1], c[i-1, j]) & \text{sonst} \end{cases}$$

- Match liegt nur vor, wenn erste Gleichung verwendet
- Beginnend von $c[m, n]$ und rückwärtslaufend, speichere $x[i]$ wenn $c[i, j] = c[i-1, j-1] + 1$.

2	2
2	3

Zum Beispiel hier
 $c[i, j] = c[i-1, j-1] + 1 = 2 + 1 = 3$

Rekursiver Algorithmus für LCS

```
Procedure LCS(x, y, i, j):  
  if x[i] = y[j]  
    then c[i, j] := LCS(x, y, i-1, j-1) + 1  
    else c[i, j] := max({ LCS(x, y, i-1, j),  
                        LCS(x, y, i, j-1)})
```

LCS(„AGCTCT“, „AGTT“, m, n)

Leider kennen wir $c[m, n]$ nicht

Praktikabler Algorithmus LCS-length

Function `LCS-length(X, Y)`:

`m := length(X); n := length(Y)`

`c: Array [m, n] of Integer`

for `i` from 1 to `m` do `c[i,0] := 0` // Sonderfall: `Y[0]`

for `j` from 1 to `n` do `c[0,j] := 0` // Sonderfall: `X[0]`

for `i` from 1 to `m` // für alle `X[i]`

for `j` from 1 to `n` // für alle `Y[j]`

if `X[i] = Y[j]` then

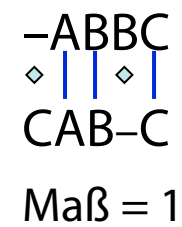
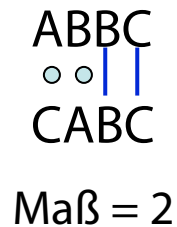
`c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1`

else `c[i,j] := max({ c[i-1,j], c[i,j-1] })`

return `c`

Ein generelleres Problem

- Ausrichtung von zwei Zeichenketten, so dass
 - Match = 1
 - Mismatch = 0
 - Einfügung/Löschung = -1 } (oder andere Maße)
- Ausrichtung von ABBC mit CABC
 - LCS = 3: ABC
 - Beste Ausrichtung?



Rekursive Formulierung

- Sei $F(i, j)$ das beste Ausrichtungsmaß zwischen $X[1..i]$ und $Y[1..j]$
- $F(m, n)$ ist das beste Ausrichtungsmaß zwischen X and Y
- Rekurrenz

$$F(i, j) = \max \begin{cases} F(i-1, j-1) + \delta(i, j) & \text{Match/Mismatch} \\ F(i-1, j) - 1 & \text{Einfügung in Y} \\ F(i, j-1) - 1 & \text{Einfügung in X} \end{cases}$$

$\delta(i, j) = 1$ falls $X[i]=Y[j]$ und 0 sonst

Ausrichtungsbeispiel

	j	0	1	2	3	4	
i		Y[j]	C	A	B	C	ABBC CABC
0	X[i]						
1	A						
2	B						
3	B						
4	C						

$X = ABBC; m = |X| = 4$

$Y = CABC; n = |Y| = 4$

Alloziere Array $F[5,5]$

Ausrichtungsbeispiel

		j	0	1	2	3	4
			Y[j]	C	A	B	C
i	X[i]	0	0	-1	-2	-3	-4
1	A	-1	0	0	-1	-2	
2	B	-2	-1	0	1	0	
3	B	-3	-2	-1	1	1	
4	C	-4	-2	-2	0	2	

ABBC
CABC

$$F(i, j) = \max \begin{cases} F(i-1, j-1) + \delta(i, j) & \text{Match/Mismatch} \\ F(i-1, j) - 1 & \text{Einfügung bei Y} \\ F(i, j-1) - 1 & \text{Einfügung bei X} \end{cases}$$

$\delta(i, j) = 1$ falls $X[i]=Y[j]$ und 0 sonst



Ausrichtungsbeispiel

		j	0	1	2	3	4
			Y[j]	C	A	B	C
i	X[i]	0	0	-1	-2	-3	-4
1	A	-1	0	0	-1	-2	
2	B	-2	-1	0	1	0	
3	B	-3	-2	-1	1	1	
4	C	-4	-2	-2	0	2	

ABBC
CABC

ABBC
○○||
CABC
Maß = 2

$$F(i, j) = \max \begin{cases} F(i-1, j-1) + \delta(i, j) & \text{Match/Mismatch} \\ F(i-1, j) - 1 & \text{Einfügung bei Y} \\ F(i, j-1) - 1 & \text{Einfügung bei X} \end{cases}$$

$\delta(i, j) = 1$ falls $X[i]=Y[j]$ und 0 sonst

Hinweise für weitere Studien

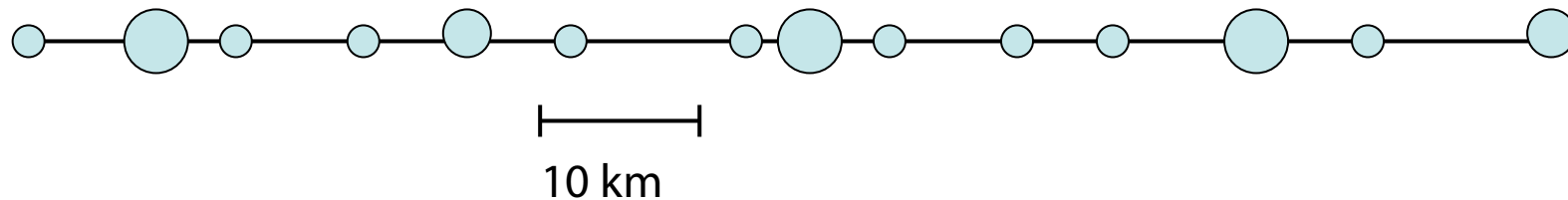
- **Bisher:** Berechnung einer *globalen* Ausrichtung mit Bewertungsmaß (vgl. Needleman-Wunsch-Algorithmus)
- **Auch:** Berechnung einer *lokalen* Ausrichtung mit Bewertungsmaß (vgl. Smith-Waterman-Algorithmus)
 - Geg. Sequenzen **a**, **b** mit Ausrichtungsbewertung **w**
 - Gesucht: optimale Ausrichtung aller **Teilsequenzen** **a'** von **a** und **b'** von **b**, so dass die Bewertungen für deren (jeweilige globale) Ausrichtung maximiert werden

Needleman, Saul B.; and Wunsch, Christian D. "A general method applicable to the search for similarities in the amino acid sequence of two **proteins**". *Journal of Molecular Biology* 48 (3): 443–53, **1970**

Smith, Temple F.; and Waterman, Michael S. "Identification of **Common Molecular Subsequences**". *Journal of Molecular Biology* 147: 195–197. **1981**

Beispiel: Restaurant-Platzierung

- Städte t_1, t_2, \dots, t_n an der Autobahn
- Restaurants in t_i hat geschätzten jährlichen Profit p_i
- Restaurants mit Mindestabstand von 10 km aufgrund von Vorgaben
- Ziel: Maximierung des Profits – großer Bonus

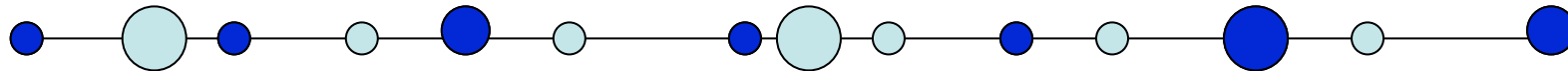


Brute-Force-Ansatz

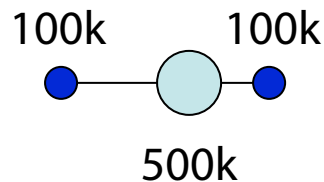
- Jede Stadt wird entweder gewählt oder nicht
- Testen der Bedingungen für 2^n Teilmengen
- Eliminiere Teilmengen, die Einschränkungen nicht erfüllen
- Berechne Gesamtprofit für jede übrigbleibende Teilmenge
- Wähle Teilmenge von Städten mit größtem Profit

- $\Theta(n \cdot 2^n)$

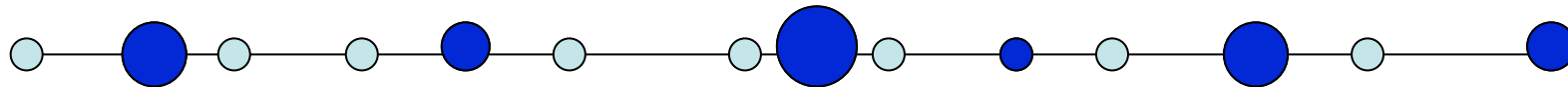
Natürlich-gierige Strategie 1



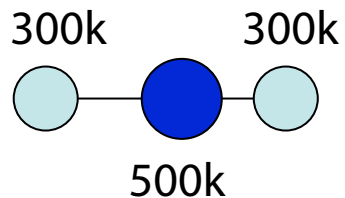
- Nehme erste Stadt. Dann nächste Stadt mit Entfernung ≥ 10 km
- Können Sie ein Beispiel angeben, bei dem nicht die richtige (beste) Lösung bestimmt wird?



Natürlich-gierige Strategie 2

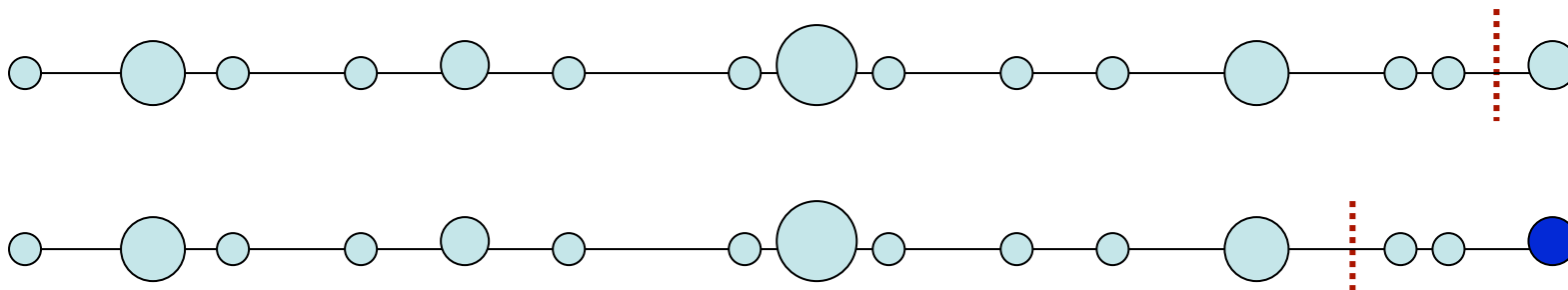


- Nehme Stadt mit höchstem Profit und dann die nächsten, die nicht < 10 km von der vorher gewählten Stadt liegen
- Können Sie ein Beispiel angeben, bei dem nicht die richtige (beste) Lösung bestimmt wird?



Formulierung über dynamische Programmierung

- Nehmen wir an, die optimale Lösung sei gefunden
- Entweder enthält sie t_n oder nicht
- Fall 1: t_n nicht enthalten
 - Beste Lösung identisch zur besten Lösung von t_1, \dots, t_{n-1}
- Fall 2: t_n enthalten
 - Beste Lösung ist $p_n +$ beste Lösung für t_1, \dots, t_j , wobei $j < n$ der größte Index ist, so dass $\text{dist}(t_j, t_n) \geq 10$



Formulierung als Rekurrenz

- Sei $S(i)$ der Gesamtprofit der optimalen Lösung, wenn die ersten i Städte betrachtet, aber nicht notwendigerweise ausgewählt wurden
 - $S(n)$ ist die optimale Lösung für das Gesamtproblem

$$S(n) = \max \begin{cases} S(n-1) \\ S(j) + p_n \quad j < n \ \& \ \text{dist}(t_j, t_n) \geq 10, j \text{ maximal} \end{cases}$$

↓ Generalisiere

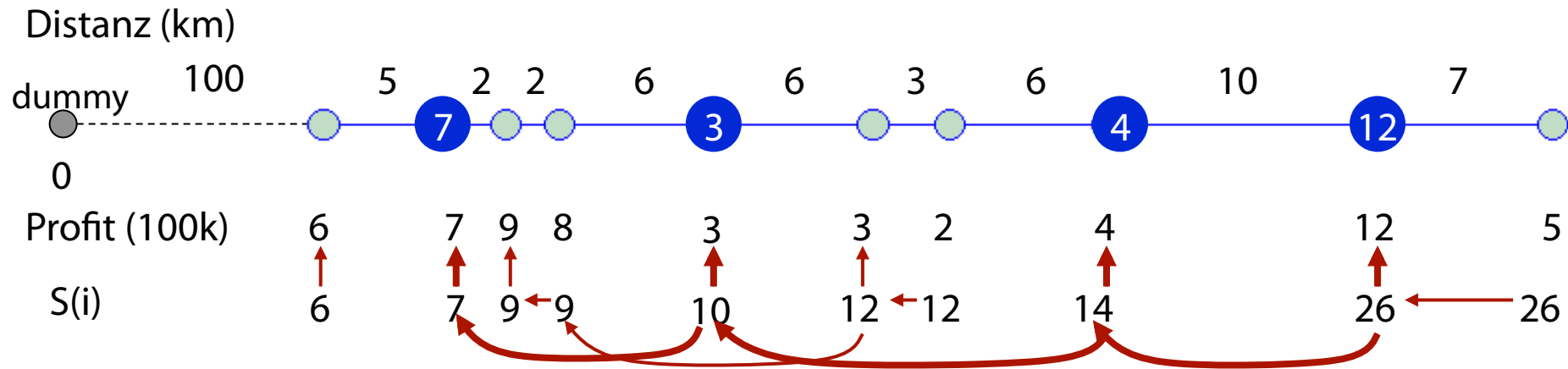
$$S(i) = \max \begin{cases} S(i-1) \\ S(j) + p_i \quad j < i \ \& \ \text{dist}(t_j, t_i) \geq 10, j \text{ maximal} \end{cases}$$

Anzahl der Teilprobleme: n . Grenzfall: $S(0) = 0$.

Abhängigkeiten:



Beispiel



Optimal: 26

$$S(i) = \max \begin{cases} S(i-1) \\ S(j) + p_i \end{cases} \quad j < i \text{ \& dist } (t_j, t_i) \geq 10$$

- Natürlich-gierig 1: $6 + 3 + 4 + 12 = 25$
- Natürlich-gierig 2: $12 + 9 + 4 = 25$

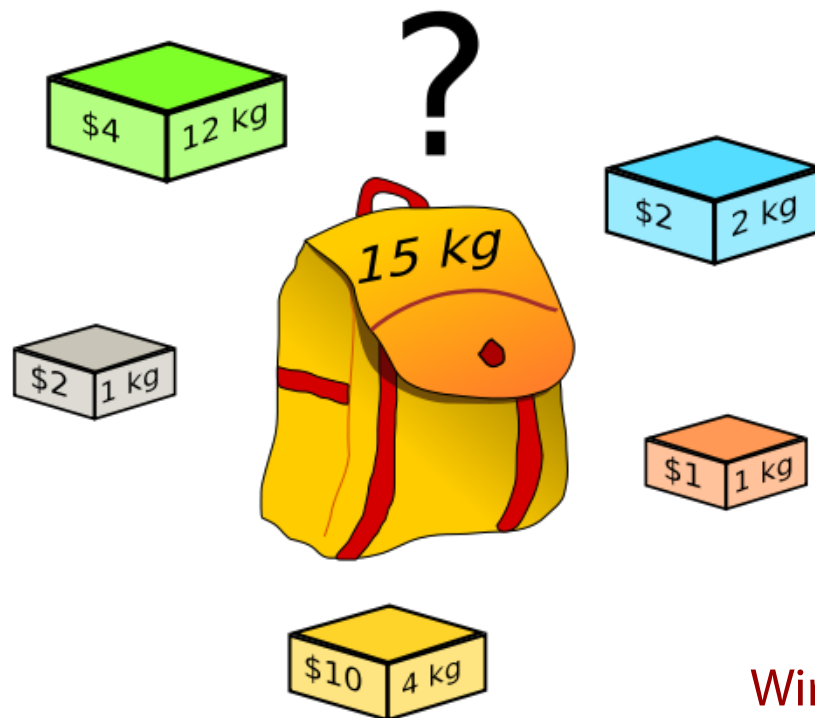
Aufwandsanalyse

- Zeit: $\Theta(nk)$, wobei k die maximale Anzahl der Städte innerhalb von 10km nach links zu jeder Stadt ist
 - Im schlimmsten Fall $\Theta(n^2)$
 - Kann durch Vorverarbeitung verbessert werden zu $\Theta(n)$
- Speicher: $\Theta(n)$

Rucksackproblem

Gegeben sei eine Menge von Gegenständen

- Jeder Gegenstand hat einen Wert und ein Gewicht
- **Ziel:** Maximiere Wert der Dinge im Rucksack
- **Einschränkung:** Rucksack hat Gewichtsgrenze



Drei Versionen:

0-1-Rucksackproblem: Wähle Gegenstand oder nicht

Gestückeltes Rucksackproblem: Gegenstände sind teilbar

Unbegrenzttes Rucksackproblem: Beliebige Anzahlen verfügbar

Welches ist das leichteste Problem?

Wir beginnen mit dem 0-1-Problem

0-1-Problem

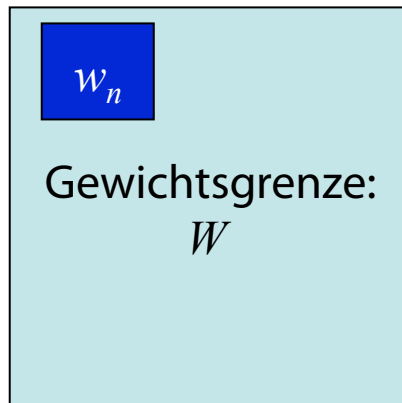
- Rucksack hat Gewichtseinschränkung W
- Gegenstände $1, 2, \dots, n$ (beliebig)
- Gegenstände haben Gewichte w_1, w_2, \dots, w_n
 - Gewichte sind Ganzzahlen und $w_i < W$
- Gegenstände haben Werte v_1, v_2, \dots, v_n
- Ziel: Finde eine Teilmenge $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ von Gegenständen, so dass $\sum_{i \in S} w_i \leq W$ und $\sum_{i \in S} v_i$ maximal bezüglich aller möglicher Teilmengen

Naive Algorithmen

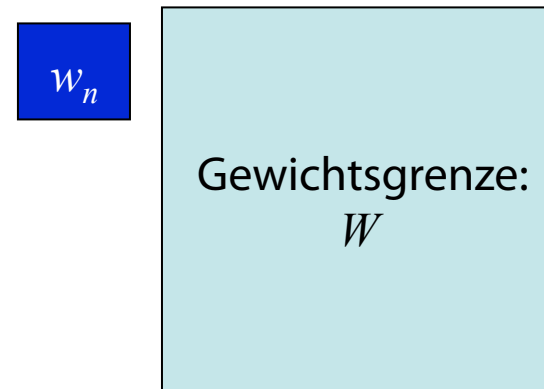
- Betrachte alle Untermengen von $\{1, 2, \dots, n\}$
 - Optimale Lösung wird gefunden, aber exponentiell
- Gierig 1: Nimm jeweils den nächsten passenden Gegenstand mit dem größten Wert
 - Optimale Lösung wird nicht gefunden
 - Wer kann ein Beispiel geben?
- Gierig 2: Nimm jeweils nächsten Gegenstand mit dem besten Wert/Gewichts-Verhältnis
 - Optimale Lösung wird nicht gefunden
 - Wer kann ein Beispiel geben?

Ansatz mit dynamischer Programmierung

- Angenommen, die optimale Lösung S ist bekannt
- Fall 1: Gegenstand n ist im Rucksack
- Fall 2: Gegenstand n ist nicht im Rucksack



Finde optimale Lösung unter Verwendung von Gegenständen $1, 2, \dots, n-1$ mit Gewichtsgrenze $W - w_n$



Finde optimale Lösung unter Verwendung von Gegenständen $1, 2, \dots, n-1$ mit Gewichtsgrenze W

Rekursive Formulierung

Sei $V[i, w]$ der optimale Gesamtwert wenn Gegenstände $1, 2, \dots, i$ betrachtet werden für aktuelle Gewichtsgrenze w
 $\Rightarrow V[n, W]$ ist die optimale Lösung

$$V[n, W] = \max \begin{cases} V[n-1, W-w_n] + v_n \\ V[n-1, W] \end{cases}$$

↓ Generalisierung

$$V[i, w] = \begin{cases} \max \begin{cases} V[i-1, w-w_i] + v_i & \text{Ggst } i \text{ gewählt} \\ V[i-1, w] & \text{Ggst } i \text{ nicht gewählt} \end{cases} \\ V[i-1, w] \text{ if } w_i > w & \text{Ggst } i \text{ nicht gewählt} \end{cases}$$

Grenzfall: $V[i, 0] = 0, V[0, w] = 0$. Wieviele Teilprobleme?

Beispiel

- $n = 6$ (# der Gegenstände)
- $W = 10$ (Gewichtsgrenze)
- Gegenstände (Gewicht und Wert):

2 2

4 3

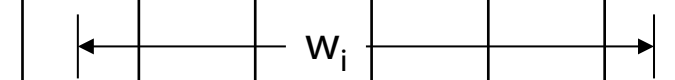
3 3

5 6

2 4

6 9

			w										
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	w_i	v_i											
1	2	2	0										
2	4	3	0										
3	3	3	0										
4	5	6	0										
5	2	4	0										
6	6	9	0										



$$V[i, w] = \begin{cases} \max \begin{cases} V[i-1, w-w_i] + v_i & \text{falls Gegenstand } i \text{ verwendet} \\ V[i-1, w] & \text{falls Gegenstand } i \text{ nicht verwendet} \end{cases} \\ V[i-1, w] & \text{falls } w_i > w \text{ Ggst. } i \text{ nicht verwendet} \end{cases}$$

			w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	w_i	v_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	2	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	4	3	0	0	2	2	3	3	5	5	5	5	5	5
3	3	3	0	0	2	3	3	5	5	6	6	8	8	8
4	5	6	0	0	2	3	3	6	6	8	9	9	11	11
5	2	4	0	0	4	4	6	7	7	10	10	12	13	13
6	6	9	0	0	4	4	6	7	9	10	13	13	15	15

$$V[i, w] = \begin{cases} \max \begin{cases} V[i-1, w-w_i] + v_i & \text{falls Gegenstand } i \text{ verwendet} \\ V[i-1, w] & \text{falls Gegenstand } i \text{ nicht verwendet} \end{cases} \\ V[i-1, w] & \text{falls } w_i > w \text{ Ggst. } i \text{ nicht verwendet} \end{cases}$$



			w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	w_i	v_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	2	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	4	3	0	0	2	2	3	3	5	5	5	5	5	5
3	3	3	0	0	2	3	3	5	5	6	6	8	8	8
4	5	6	0	0	2	3	3	6	6	8	9	9	11	11
5	2	4	0	0	4	4	6	7	7	10	10	12	13	13
6	6	9	0	0	4	4	6	7	9	10	13	13	15	15

Optimaler Wert: 15

Gegenstand: 6, 5, 1

Gewichte: $6 + 2 + 2 = 10$

Wert: $9 + 4 + 2 = 15$

Analyse

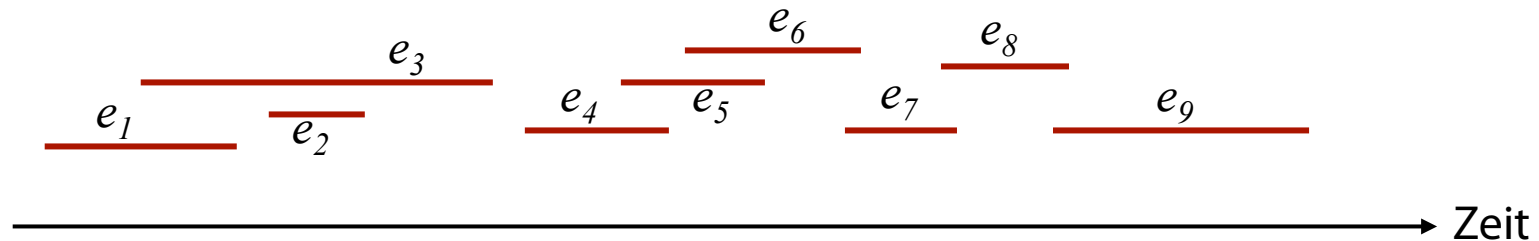
- $\Theta(nW)$
- Polynomial?
 - Pseudo-polynomial
 - Funktioniert gut, wenn W klein
- Betrachte folgende Gegenstände (Gewicht, Wert):
 $(10, 5), (15, 6), (20, 5), (18, 6)$
- Gewichtsgrenze 35
 - Optimale Lösung: Ggst. 2, 4 (Wert = 12). Iterationen: $2^4 = 16$ Mengen
 - Dynamische Programmierung: Fülle Tabelle $4 \times 35 = 140$ Einträge
- Was ist das Problem?
 - Viele Einträge nicht verwendet: Gewichtskombination nicht möglich
 - Brute-Force-Ansatz kann besser sein

Longest-Increasing-Subsequence-Problem

- Gegeben sei eine Liste von Zahlen
1 2 5 3 2 9 4 9 3 5 6 8
- Finde ***längste*** Teilsequenz, in der keine Zahl kleiner ist als die vorige
 - Beispiel: 1 2 5 9
 - Teilsequenz der originalen Liste
 - Die Lösung ist Teilsequenz der sortierten Liste

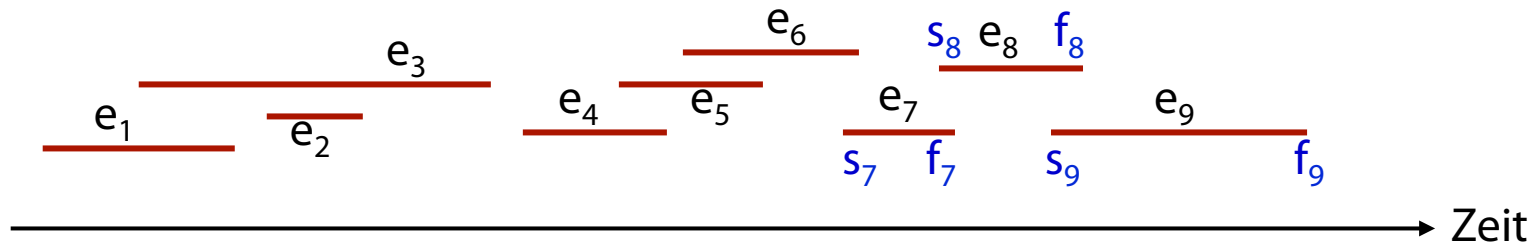
Eingabe: 1 2 5 3 2 9 4 9 3 5 6 8
LCS: | | | | / / / / 1 2 3 4 5 6 8
Sortiert: 1 2 2 3 3 4 5 5 6 8 9 9

Ereignisplanungs-Problem



- Eingabe: Ein Liste von Ereignissen (Intervallen) zur Berücksichtigung
 - e_i hat Anfangszeit s_i und Endezeit f_i
 - wobei gilt, dass $f_i < f_j$ falls $i < j$
- Jedes Ereignis hat einen Wert v_i
- Gesucht: Plan, so dass Gesamtwert maximiert
 - Nur ein Ereignis kann pro Zeitpunkt stattfinden
- Vorgehen ähnlich zur Restaurant-Platzierung
 - Sortiere Ereignisse nach Endezeit
 - Betrachte ob letztes Ereignis enthalten ist oder nicht

Ereignisplanungs-Problem



- $V(i)$ ist der optimale Wert, der erreicht werden kann, wenn die ersten i Ereignisse betrachtet werden

- $$V(n) = \max \begin{cases} V(n-1) & e_n \text{ nicht gew\u00e4hlt} \\ V(j) + v_n & e_n \text{ gew\u00e4hlt} \end{cases}$$

$$j < n \text{ und } f_j < s_n$$

Münzwechsellproblem

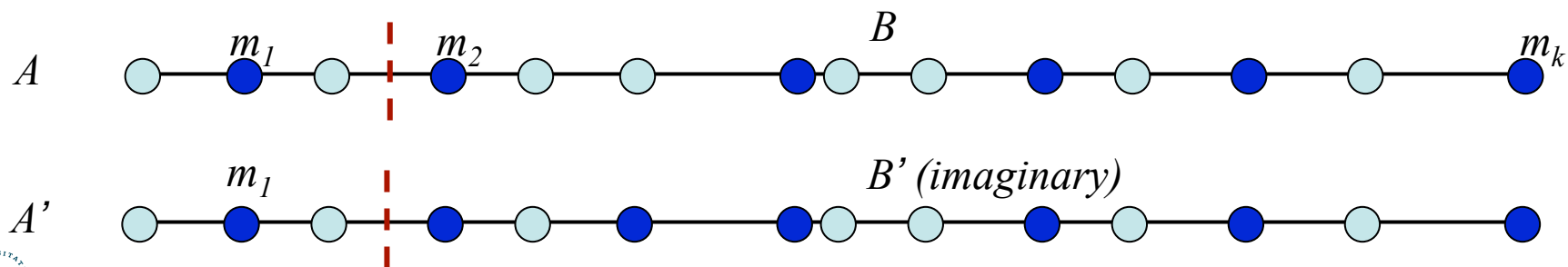
- Gegeben eine Menge von Münzwerten (z.B. 2, 5, 7, 10), entscheide, ob es möglich ist, Wechselgeld für einen gegebenen Wert (z.B. 13) zurück zu geben, oder minimiere die Anzahl der Münzen
- **Version 1:** Unbegrenzte Anzahl von Münzen mit entsprechenden Werten
 - Unbegrenztes Rucksackproblem
- **Version 2:** Verwende jeden Münztyp nur einmal
 - 0-1-Rucksackproblem

Gierige Algorithmen

- Für einige Probleme ist dynamische Programmierung des Guten zuviel
 - Gierige Algorithmen können u.U. die optimale Lösung garantieren...
 - ... und sind dabei effizienter

Restaurant-Problem: Formale Betrachtung

- **Behauptung 1:** Falls $A = [m_1, m_2, \dots, m_k]$ die optimale Lösung für eine Menge von Städten $[t_1, \dots, t_n]$ ist
 - $m_1 < m_2 < \dots < m_k$ sind Indexe der gewählten Städte
 - dann ist $B = [m_2, m_3, \dots, m_k]$ die optimale Lösung für das Teilproblem $[t_j, \dots, t_n]$ (t_j sei erste Stadt, die mindestens 10 km rechts von t_{m_1} liegt)
- **Beweis durch Widerspruch:** Sei B nicht die optimale Lösung für das Teilproblem, was bedeutet, dass es eine bessere Lösung B' geben muss
 - Dann ergibt $A' = m_1 \parallel B'$ eine bessere Lösung als $A = m_1 \parallel B$
 $\Rightarrow A$ ist nicht optimal \Rightarrow Widerspruch $\Rightarrow B$ ist optimal

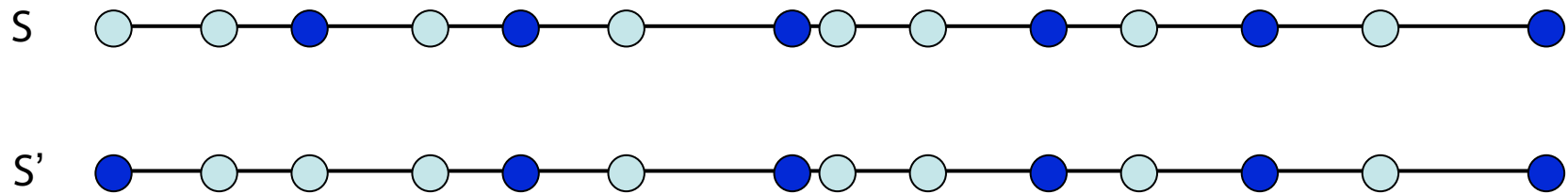


Folgerung aus Behauptung 1

- Falls wir die erste Stadt kennen, die gewählt werden muss, können wir das Gesamtproblem auf ein kleineres Teilproblem reduzieren
 - Ähnlich wie bei dynamischer Programmierung
 - Optimale Substruktur

Formale Betrachtung (2)

- **Behauptung. 2:** Für das Restaurant-Platzierungsproblem mit uniformem Profit, gibt es eine optimale Lösung mit t_1
- **Beweis durch Widerspruch:** Angenommen, durch Wahl von t_1 ergibt sich keine optimale Lösung.
 - Sagen wir, die erste gewählte Stadt für die Lösung S ist $t_i, i > 1$
 - Ersetze t_i mit t_1 , dann wird die Distanzeinschränkung eingehalten und der Gesamtprofit bleibt gleich
 - Widerspruch, S' ist auch eine Lösung, Behauptung 2 gilt



Folgerung aus Behauptung 2

- Wir können die erste Stadt als Teil der Lösung wählen
 - Unterschied zur dynamischen Programmierung
 - Entscheidungen werden sofort gefällt
- Unter Verwendung von Behauptung 1 können wir die Strategie einfach auf das übrige Teilproblem anwenden (unter Beachtung des Mindestabstands)
- Wohlgemerkt: Die Strategie funktioniert nur bei uniformen Profitwerten

Gierige Restaurant-Platzierung

Procedure `greedy-locate`($[t_1, \dots, t_n]$, `min_dist`):

`select` t_1

$d := 0$

for i from 2 to n do

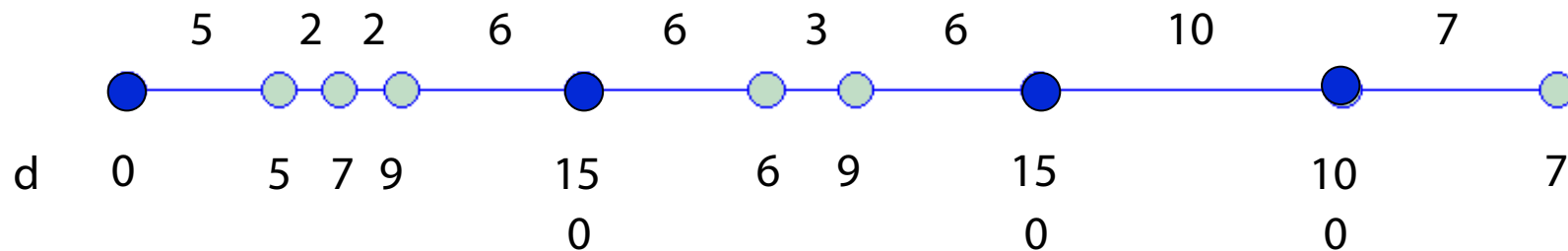
$d := d + \text{dist}(t_i, t_{i-1})$

if $d \geq \text{min_dist}$ then

`select` t_i

$d := 0$

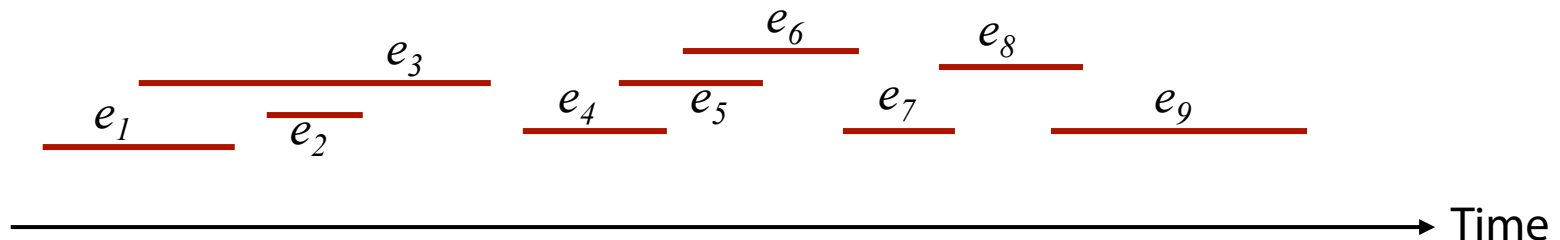
return `selected towns`



Analyse

- Zeitaufwand: $\Theta(n)$
- Speicheraufwand:
 - $\Theta(n)$ um die Eingabe zu speichern
 - $\Theta(1)$ für die gierige Auswahl

Ereignisauswahl-Problem (Event Scheduling)

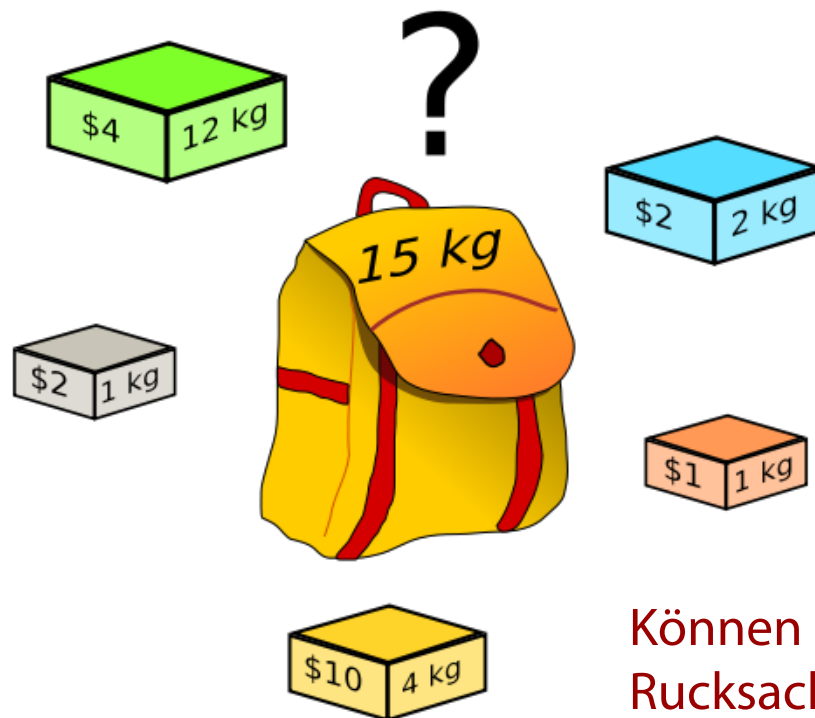


- Ziel: maximiere die Anzahl der ausgewählten Ereignisintervalle
- Setze $v_i = 1$ für alle i und löse Problem aufwendig mit dynamischer Programmierung
- Gierige Strategie: Wähle das nächste Ereignisintervall kompatibel mit voriger Wahl
- Liefert (1, 2, 4, 6, 8) für das obige Beispiel
- Warum funktioniert das hier?
 - **Behauptung 1:** optimale Substruktur
 - **Behauptung 2:** Es gibt optimale Lösung, die e_1 beinhaltet
 - **Beweis durch Widerspruch:** Nehme an, keine optimale Lösung enthält e_1
 - Sagen wir, das erste gewählt Ereignis ist $e_i \Rightarrow$ andere gewählte Ereignisse starten, nachdem e_i endet
 - Ersetze e_i durch e_1 ergibt eine andere optimale Lösung (e_1 endet früher als e_i)
 - Widerspruch
- Einfache Idee: Wähle das nächste Ereignis, mit dem die maximale Zeit verbleibt

Rucksackproblem

Gegeben sei eine Menge von Gegenständen

- Jeder Gegenstand hat einen Wert und ein Gewicht
- **Ziel:** maximiere Wert der Dinge im Rucksack
- **Einschränkung:** Rucksack hat Gewichtsgrenze



Drei Versionen:

0-1-Rucksackproblem: Wähle Gegenstand oder nicht

Gestückeltes Rucksackproblem: Gegenstände sind teilbar

Unbegrenztes Rucksackproblem: Beliebige Anzahlen verfügbar

Welches ist das leichteste Problem?

Können wir das gestückelte Rucksackproblem mit einem gierigen Verfahren lösen?

Gieriger Algorithmus für Stückelbares-Rucksackproblem

- Berechne Wert/Gewichts-Verhältnis für jeden Gegenstand
- Sortiere Gegenstände bzgl. ihres Wert/Gewichts-Verhältnisses
 - Verwende Gegenstand mit höchstem Verhältnis als wertvollstes Element (most valuable item, MVI)
- Iterativ:
 - Falls die Gewichtsgrenze nicht durch Addieren von MVI überschritten
 - Wähle MVI
 - Sonst wähle MVI partiell bis Gewichtsgrenze erreicht

Beispiel

Ggst	Gewicht (kg)	Wert (\$)	\$ / kg
1	2	2	1
2	4	3	0.75
3	3	3	1
4	5	6	1.2
5	2	4	2
6	6	9	1.5

- Gewichtsgrenze: 10

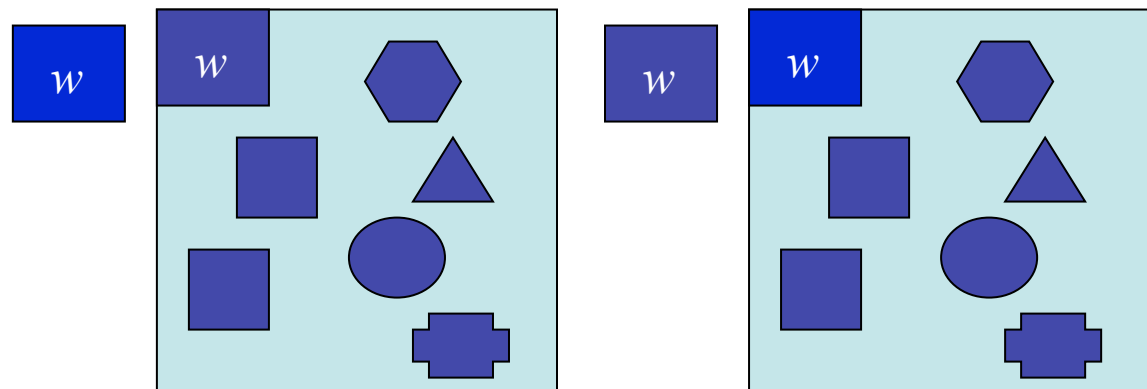
Example

Ggst	Gewicht (kg)	Wert (\$)	\$ / kg
5	2	4	2
6	6	9	1.5
4	5	6	1.2
1	2	2	1
3	3	3	1
2	4	3	0.75

- Gewichtsgrenze: 10
- Wähle Ggst 5
 - 2 kg, \$4
- Wähle Ggst 6
 - 8 kg, \$13
- Wähle 2 kg von Ggst 4
 - 10 kg, 15.4

Warum funktioniert der gierige Ansatz?

- **Behauptung:** Jede optimale Lösung muss soviel vom MVI enthalten wie möglich (bis zur Gewichtsgrenze)
- **Beweis durch Widerspruch:** Nehmen wir an, die optimale Lösung enthalte das MVI nicht (also existieren w ($w < W$) Einheiten des MVI, obwohl anderer Gegenstand gewählt)
 - Wir können w kg eines weniger wertvollen Gegenstands durch MVI ersetzen
 - Das Gesamtgewicht bleibt gleich, aber der Wert ist höher als beim “optimalen” Ergebnis
 - Widerspruch



Wann funktioniert der gierige Ansatz?

1. Optimale Substruktur
 2. Lokal optimale Entscheidung führt zur global optimalen Lösung
- Für die meisten Optimierungsprobleme gilt das nicht
 - Vergleiche aber die Bestimmung des minimalen Spannbaums

Danksagung

Die nachfolgenden 5 Präsentationen wurden mit einigen Änderungen übernommen aus:

- „Algorithmen und Datenstrukturen“ gehalten von Sven Groppe an der UzL

Gierige Strategie zur Wechselgeldberechnung

- **Beispiel:** Wechselgeldberechnung
- **Problem:** Finde eine Münzkombination für ein beliebiges Wechselgeld, die aus möglichst wenig Münzen besteht



Schaffnertasche mit Münzmagazin

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Schaffnertasche_mit_galoppwechsler.jpeg

Gierige Strategie zur Wechselgeldberechnung

- Nimm im nächsten Schritt die größte Münze, deren Wert kleiner oder gleich dem noch verbleibenden Wechselgeld ist

- **Beispiel:**

- Münzwerte

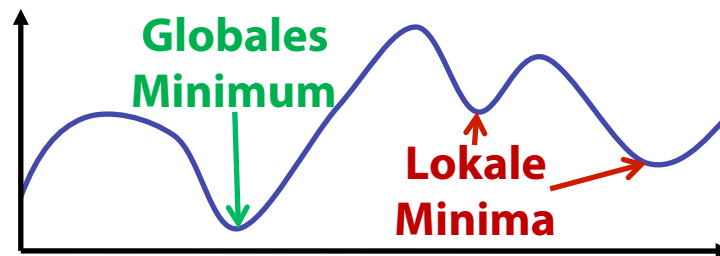


- Wechselgeld sei 63 Cent:

- 1-mal 50-Cent-Stück Rest: 13 Cent
 - 1-mal 10-Cent-Stück Rest: 3 Cent
 - 1-mal 2-Cent-Stück Rest: 1 Cent
 - 1-mal 1-Cent-Stück

Gierige Strategie zur Wechselgeldberechnung

- Im Fall der Euro-Münzen ist die obige Strategie optimal
- Für die Münzwerte 1, 5 und 11 jedoch nicht:
 - Wechselgeld sei 15
 - Gieriges Verfahren liefert 11 1 1 1 1
 - Optimum wäre: 5 5 5
- **Damit:** Manche gierige Strategien sind anfällig dafür, ein lokales anstatt eines globalen Minimums
(*bei Maximierungsprobleme Maximums*) zu ermitteln



Gierige Strategie zur Wechselgeldberechnung

- Wie schlecht kann die Lösung der gierigen Strategie werden?
 - Münzwerte seien $n_1=1$, n_2 und n_3 mit Bedingung $n_3 = 2n_2 + 1$ (vorheriges Bsp.: $n_2 = 5$, $n_3 = 11$)
 - Wechselgeld sei $N = 3n_2$ (vorheriges Bsp.: $N=15$)
 - **Für n_2 sind drei Münzen optimal (3-mal n_2)**
 - **Greedy-Strategie**
 - **1-mal n_3 Rest: n_2-1**
 - **0-mal n_2 Rest: n_2-1**
 - **(n_2-1) -mal n_1**
 - **Insgesamt n_2 Münzen**
 - **Beliebig schlecht gegenüber der optimalen Lösung (abhängig von den Münzwerten)**

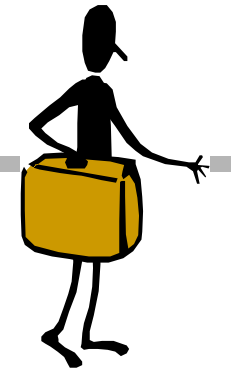
Gierige Strategie zur Wechselgeldberechnung

- Es geht noch schlimmer:
 - Münzwerte seien 25 Cent, 10 Cent und 4 Cent
 - Wechselgeld sei 41 Cent
 - Lösbar ist dieses mit
 - 1-mal 25-Cent-Stück und
 - 4-mal 4-Cent-Stück
 - Greedy-Strategie
 - 1-mal 25-Cent-Stück Rest: 16 Cent
 - 1-mal 10-Cent-Stück Rest: 6 Cent
 - 1-mal 4-Cent-Stück Rest: 2 Cent
 - **??? Keine Lösung!**

Entwurfsmuster / Entwurfsverfahren

- Im Laufe der Zeit haben sich in der immensen Vielfalt von Algorithmen nützliche Entwurfsmuster herauskristallisiert
- Gründe für das Studium von Entwurfsmustern
 - Verständnis für einzelne Algorithmen wird gesteigert, wenn man ihr jeweiliges Grundmuster verstanden hat
 - Bei der Entwicklung neuer Algorithmen kann man sich an den Grundmustern orientieren
 - Das Erkennen des zugrundeliegenden Musters hilft bei der Komplexitätsanalyse des Algorithmus
 - Warnung: Hilft **nicht** bei der Analyse der Komplexität eines **Problems**

Zusammenfassung Entwurfsmuster



- Am Anfang des Kurses behandelt:
 - Ein-Schritt-Berechnung
 - Verkleinerungsprinzip
 - Teile und Herrsche
- Jetzt haben wir dazu noch verstanden:
 - Vollständige Suchverfahren
(z.B. Rücksetzen, Verzweigen und Begrenzen)
 - Problem-Reformulierung
 - Dynamisches Programmieren
(Berechnung von Teilen und deren Kombination, Wiederverwendung von Zwischenergebnissen)
 - Gierige Suche