Algorithmen und Datenstrukturen

Prof. Dr. Ralf Möller

Universität zu Lübeck

Institut für Informationssysteme

Stefan Werner (Übungen)

sowie viele Tutoren

Danksagung

Die nachfolgenden Präsentationen wurden mit ausdrücklicher Erlaubnis des Autors mit nur kleinen Änderungen übernommen aus:

- „Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen“ (Kapitel 12 Approximation) gehalten von Christian Scheideler an der TUM http://www14.in.tum.de/lehre/2008WS/ea/index.html.de

Approximationsalgorithmen

Frage: Ich will ein NP-hartes Problem lösen. Was muss ich tun?

Antwort: Polynomialzeitalgorithmus dafür wohl nicht möglich.

Annahme:

Entwurfsmuster zur Aufwandsreduktion (siehe SAT)
bzw. Reduktion auf SAT (o.ä.) nicht offensichtlich,

Eine der drei Eigenschaften muss aufgegeben werden:

- Löse das Problem optimal.
- Löse das Problem in polynomieller Zeit
- Löse beliebige Instanzen des Problems

ρ-Approximationsalgorithmus:

- Läuft in polynomieller Zeit.
- Löst beliebige Instanzen des Problems.
- Findet eine Lösung, die höchstens Faktor ρ weg von Optimum ist.

Herausforderung: Lösung sollte möglichst nah an Optimum sein.

Lastbalancierung

Eingabe: m identische Maschinen, n Jobs. Job i hat Laufzeit t_i.

Einschränkungen:

- Ein einmal ausgeführter Job muss bis zum Ende auf derselben Maschine ausgeführt werden.
- Jede Maschine kann höchstens einen Job gleichzeitig bearbeiten.

Definition: Sei J(i) die Teilmenge der Jobs, die Maschine i zugewiesen werden. Dann ist $L_i = \sum_{j \in J(i)} t_j$ die Last der Maschine i.

Definition: Der Makespan L ist die maximale Last einer Maschine, d.h. $L = \max_i L_i$

Lastbalancierung: finde Zuweisung, die Makespan minimiert

Lastbalancierung: List Scheduling

List-Scheduling Algorithmus:

- Betrachte n Jobs in einer festen Reihenfolge
- Weise Job j der Maschine mit z.Zt. geringster Last zu

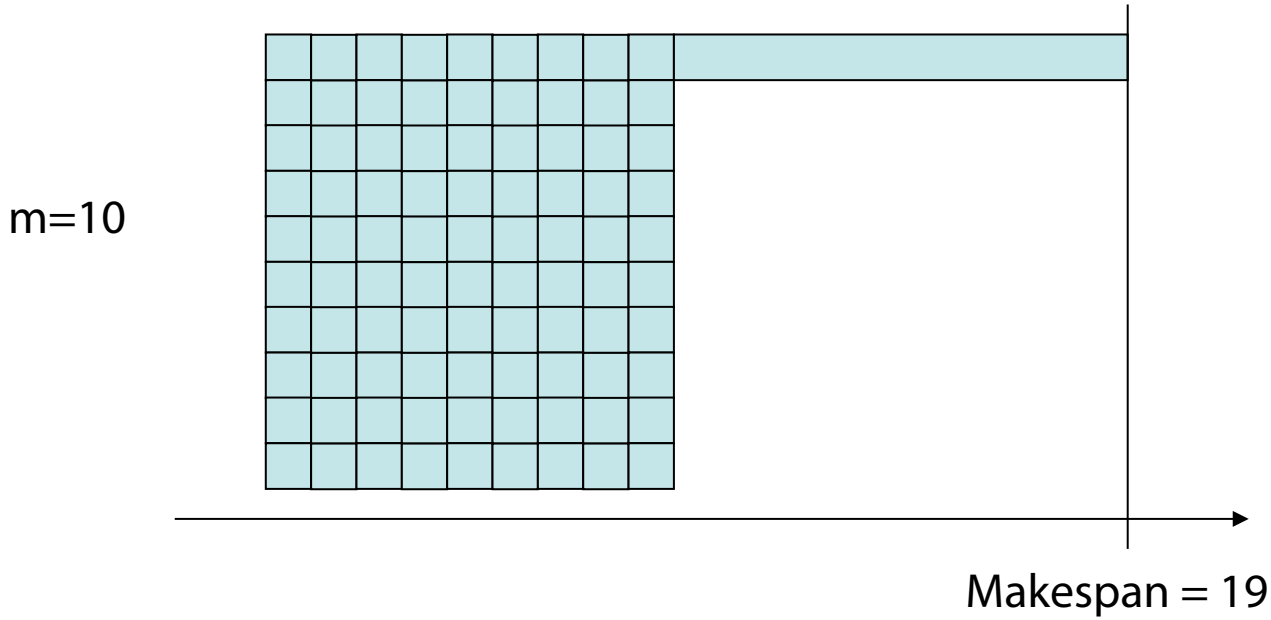
List-Scheduling(m, n, $(t_1,\ldots,t_n)$):

```
for i:=1 to m do
  L_i := 0; J(i):=Ø
for j:=1 to n do
  i:=argmin_{k ∈ [1..m]} L_k
  J(i):=J(i) ∪ {j}
  L_i:=L_i + t_j
return (J(1),…,J(m))
```

Laufzeit: $O(n \log m)$ mit Priority Queue

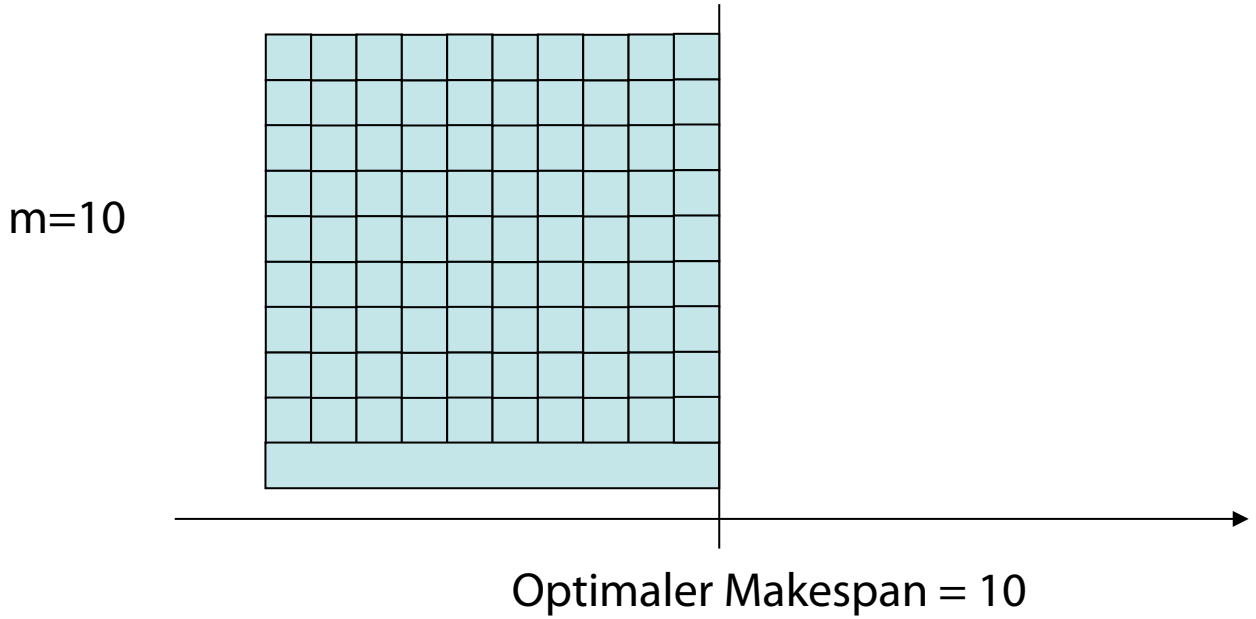
Lastbalancierung: List Scheduling

Beispiel: m Maschinen, m(m-1) Jobs der Länge 1, ein Job der Länge m



Lastbalancierung: List Scheduling

Beispiel: m Maschinen, m(m-1) Jobs der Länge 1, ein Job der Länge m



Lastbalancierung: List Scheduling

Theorem (Graham): Der Greedy Algorithmus ist 2-approximativ.

⟶ Vergleiche Güte des Algorithmus mit optimalem Makespan L^*

Lemma 1: $L^* \geq \max_j t_j$
Beweis: Eine Maschine muss den zeitintensivsten Job bearbeiten.

Lemma 2: $L^* \geq (1/m) \sum_j t_j$
Beweis:

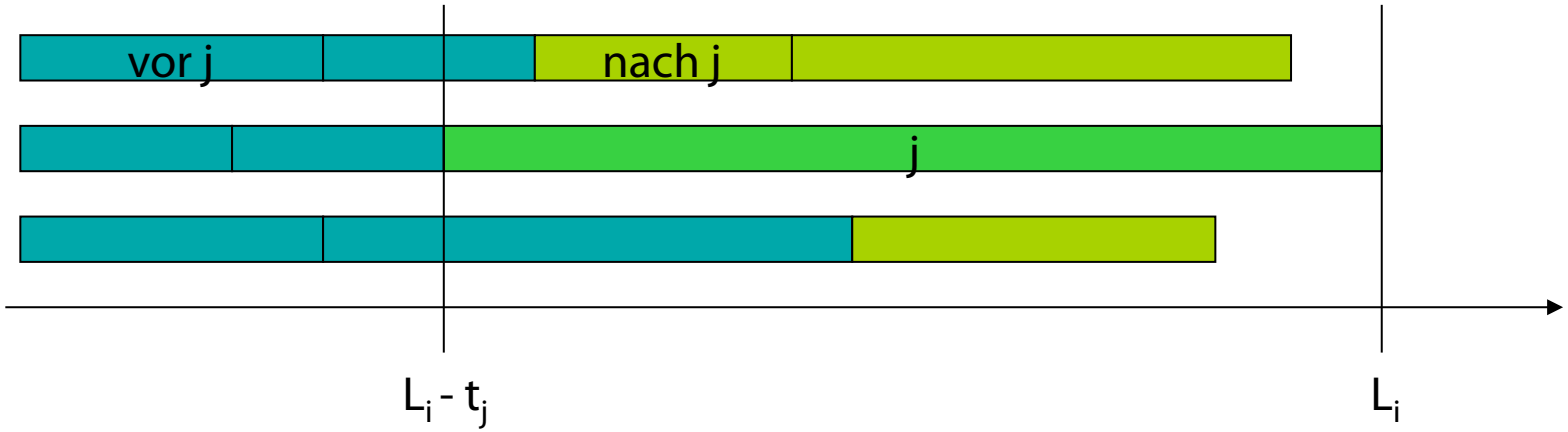
- Die Gesamtlast ist $\sum_j t_j$
- Eine der m Maschinen muss mindestens 1/m der Gesamtlast bekommen.

Lastbalancierung: List Scheduling

Theorem: Der Greedy Algorithmus ist 2-approximativ.

Beweis:

- Betrache Maschine i mit höchster Last L_i.
- Sei j der letzte Job in Maschine i.
- Da Job j Maschine i zugeordnet wurde, hatte i vorher die kleinste Last. Es gilt also $L_i - t_j \leq L_k$ für alle k.



Lastbalancierung: List Scheduling

Beweis (Forsetzung):

- Es gilt: $L_i - t_j \leq L_k$ für alle k
- Daraus folgt:

$$L_i - t_j \leq (1/m) \sum_k L_k$$
$$= (1/m) \sum_k t_k$$
$$\leq L^* \quad \text{wegen Lemma 1 } (L^* \geq \max_j t_j)$$

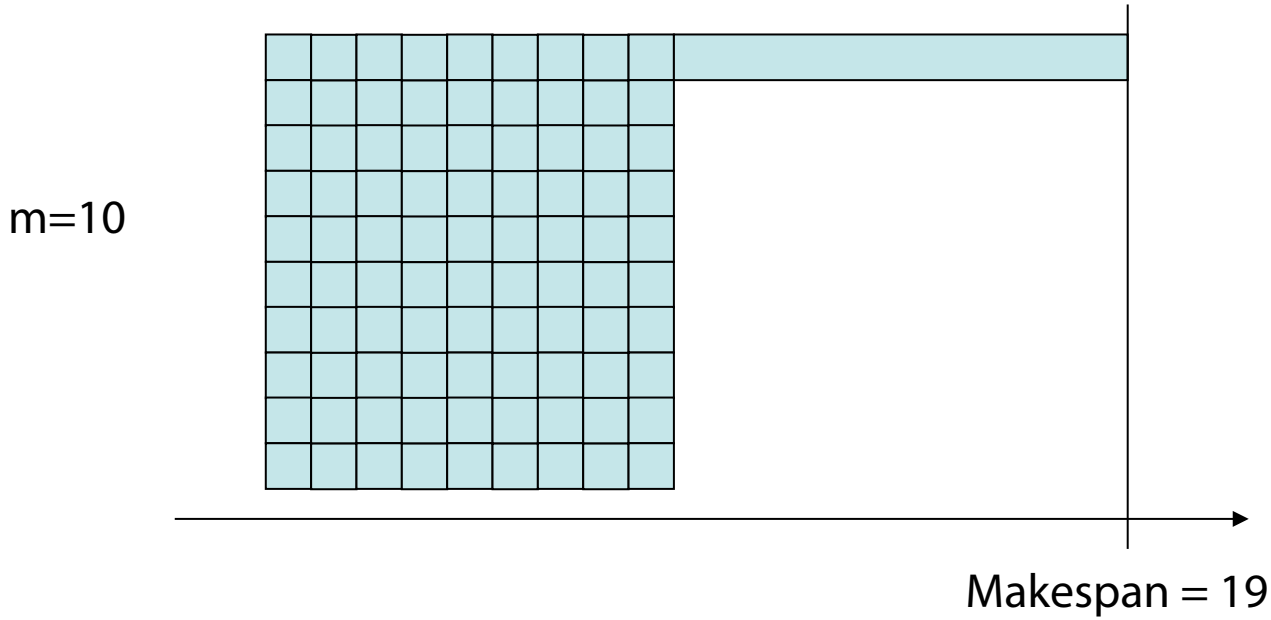
- Also gilt wegen Lemma 2 ($L^* \geq (1/m) \sum_j t_j$):

$$L_i = (L_i - t_j) + t_j \leq L^* + L^* = 2 \cdot L^*$$

Lastbalancierung: List Scheduling

Ist die Analyse scharf? Ja!

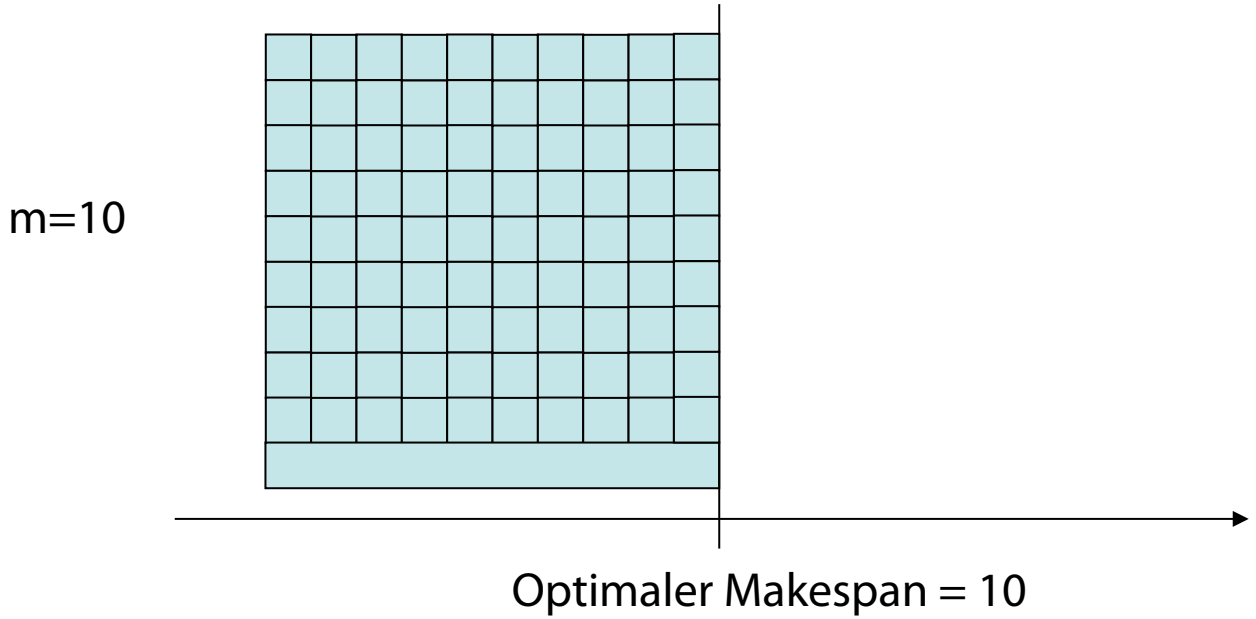
Beispiel: m Maschinen, m(m-1) Jobs der Länge 1, ein Job der Länge m



Lastbalancierung: List Scheduling

Ist die Analyse scharf? Ja!

Beispiel: m Maschinen, m(m-1) Jobs der Länge 1, ein Job der Länge m



Übersicht

- P und NP
- Approximationsalgorithmen
- Güte der Approximation
- Lastbalancierungsproblem