Algorithmen und Datenstrukturen

Prof. Dr. Ralf Möller

Universität zu Lübeck

Institut für Informationssysteme

Tanya Braun und Felix Kuhr (Übungen)

sowie viele Tutoren

Danksagung

Die nachfolgenden Präsentationen wurden mit einigen Änderungen übernommen aus der Vorlesung „Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen“ (Kapitel 2: Priority Queues) gehalten von Christian Scheideler an der TUM

http://www14.in.tum.de/lehre/2008WS/ea/index.html.de

Prioritätswarteschlangen

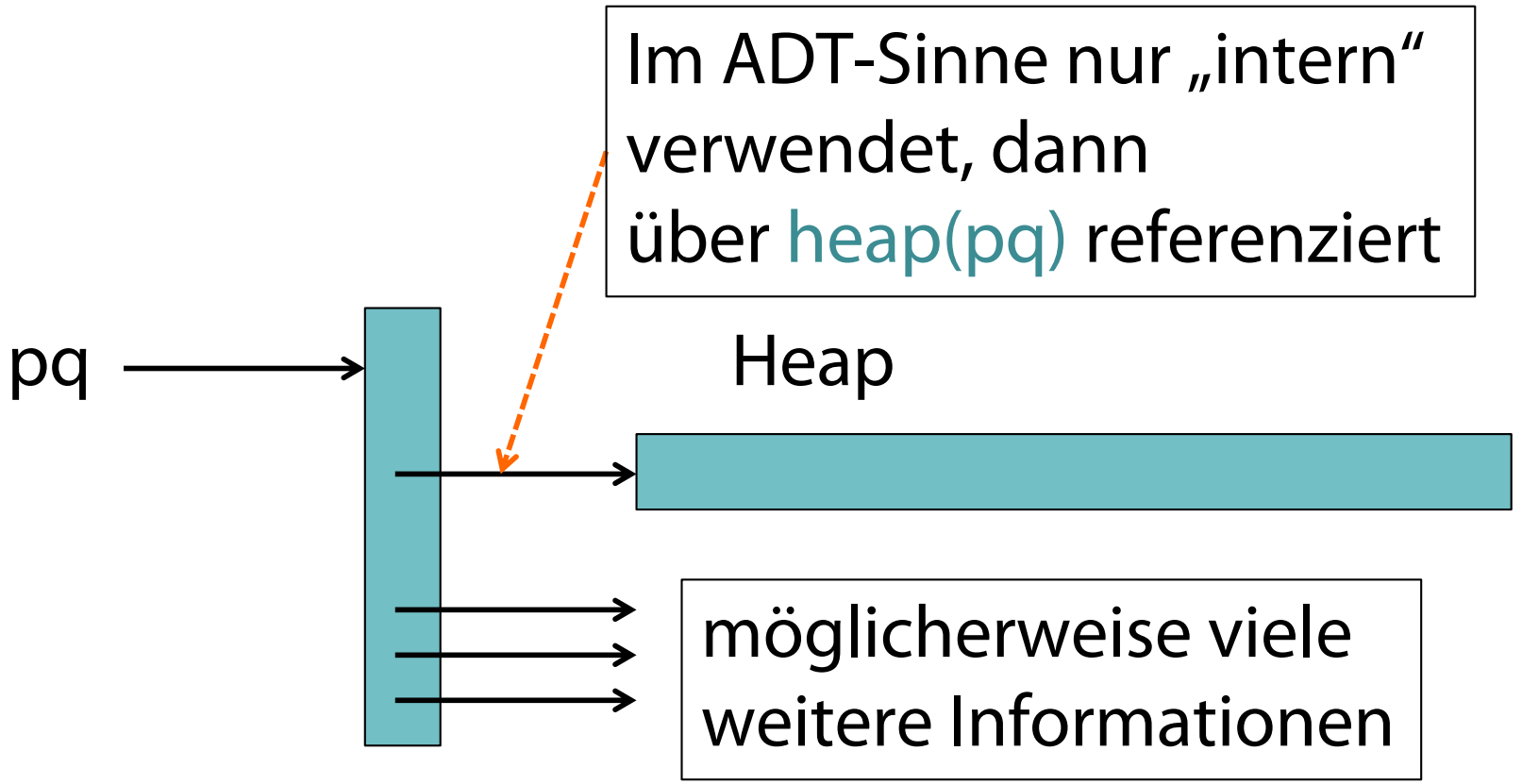
Geg.: $\{e_1,\ldots,e_n\}$ eine Menge von Elementen

Ann.: Priorität eines jeden Elements e wird identifiziert über die Funktion key

Operationen:

- function build($\{e_1,\ldots,e_n\}$) liefert neue Warteschlange
- procedure insert(e, pq) fügt Element e mit Priorität key(e) in pq ein, verändert pq sofern e noch nicht in pq
- function min(pq) gibt Element mit minimalem key(e) zurück
- procedure deleteMin(pq): löscht das minimale Element in pq, sofern vorhanden, und pq wird verändert, wenn etwas gelöscht wird

Prioritätswarteschlangen als ADTs



Erweiterte Prioritätswarteschlangen

Zusätzliche Operationen:

- procedure delete(e, pq) löscht e aus pq, falls vorhanden, verändert ggf. pq
- procedure decreaseKey(e, pq, Δ): key(e) := key(e)-Δ, verändert evtl. pq
- procedure merge(pq, pq‘) fügt pq und pq‘ zusammen, verändert ggf. pq und auch pq‘

Prioritätswarteschlangen

- Einfache Realisierung mittels unsortierter Liste:
  - build: Zeit O(n)
  - insert: O(1)
  - min, deleteMin: O(n)
- Realisierung mittels sortiertem Feld:
  - build: Zeit O(n log n) (sortieren)
  - insert: O(n) (verschiebe Elemente in Feld)
  - min, deleteMin: O(1) (mit Anfangszeiger)

Bessere Struktur als Liste oder Feld möglich!

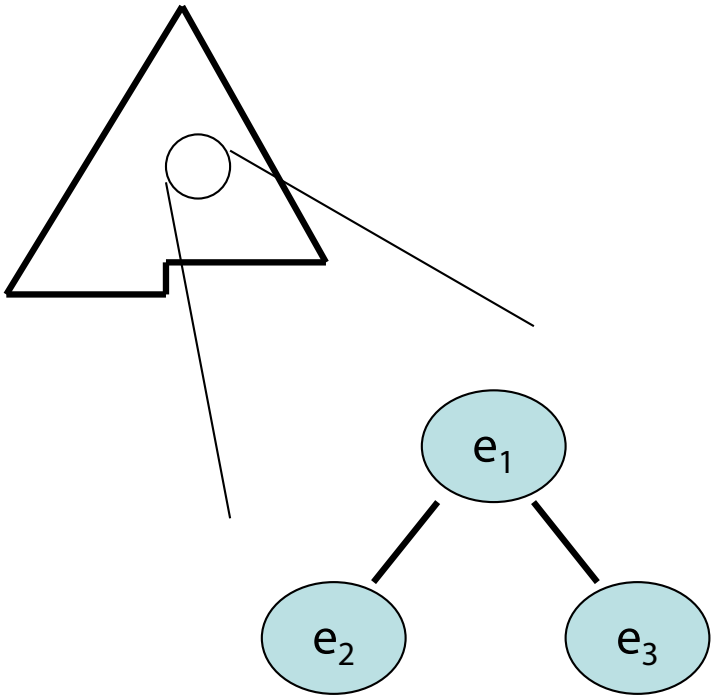
Binärer Heap (Wiederholung)

Idee: verwende binären Baum statt Liste

Bewahre zwei Invarianten:

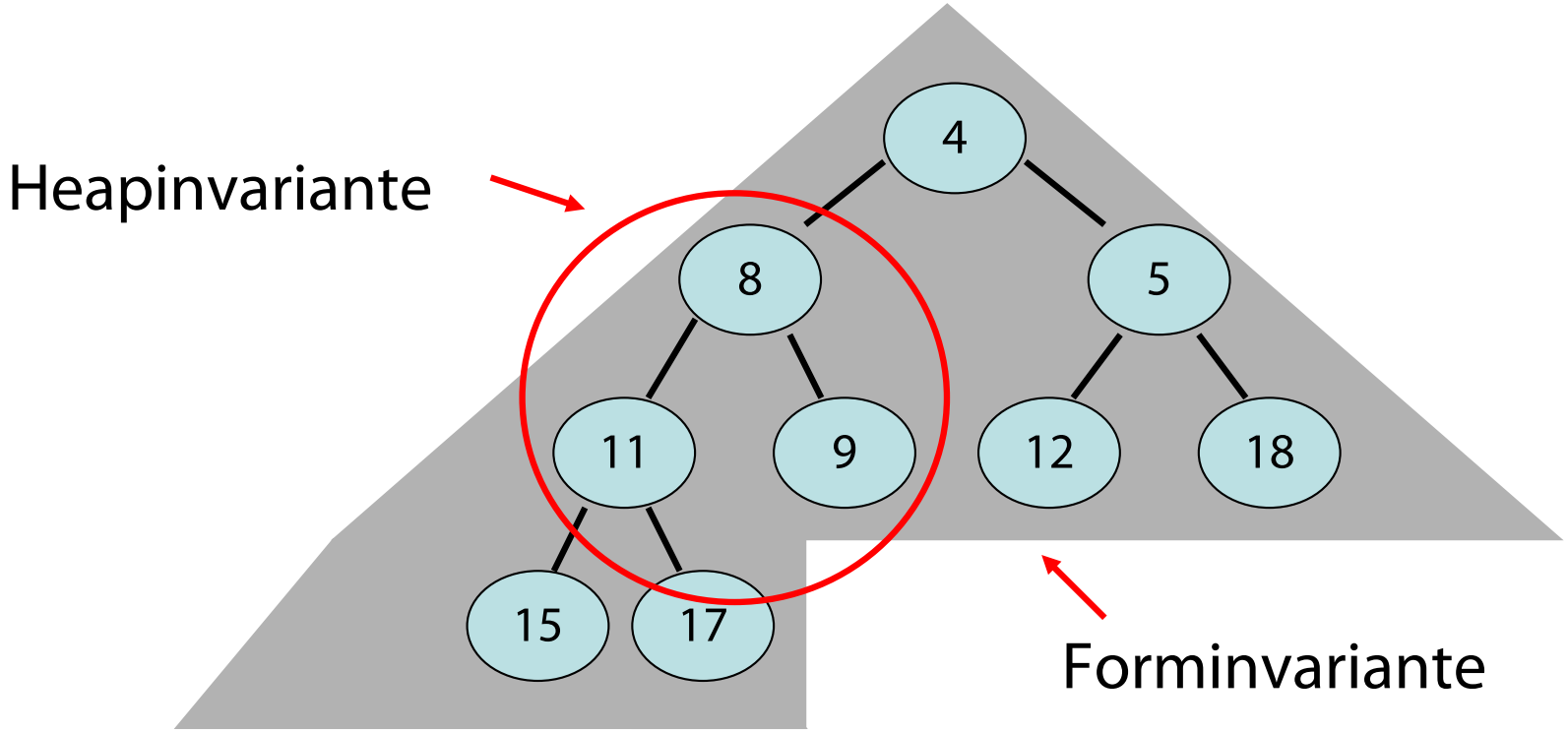
- Form-Invariante:
  vollst. Binärbaum bis auf unterste Ebene
- (Min)Heap-Invariante:

$key(e_1) \leq min(\{ key(e_2), key(e_3) \})$
für die Kinder e_2 und e_3 von e_1



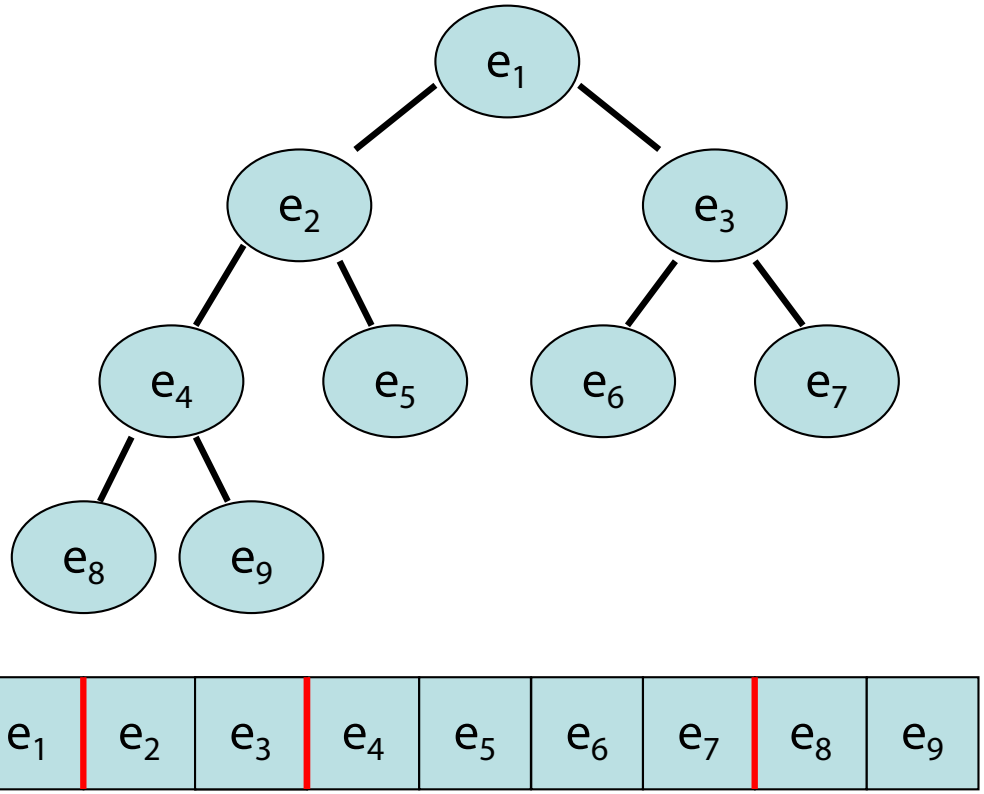
Binärer Heap (Wiederholung)

Beispiel:



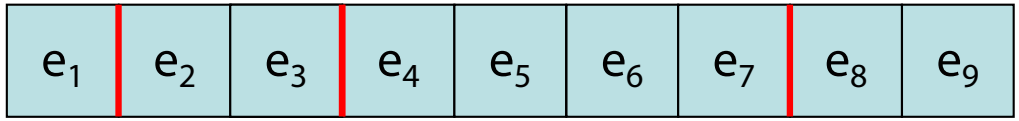
Binärer Heap (Wiederholung)

Realisierung eines Binärbaums als Feld:



Binärer Heap (Wiederholung)

Realisierung eines Binärbaums als Feld:

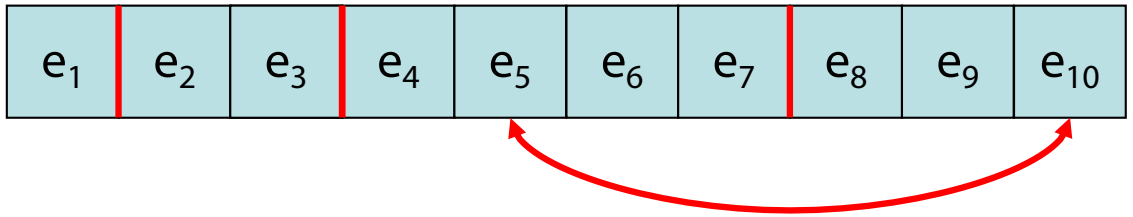


- H: Array [1..n]
- Kinder von e in H[i]: in H[2i], H[2i+1]
- Form-Invariante: H[1],…,H[k] besetzt für k≤n
- Heap-Invariante:

  key(H[i])≤min({ key(H[2i]), key(H[2i+1]) })

Binärer Heap (Wiederholung)

Realisierung eines Binärbaums als Feld:



insert(e, pq): Sei H das Trägerfeld von pq (H = heap(pg))

- Form-Invariante: n:=n+1; H[n]:=e
- Heap-Invariante: vertausche e mit Vater
  bis key(H[$\lfloor k/2 \rfloor$]) ≤ key(e) für e in H[k]
  oder e in H[1]

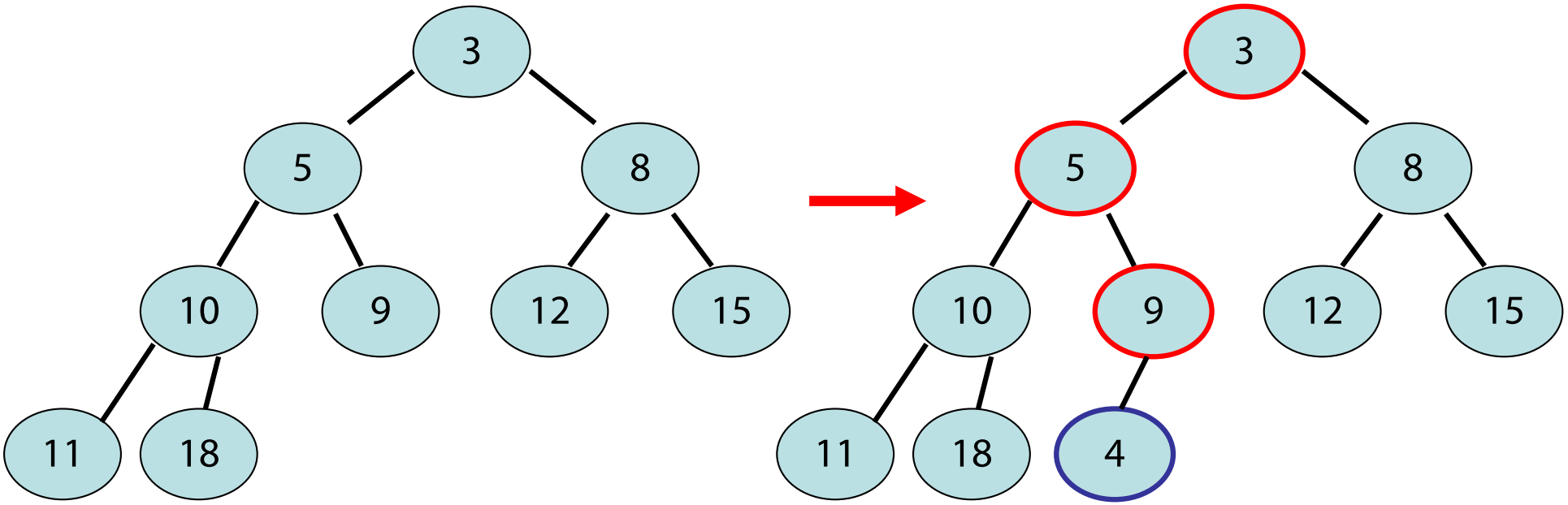
Insert Operation

Procedure insert(e, pq)
    H:=heap(pq); n:=n+1; H[n]:=e
    siftUp(n, H)

Procedure siftUp(i, H)
    while i>1 and key(H[⌊i/2⌋]) > key(H[i]) do
        temp := H[i]; H[i] := H[⌊i/2⌋]; H[⌊i/2⌋] := temp;
        i:=⌊i/2⌋

Laufzeit: O(log n)

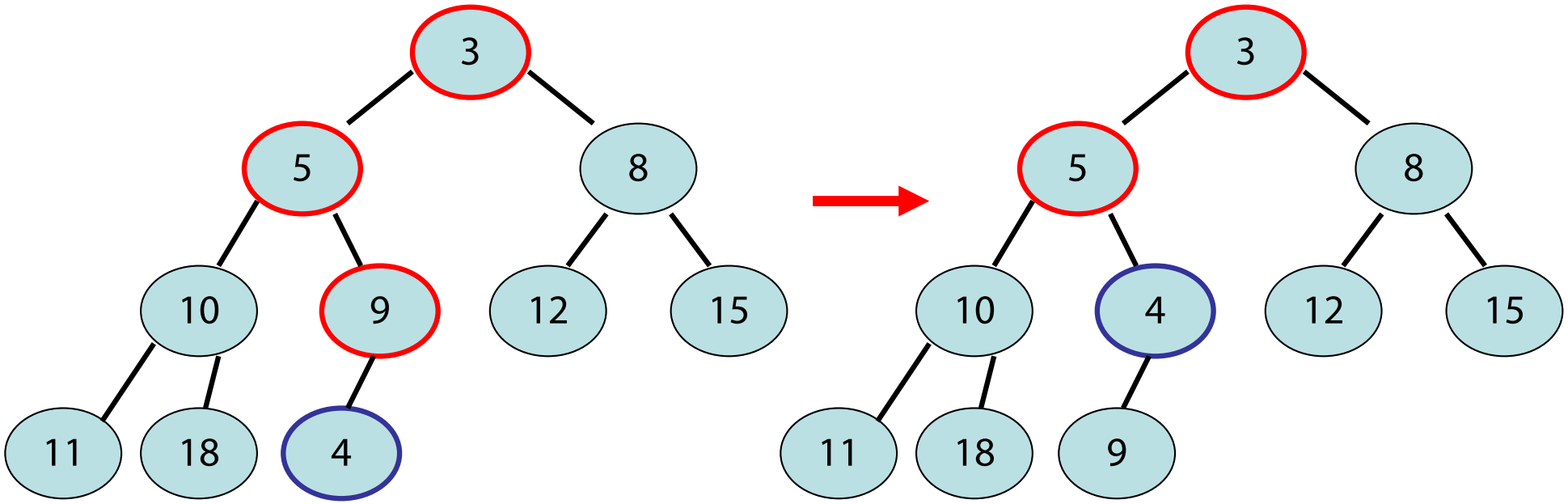
Insert Operation - Korrektheit



Invariante: H[k] ist minimal für Teilbaum von H[k]

: Knoten, die Invariante eventuell verletzen

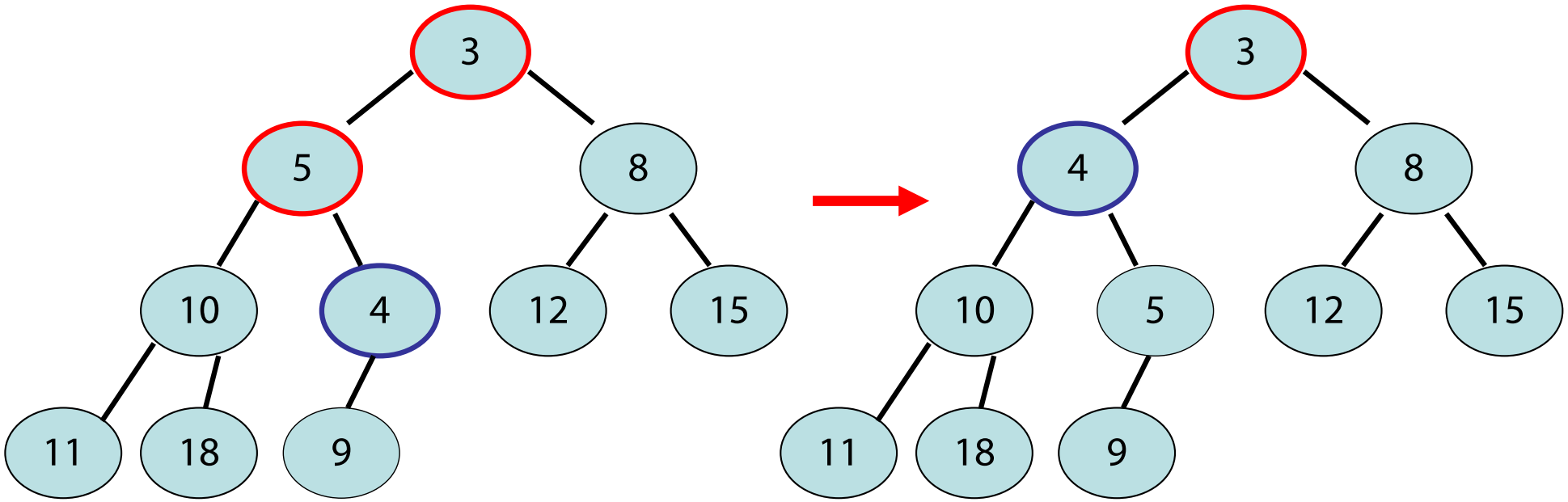
Insert Operation - Korrektheit



Invariante: H[k] ist minimal für Teilbaum von H[k]

: Knoten, die Invariante eventuell verletzen

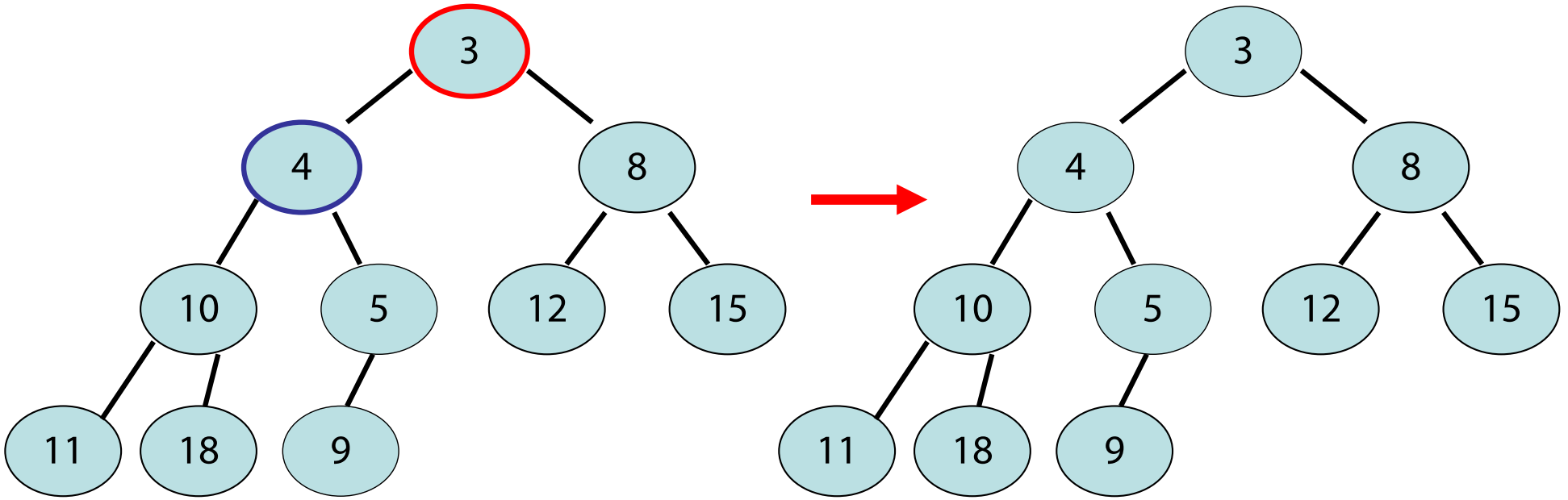
Insert Operation - Korrektheit



Invariante: H[k] ist minimal für Teilbaum von H[k]

: Knoten, die Invariante eventuell verletzen

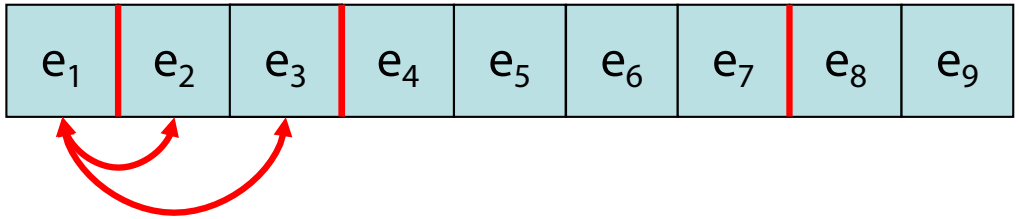
Insert Operation - Korrektheit



Invariante: H[k] ist minimal für Teilbaum von H[k]

: Knoten, die Invariante eventuell verletzen

Binärer Heap



deleteMin(pq):

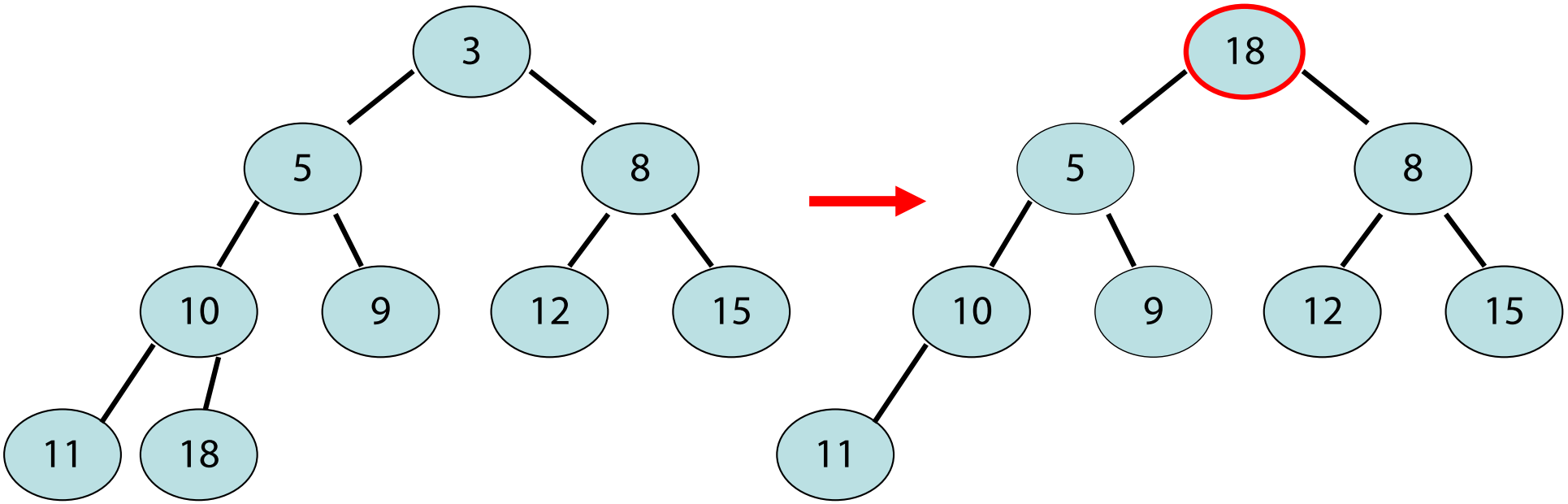
- Form-Invariante: H[1]:=H[n]; n:=n-1
- Heap-Invariante: starte mit Element e in H[1].
  Vertausche e mit Kind mit min Schlüssel bis
  $H[k] \leq \min(\{ H[2k], H[2k+1] \})$ für Position k von e
  oder e in Blatt

Binärer Heap

```
function deleteMin(pq):
    H:=heap(pq); e:=H[1]; H[1]:=H[n]; n:=n-1
    siftDown(1, H)
    return e                                          Laufzeit: O(log n)

procedure siftDown(i, H)
    while 2i≤n do
      if 2i+1>n then m:=2i  // m: Pos. des min. Kindes
      else
        if key(H[2i]) < key(H[2i+1])
          then m:=2i
          else m:=2i+1
      if key(H[i])≤key(H[m])
        then exit    // Heap-Inv gilt
      temp := H[i]; H[i] := H[m]; H[m] := temp;
      i:=m
```

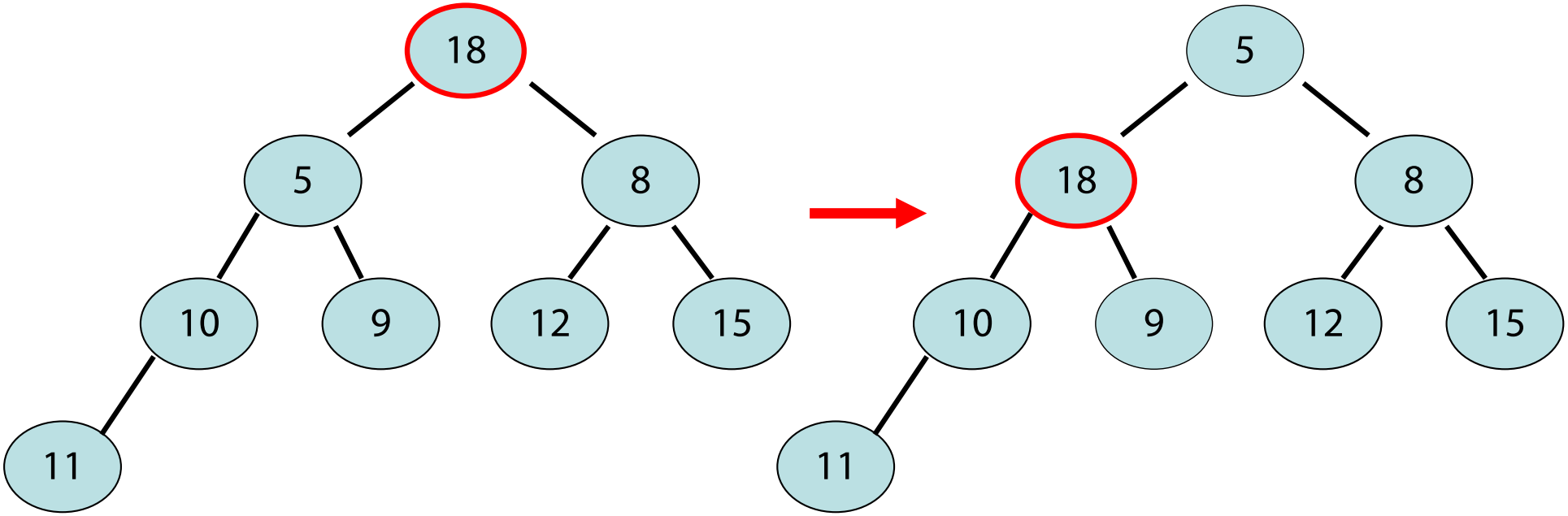
deleteMin Operation - Korrektheit



Invariante: H[k] ist minimal für Teilbaum von H[k]

: Knoten, die Invariante eventuell verletzen

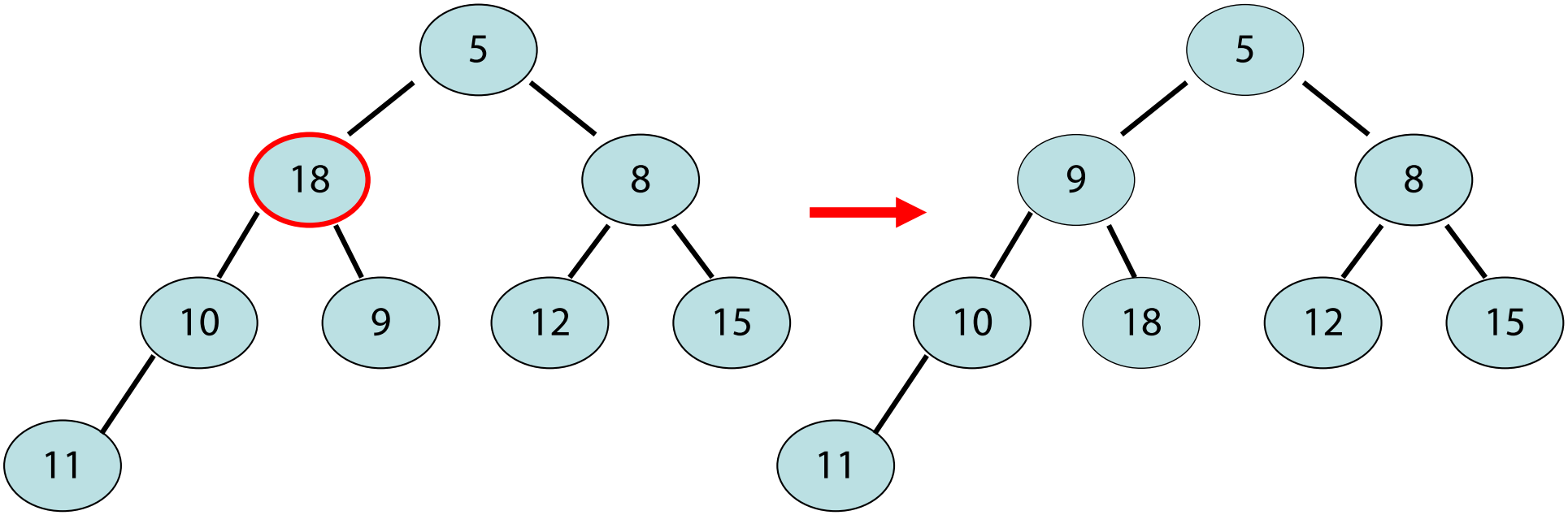
deleteMin Operation - Korrektheit



Invariante: H[k] ist minimal für Teilbaum von H[k]

: Knoten, die Invariante eventuell verletzen

deleteMin Operation - Korrektheit



Invariante: H[k] ist minimal für Teilbaum von H[k]

: Knoten, die Invariante eventuell verletzen

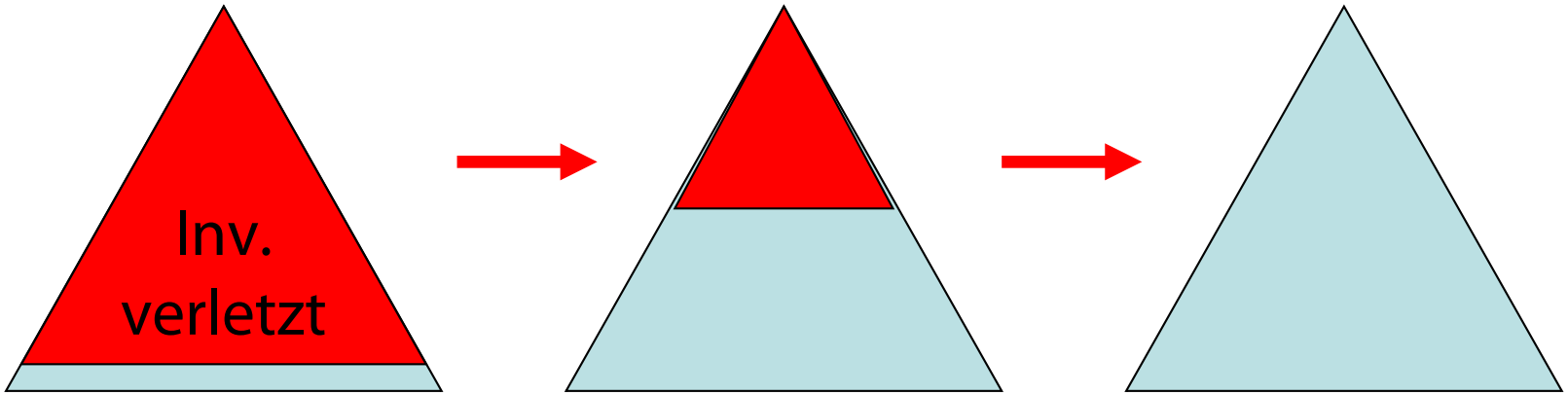
Binärer Heap

build($\{e_1,\ldots,e_n\}$):

- Naive Implementierung: über n insert(e)-Operationen. Laufzeit O(n log n)
- Bessere Implementierung:
  Setze $H[i]:=e_i$ für alle i. Rufe siftDown(i) auf
  für $i=\lfloor n/2 \rfloor$ runter bis 1 (d.h. von der vorletzten Ebene hoch bis zur obersten Ebene)

Binärer Heap: Operation build

Setze $H[i]:=e_i$ für alle i. Rufe siftDown(i, H) für $i=\lfloor n/2 \rfloor$ runter bis 1 auf.



Invariante: Für alle $j>i$: $H[j]$ minimal für Teilbaum von $H[j]$

Aufwand? Sicher $O(n \log n)$, siehe vorige Überlegungen

Unnötig pessimistisch (besser gesagt: asymptotisch nicht eng)

Aufwand für build

- Die Höhe des Baumes, in den eingesiebt wird, nimmt zwar von unten nach oben zu, ...
- ... aber für die meisten Knoten ist die Höhe „klein“
  (die meisten Knoten sind unten)
- Ein n-elementiger Heap hat Höhe log n ...
- ... und maximal $\lceil n/2^{h+1} \rceil$ viele Knoten (Teilbäume) mit Höhe h
- siftDown, aufgerufen auf Ebene h, braucht h Schritte
- Der Aufwand für build ist also

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil O(h) = O\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{h}{2^h}\right) = O\left(n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h}\right) = O(n)$$

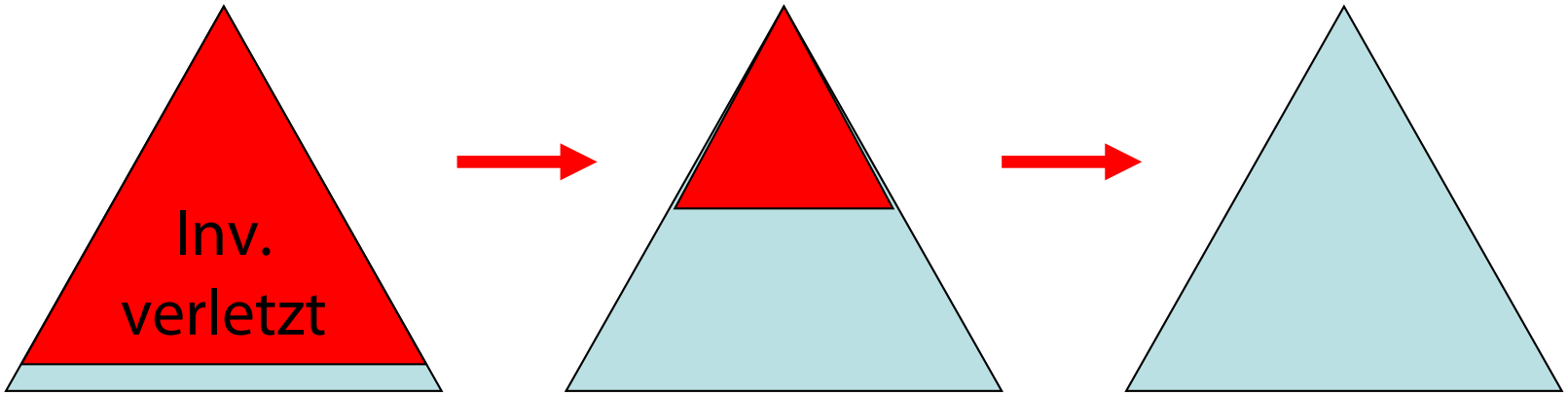
- wobei wir x = ½ setzen in $\sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$ for $|x| < 1$.

Ergibt sich aus der Ableitung der geometrischen Reihe mit $a_0 = 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}$$

Binärer Heap: Operation build

Setze $H[i]:=e_i$ für alle i. Rufe siftDown(i, H) für $i=\lfloor n/2 \rfloor$ runter bis 1 auf.



Invariante: Für alle $j>i$: $H[j]$ minimal für Teilbaum von $H[j]$

Aufwand ist gekennzeichnet durch eine Funktion in $O(n)$

Binärer Heap

Laufzeiten:

- build: O(n)
- insert: O(log n)
- min: O(1)
- deleteMin: O(log n)

Erweiterte Prioritätswarteschlange

Zusätzliche Operationen:

- delete(e, pq)
- decreaseKey(e, pq, Δ)
- merge(pq, pq´)

Delete und decreaseKey in Zeit O(log n) in Heap (wenn Position von e bekannt), aber merge ist teuer (Θ(n) Zeit)!

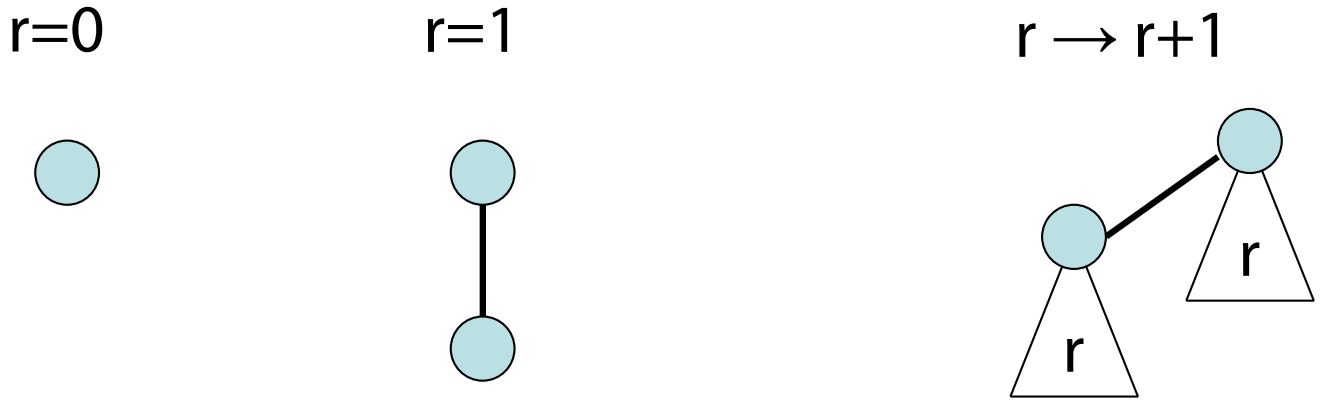
R. Mendelson, R. Tarjan, M. Thorup, and U. Zwick.
Melding Priority Queues. Proceedings of 9th SWAT, **2004**

Binomial-Heap zum schnellen Verschmelzen

Binomial-Heap basiert auf sog. Binomial-Bäumen

Binomial-Baum muss erfüllen:

- Form-Invariante (r: Rang):

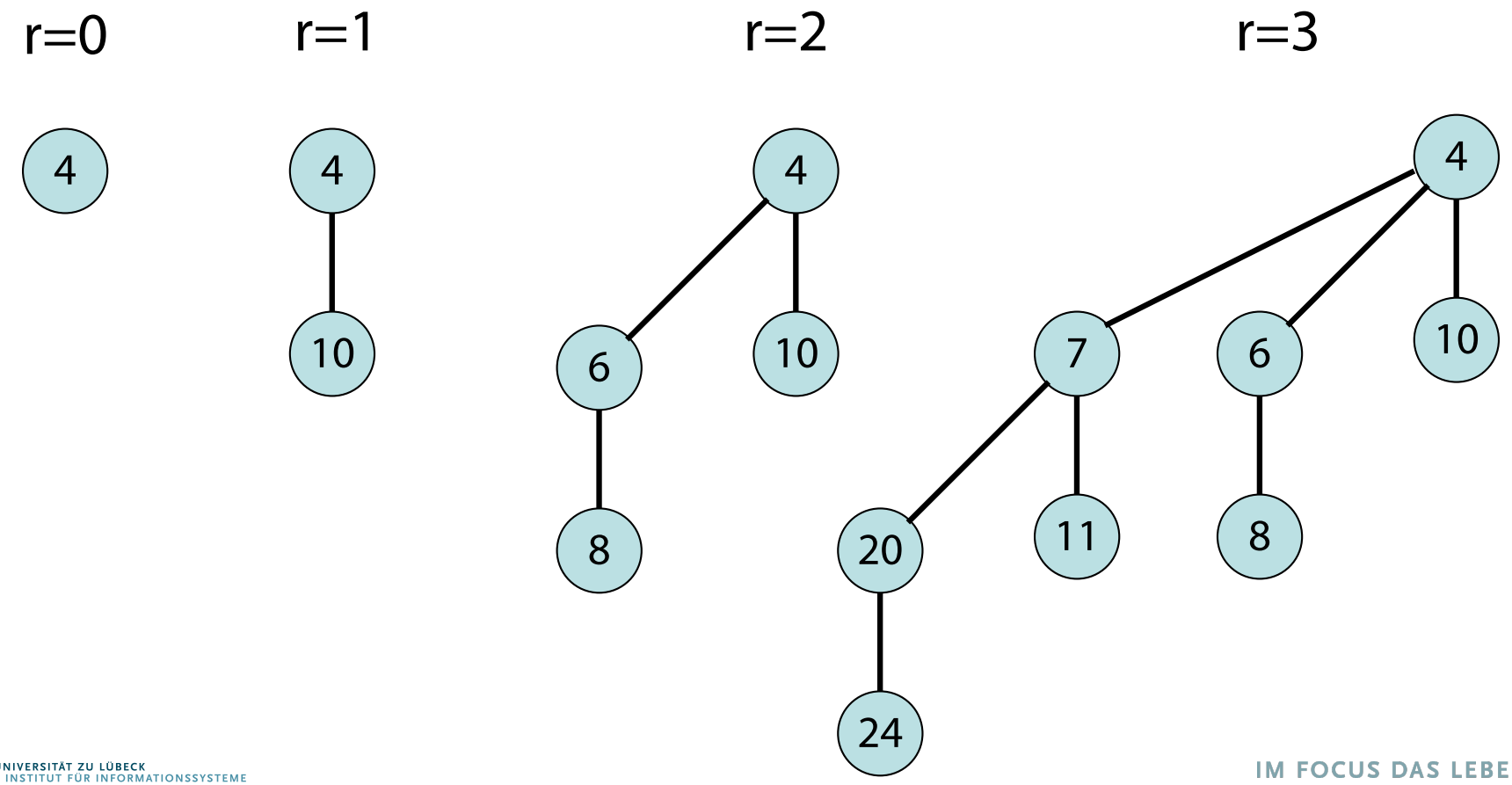


- Heap-Invariante: key(Vater) ≤ key(Kinder)

Jean Vuillemin: A data structure for manipulating priority queues. Communications of the ACM 21, S. 309–314, **1978**

Binomial-Heap

Beispiel für korrekte Binomial-Bäume:



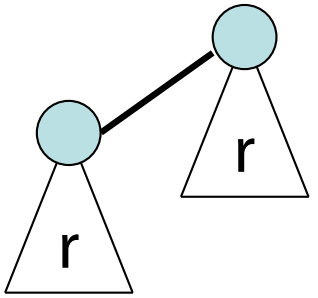
Binomial-Heap

Eigenschaften von Binomial-Bäumen:

r=0

r=1

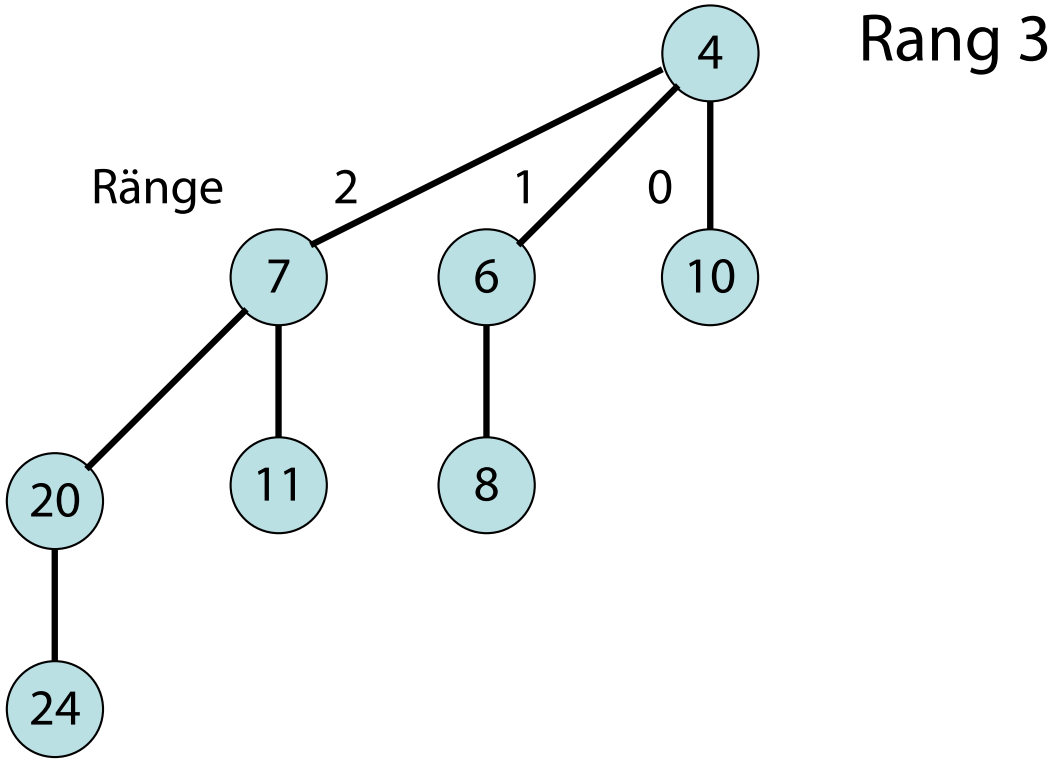
r ⟶ r+1



- 2^r Knoten
- maximaler Grad r (bei Wurzel)
- Wurzel weg: Zerfall in Binomial-Bäume mit Rang 0 bis r-1

Binomial-Heap

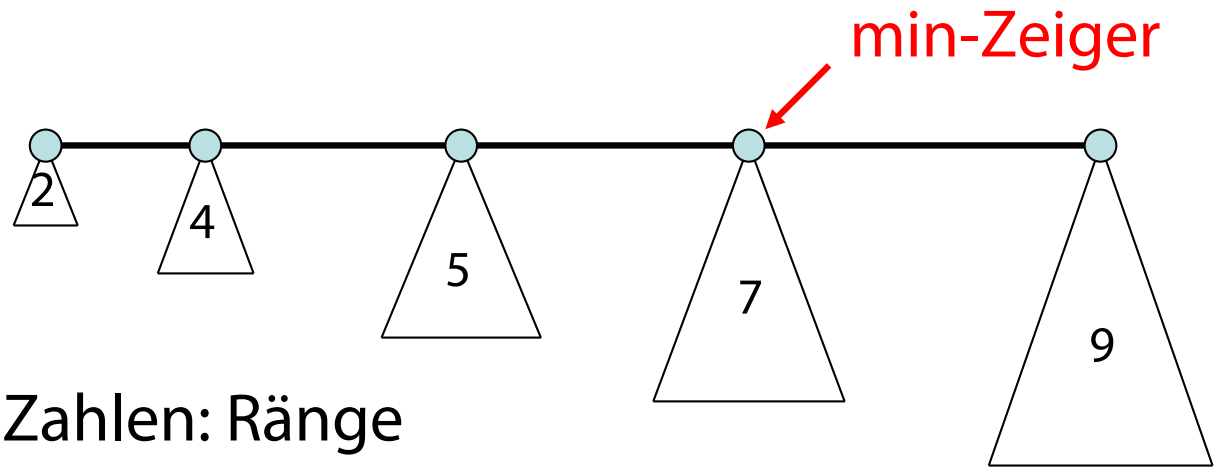
Beispiel für Zerfall in Binomial-Bäume mit Rang 0 bis r-1



Binomial-Heap

Binomial-Heap:

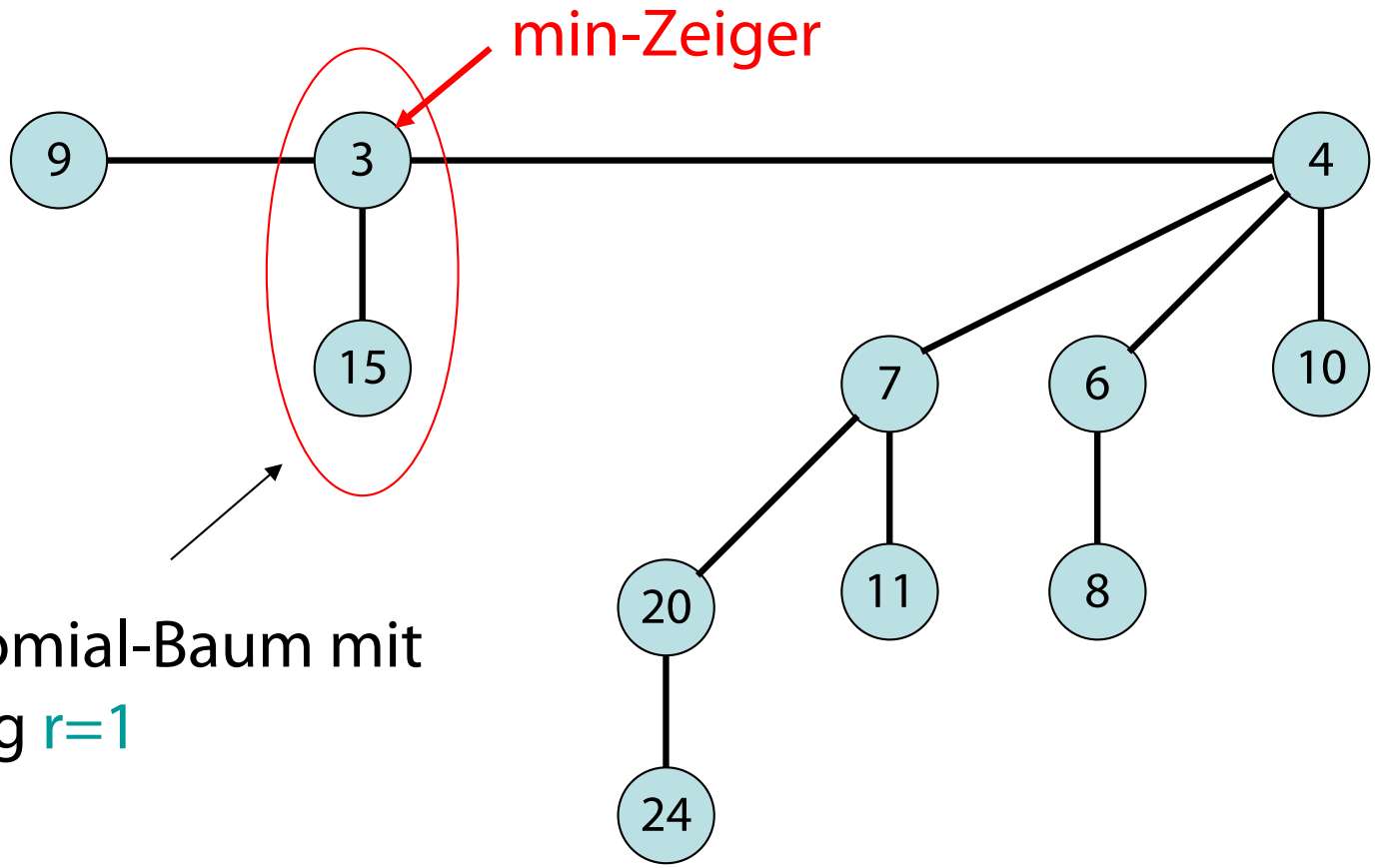
- verkettete Liste von Binomial-Bäumen
- Pro Rang maximal 1 Binomial-Baum
- Zeiger auf Wurzel mit minimalem key



Zahlen: Ränge

Binomial-Heap

Beispiel eines korrekten Binomial-Heaps:



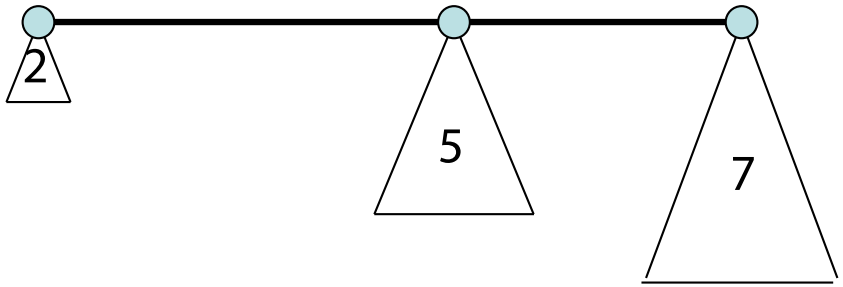
Binomial-Baum mit Rang r=1

Anzahl der Bäume auf der Kette

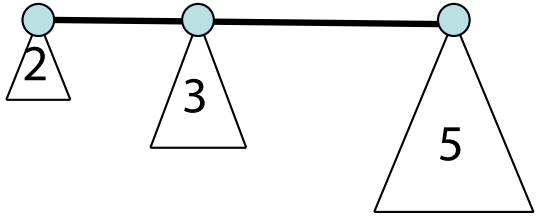
- Binomial-Heap-Invariante:
  Pro Rang maximal 1 Binomial-Baum
- Was heißt das?
- Für n Knoten können höchstens log n viele Binomialbäume in der Kette vorkommen
  (dann müssen alle Knoten untergebracht sein)

Binomial-Heap

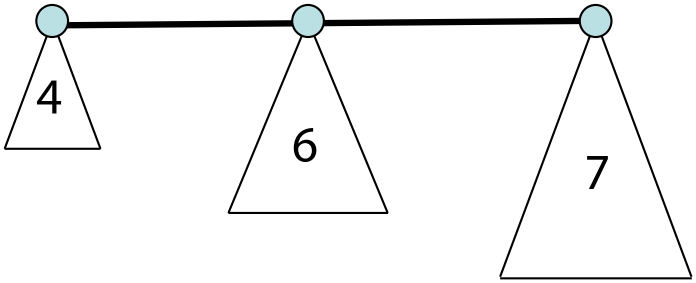
Merge von Binomial-Heaps H_1 und H_2:



H_1



H_2



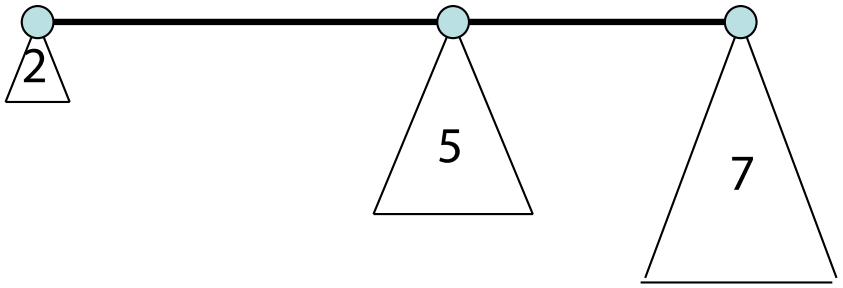
wie Binäraddition

10100100

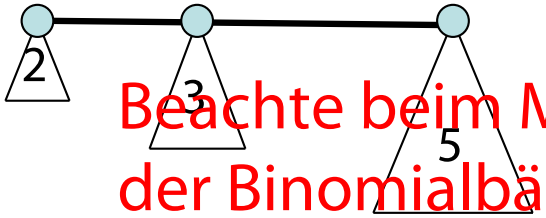
+ 101100

11010000

Beispiel einer Merge-Operation



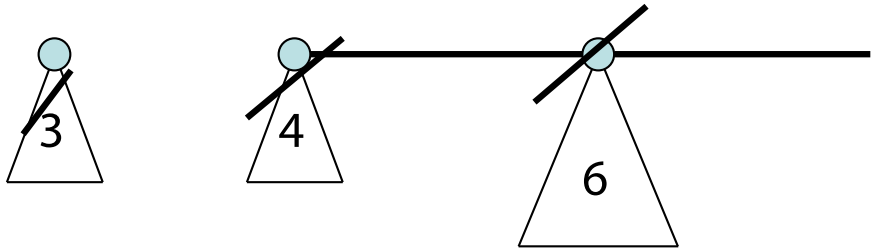
H_1



H_2

Beachte beim Mergen der Binomialbäume die Heap-Eigenschaft!

Zahlen geben die Ränge an



Ergebnis-Heap

Operationen auf Binomial-Heaps

Sei B_i: Binomial-Baum mit Rang i

- merge(pq, pq'): Aufwand für Merge-Operation: O(log n)
- insert(e, pq): Merge mit B_0, Zeit O(log n)
- min: spezieller Zeiger, Zeit O(1)
- deleteMin: sei Minimum in Wurzel von B_i,
  Löschen von Minimum: $B_i \rightarrow B_0,\ldots,B_{i-1}$. Diese zurückmergen in Binomial-Heap. Zeit dafür O(log n).

Binomial-Heap

- decreaseKey(e, pq, Δ): siftUp-Operation in Binomial-Baum von e und aktualisierte min-Zeiger. Zeit O(log n)

- delete(e, pq): (min-Zeiger zeigt nicht auf e) setze key(e):= $-\infty$ und wende siftUp-Operation auf e an, bis e in der Wurzel; dann weiter wie bei deleteMin.
  Zeit O(log n)

Anwendungen für log-n-merge

- Lastumverteilung
  - Delegierung der Aufträge für einen Prozessor an einen anderen (evtl. schnelleren) Prozessor
- Reduce-Operation, Mischung von parallel ermittelten Ergebnissen, jeweils mit Bewertung bzw. Sortierung

Zusammenfassung

Laufzeit	Binärer-Heap	Binomial-Heap
insert	O(log n)	O(log n)
min	O(1)	O(1)
deleteMin	O(log n)	O(log n)
delete	O(log n)	O(log n)
decreaseKey	O(log n)	O(log n)
merge	O(n)	O(log n)

Datenstruktur Fibonacci-Heap

- Baut auf Binomial-Bäumen auf,
  aber erlaubt lazy merge und lazy delete.

- Lazy merge: keine Verschmelzung von Binomial-Bäumen gleichen Ranges bei merge, nur Verkettung der Wurzellisten

- Lazy delete: erzeugt unvollständige Binomial-Bäume

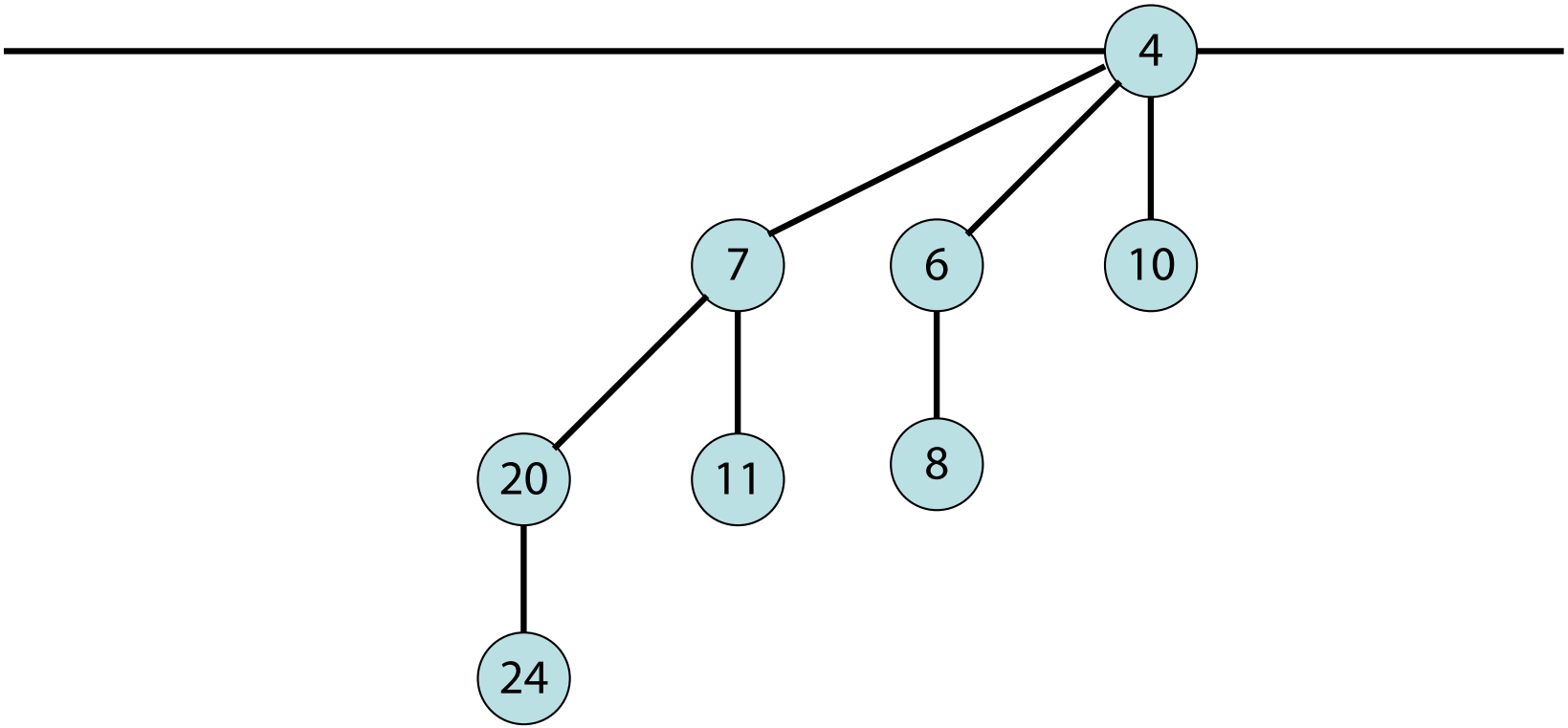
Der Name rührt von der Analyse der Datenstruktur her, bei der Fibonacci-Zahlen eine große Rolle spielen (wird nachher deutlich)

Michael L. Fredman, Robert E. Tarjan: Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms. In: Journal of the ACM. 34, Nr. 3, S. 596–615, **1987**

Fibonacci-Heap

Baum in Binomial-Heap: Zentrale Invariante

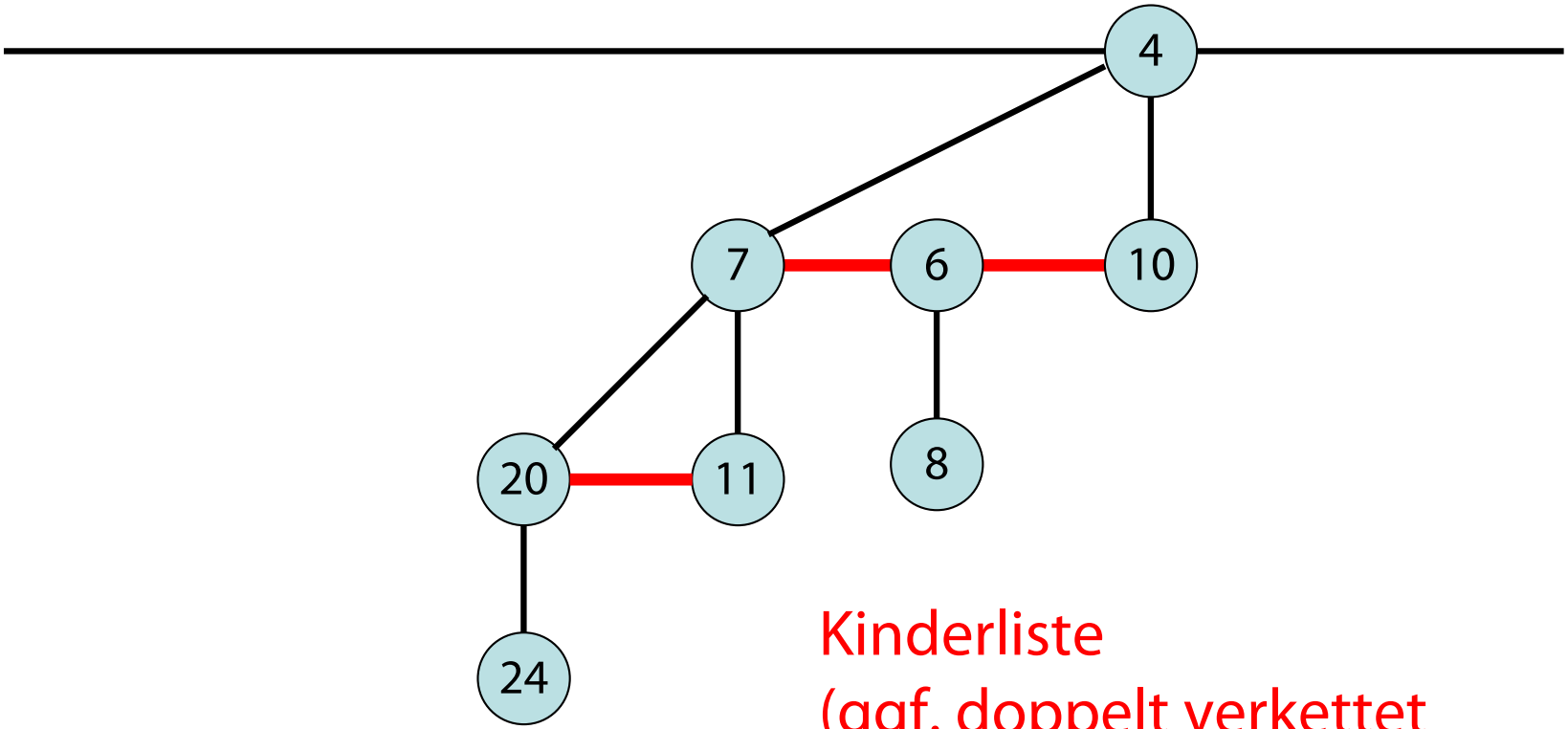
Rang = Anzahl der Kinder des Wurzelknotens



Fibonacci-Heap: Anpassung der Struktur

Baum in Fibonacci-Heap: Zentrale Invariante

Rang = Anzahl der Kinder des Wurzelknotens



Kinderliste
(ggf. doppelt verkettet
dito für Wurzelliste)

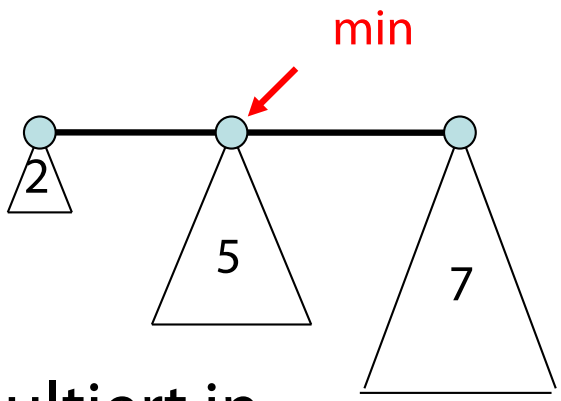
Fibonacci-Heap

Jeder Knoten merkt sich:

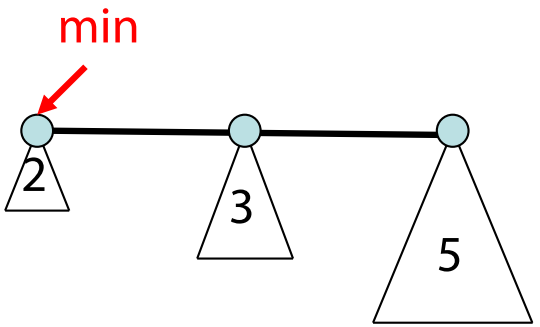
- im Knoten gespeichertes Element
- Vater
- Liste der Kinder (mit Start- und Endpunkt)
- Rang

Fibonacci-Heap: Lazy-Merge

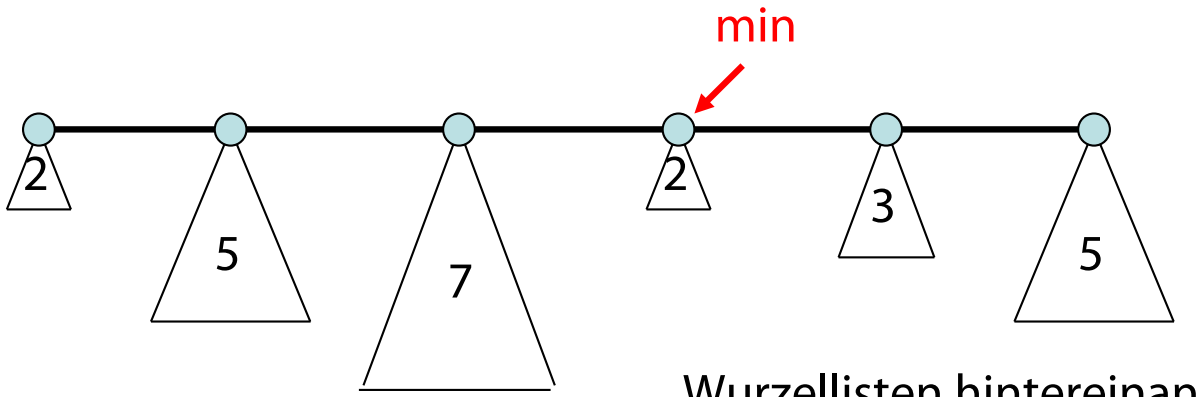
Lazy merge von



&



resultiert in



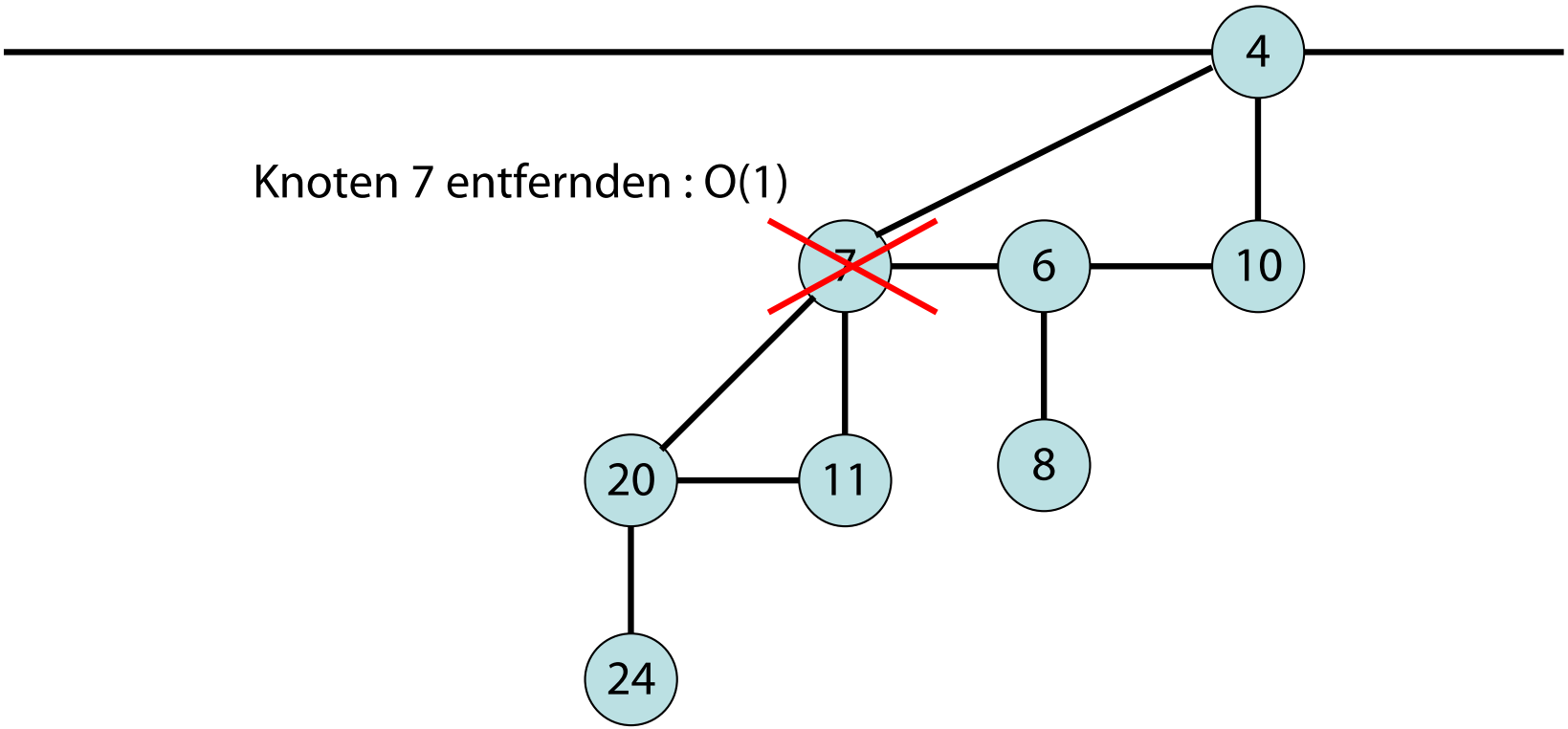
Wurzellisten hintereinanderhängen: O(1)

Fibonacci-Heap: Lazy-Delete

Lazy delete:

Kinderliste in Wurzelliste integrieren: O(1)

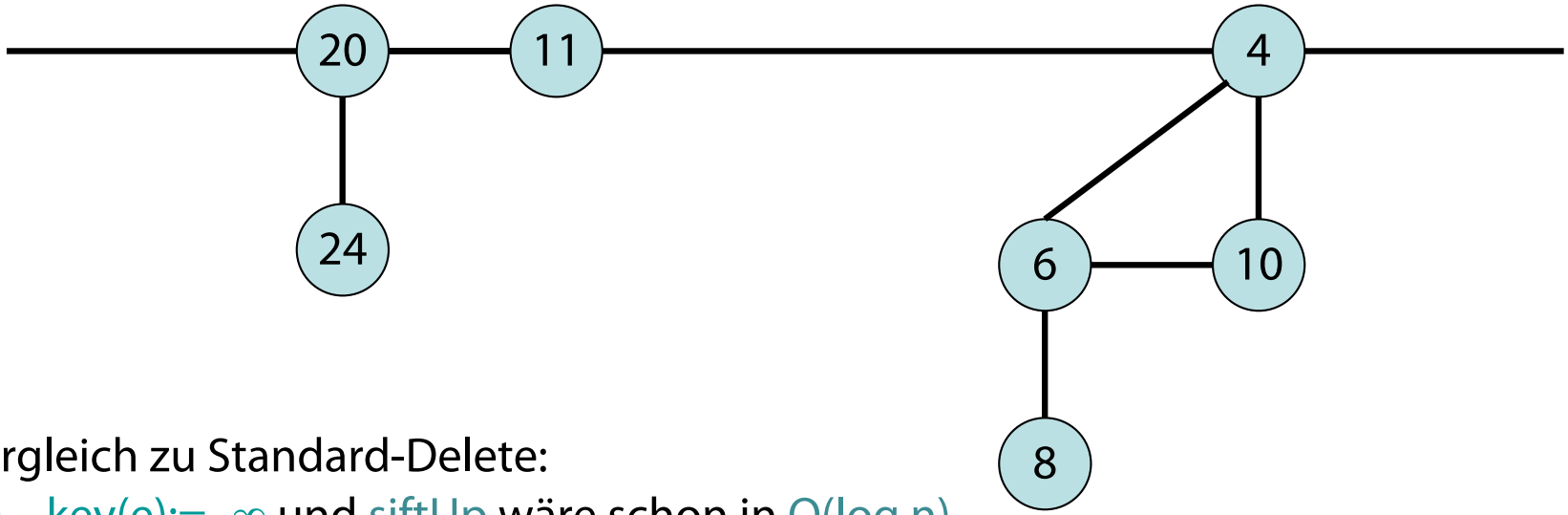
Knoten 7 entfernden : O(1)



Fibonacci-Heap: Lazy-Delete

Lazy delete:

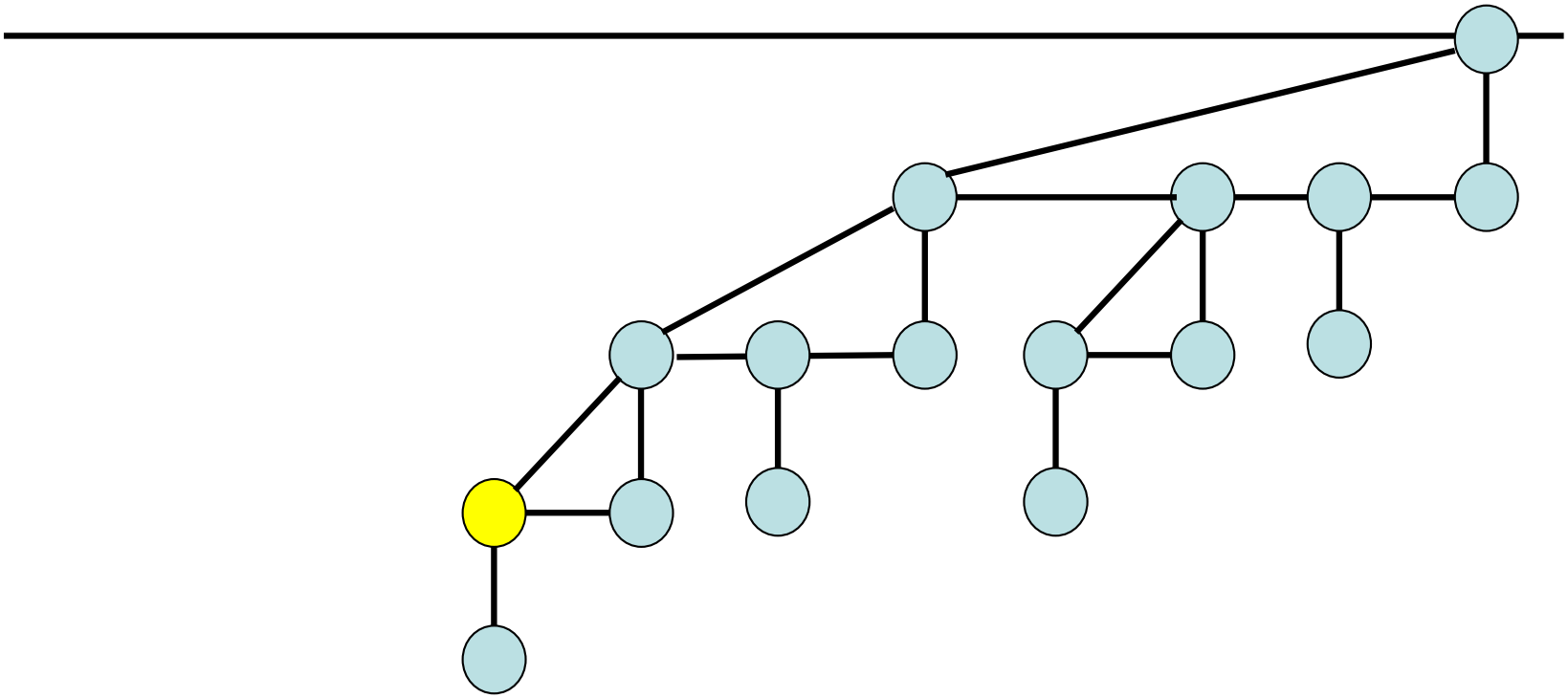
Annahme: Knoten 7 ist im direkten Zugriff
Aufwand: O(1), da gegebener Knoten 7 in
O(1) Zeit entfernbar und Kinderliste
von 7 in O(1) Zeit in Wurzelliste integrierbar



- Vergleich zu Standard-Delete:
  - key(e):= -∞ und siftUp wäre schon in O(log n)
- Also kein siftUp
- Problem:
  - Bäume gleichen Ranges treten in der Wurzelliste auf
  - Binomial-Heap-Eigenschaft kann verletzt sein

Fibonacci-Heap

Beispiel für delete(x)



Fibonacci-Heap: Übersicht

Operationen:

- merge: Verbinde Wurzellisten, aktualisiere min-Pointer: Zeit O(1)
- insert(x, pq): Füge B_0 (mit x) in Wurzelliste ein, aktualisiere min-Pointer. Zeit O(1)
- min(pq): Gib Element, auf das der min-Pointer zeigt, zurück. Zeit O(1)
- deleteMin(pq), delete(x, pq), decreaseKey(x, pq, Δ): noch zu bestimmen…

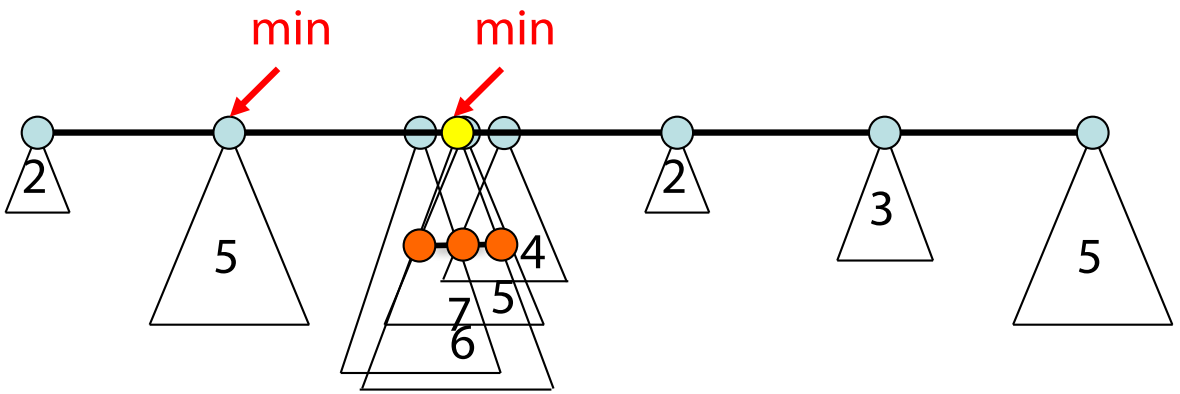
Fibonacci-Heap

deleteMin(pq): Diese Operation hat Aufräumfunktion.
Der min-Pointer zeige auf x.

procedure deleteMin()
entferne x aus Wurzelliste
konkateniere Kinderliste von x mit Wurzelliste
while *≥2 Bäume mit gleichem Rang i* **do**
merge Bäume zu Baum mit Rang i+1 // (wie bei zwei Binomial-Bäumen)
aktualisiere den min-Pointer

- Durch die Integration der Kinderliste in die Wurzelliste können dort Bäume gleichen Ranges auftreten, die Struktur wird jedoch danach konsolidiert
- Die schon durch delete auftretenden Heaps gleichen Ranges werden gleich mit behandelt!

Beispiel: deleteMin

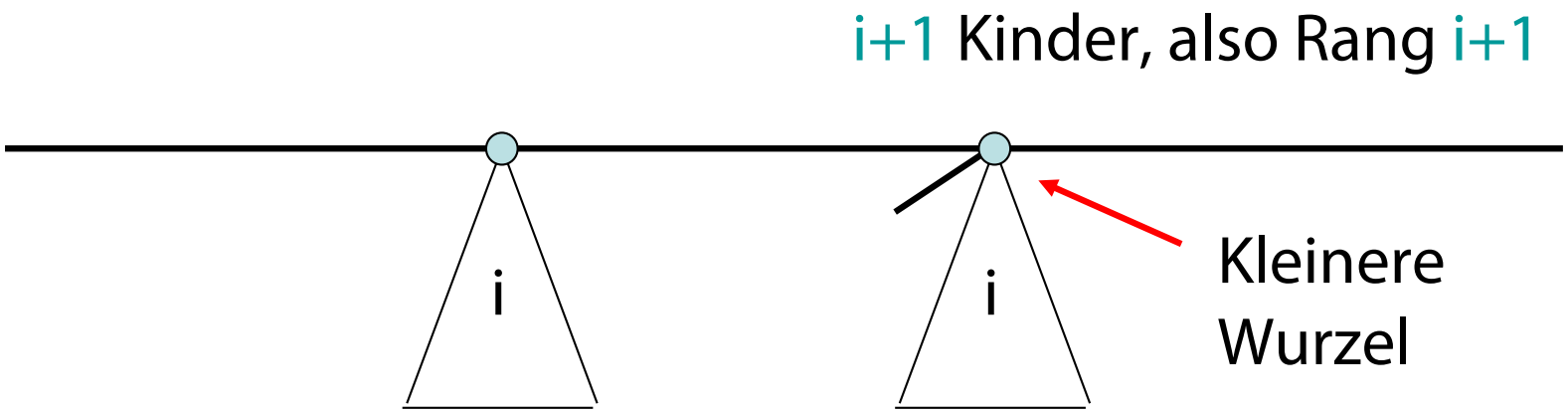


vorher

Fibonacci-Heap

Verschmelzung zweier Bäume mit Rang i

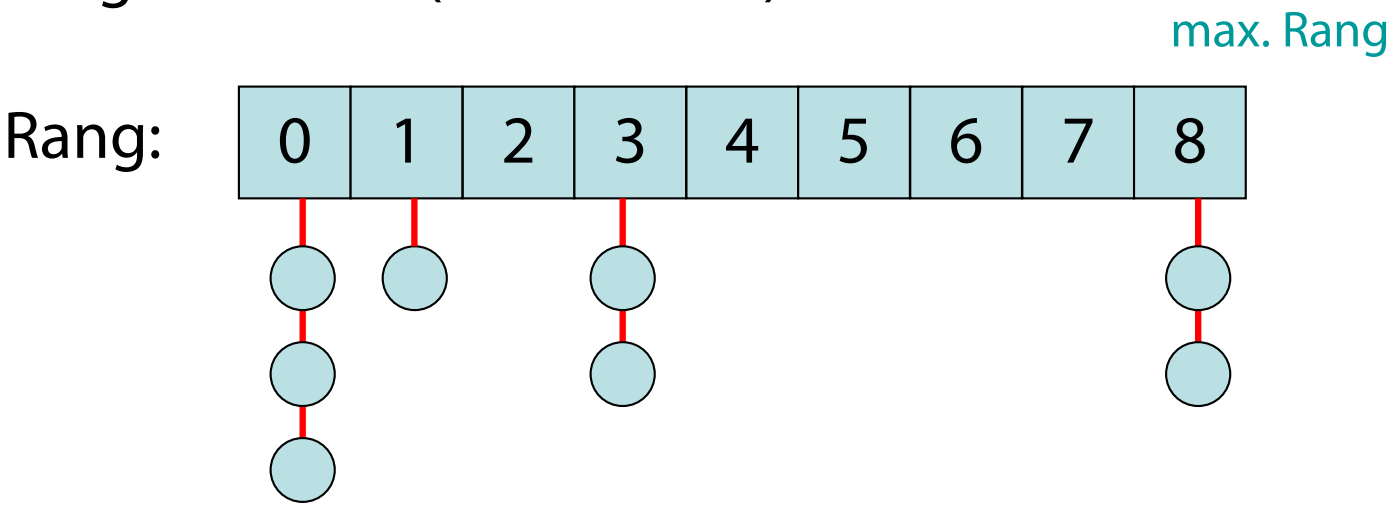
(d.h. Wurzel hat i Kinder):



Fibonacci-Heap

Effiziente Findung von Wurzeln mit gleichem Rang:

- Scanne vor while-Schleife alle Wurzeln und speichere diese nach Rängen in Feld (Eimerkette!):



- Merge dann wie bei Binomialbäumen von Rang 0 an bis maximaler Rang erreicht (wie Binäraddition)

Operation delete

- Konsolidierung im Inneren der Heaps

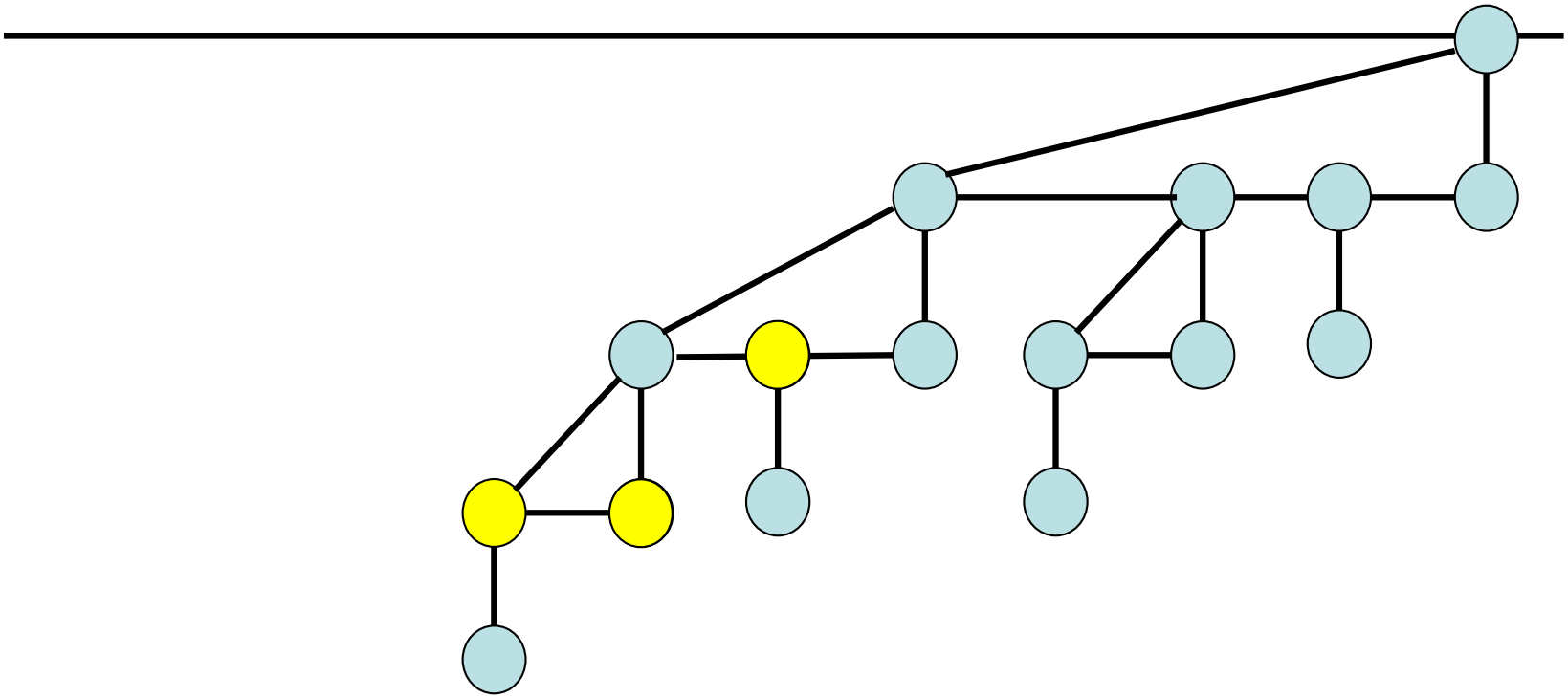
Fibonacci-Heap

Sei parent(x) Vater von Knoten x. Wenn x neu eingefügt wird, ist Mark(x)=0. (Mark(x) speichert, ob Kinder schon weg.)

```
procedure delete(x):
    if x ist min-Wurzel then
       deleteMin()
    else
      lösche x, füge Kinder von x in Wurzelliste ein
    if not parentExists(x) then
      exit   // x ist Wurzel
    while true do
       x:=parent(x)
       if not parentExists(x) then
           exit     // x ist Wurzel
       if Mark(x)=0 then
           Mark(x):=1
           exit
       else      // Mark(x)=1, also schon Kind weg
          hänge x samt Unterbaum in Wurzelliste
          Mark(x):=0  // Wurzeln benötigen kein Mark
```

Fibonacci-Heap

Beispiel für delete(x): (: Mark=1)



Fibonacci-Heap

```
procedure decreaseKey(x,Δ):
    füge x samt Unterbaum in Wurzelliste ein
    key(x):=key(x)-Δ
    aktualisiere min-Pointer
   if not parentExists(x) then
      exit // war x Wurzel?
    while true do
      x:=parent(x)
      if not parentExists(x) then
        exit // x ist Wurzel
      if Mark(x)=0 then
        Mark(x):=1
        exit
      else      // Mark(x)=1
        hänge x samt Unterbaum in Wurzelliste
        Mark(x):=0
```

Fibonacci-Heap mit markierten Fehlern

Zeitaufwand:

- deleteMin():
  O(max. Rang + #Baumverschmelzungen)
- delete(x), decreaseKey(x,Δ):
  O(1 + #kaskadierende Schnitte)
  d.h. #umgehängter markierter Knoten

Wir werden sehen:

Zeitaufwand kann in beiden Fällen O(n) sein,
aber richtig verteilt viel günstiger.

Strukturfehler: Verschiebung der Arbeit

- Statt bei jedem merge und decreaseKey einen Aufwand von O(log n) zu leisten, ...
- ... wird die Arbeit bei einem deleteMin mit übernommen, ...
- ... mit der Idee, dass man die entsprechenden Strukturen dort sowieso anfassen muss
- Das Umverteilen kann sich über eine längere Sequenz von Operationen durchaus amortisieren
- Vgl. build für binäre Heaps

Amortisierte Analyse

Betrachte Folge von n Operationen auf
anfangs leerem Fibonacci-Heap.

- Summierung der worst-case Kosten viel zu hoch!
- Average-case Analyse auch nicht sehr aussagekräftig
- Besser: amortisierte Analyse, d.h. durchschnittliche Kosten aller Operationen der Sequenz im worst-case Fall (teuerste **Folge**)

Robert Endre Tarjan , Amortized Computational Complexity,
SIAM. J. on Algebraic and Discrete Methods, 6(2), S. 306–318, **1985**

Amortisierte Analyse

- S: Zustandsraum einer Datenstruktur
- F: beliebige Folge von Operationen $Op_1, Op_2, Op_3, \ldots, Op_n$
- s_0: Anfangszustand der Datenstruktur

$$s_0 \xrightarrow{Op_1} s_1 \xrightarrow{Op_2} s_2 \xrightarrow{Op_3} \ldots \xrightarrow{Op_n} s_n$$

- Zeitaufwand $T(F) = \Sigma_{i=1}^{n} T_{Op_i}(s_{i-1})$

Amortisierte Analyse

- Zeitaufwand $T(F) = \Sigma_{i=1}^{n} T_{Op_i}(s_{i-1})$

- Eine Familie von Funktionen $A_X(s)$, eine pro Operation $X \in \{Op_1, Op_2, Op_3, \ldots, Op_n\}$, heißt
  Familie amortisierter Zeitschranken
  falls für jede Sequenz F von Operationen gilt

$$T(F) \leq A(F) := c + \Sigma_{i=1}^{n} A_{Op_i}(s_{i-1})$$

für eine Konstante c unabhängig von F

Amortisierte Analyse: Potentialmethode

Behauptung: Sei S der Zustandsraum einer Datenstruktur, sei s_0 der Anfangszustand und sei $\phi: S \rightarrow R_{\geq 0}$ eine nichtnegative Funktion.

$\phi : S \rightarrow R_{\geq 0}$ wird auch Potential genannt.

Für eine Operation X und einen Zustand s mit $s \xrightarrow{X} s'$ definiere $A_X(s)$ über die Potentialdifferenz:

$$A_X(s) := \phi(s') - \phi(s) + T_X(s) := \Delta\phi(s) + T_X(s)$$

Dann sind die Funktionen $\mathbf{A_X(s)}$ eine **Familie amortisierter Zeitschranken**.

Amortisierte Analyse: Potentialmethode

Zu zeigen: $T(F) \leq c + \Sigma_{i=1}^{n} A_{Op_i}(s_{i-1})$

Beweis:

$$\Sigma_{i=1}^{n} A_{Op_i}(s_{i-1}) = \Sigma_{i=1}^{n} [\phi(s_i) - \phi(s_{i-1}) + T_{Op_i}(s_{i-1})]$$

$$= T(F) + \Sigma_{i=1}^{n} [\phi(s_i) - \phi(s_{i-1})]$$

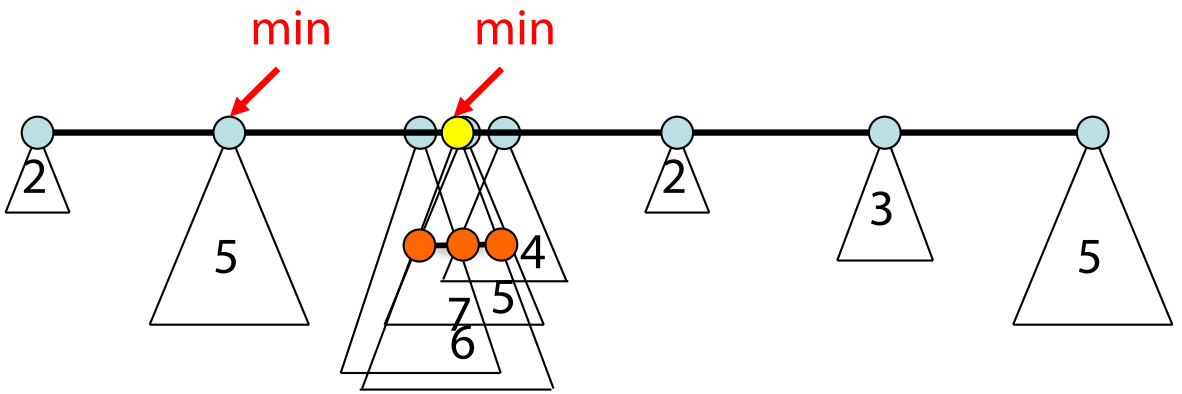
$$= T(F) + \phi(s_n) - \phi(s_0)$$

$$\models T(F) = \Sigma_{i=1}^{n} A_{Op_i}(s_{i-1}) + \phi(s_0) - \phi(s_n)$$

$$\leq \Sigma_{i=1}^{n} A_{Op_i}(s_{i-1}) + \phi(s_0)$$

konstant

Beispiel: deleteMin

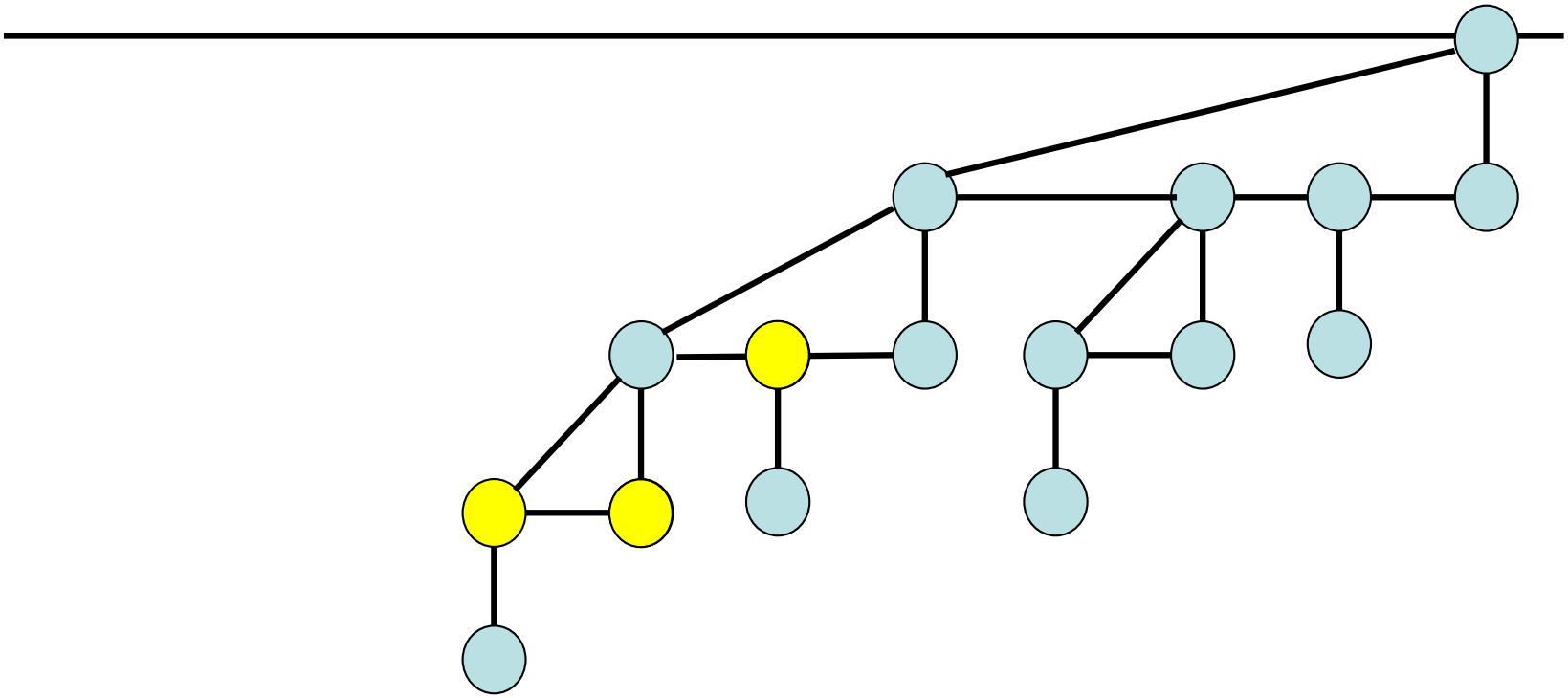


vorher

Dann: Merge von Bäumen gleichen Rangs

Fibonacci-Heap

Beispiel für delete(x): (: Mark=1)



Amortisierte Analyse: Potentialmethode

Für Fibonacci-Heaps verwenden wir für das Potential den Begriff Balance (bal)

bal(s):= #Bäume + 2·#markierte Knoten im Zustand s

Fibonacci-Heap: Eigenschaften

Invariante 1: Sei x ein Knoten im Fibonacci-Heap mit Rang(x)=k. Seien die Kinder von x sortiert in der Reihenfolge ihres Anfügens an x. Dann ist der Rang des i-ten Kindes ≥i-2.

Beweis der Gültigkeit:

- Beim Einfügen des i-ten Kindes ist Rang(x)=i-1.
- Das i-te Kind hat zu dieser Zeit auch Rang i-1.
- Danach verliert das i-te Kind höchstens eines seiner Kinder[1], d.h. sein Rang ist ≥i-2.

[1] Bei einem schon markierten Vater eines gelöschten Knotens wird konsolidiert

Fibonacci-Heap: Eigenschaften

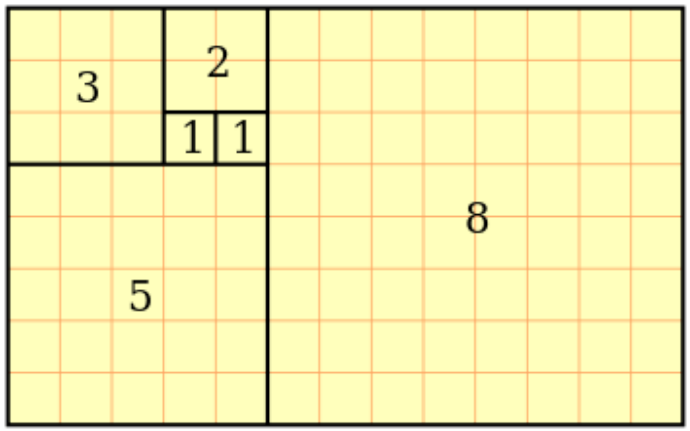
Invariante 2: Sei x ein Knoten im Fibonacci-Heap mit Rang(x)=k. Dann enthält der Baum mit Wurzel x mindestens F_{k+2} Elemente, wobei F_{k+2} die (k+2)-te Fibonacci-Zahl ist.

Einschub: Definition der Fibonacci-Zahlen:

- $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$
- $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ für alle $k > 1$

Daraus folgt, dass $F_{i+2} = 1 + \Sigma_{j=0}^{i} F_j$

Warum? (s.Tafel)



[Wikipedia]

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, usw.

Fibonacci-Heap

Beweis der Gültigkeit von Invariante 2:

- Sei f_k die minimale Anzahl von Elementen in einem Baum mit Rang k.
- Aus Invariante 1 folgt:

  $f_k \geq f_{k-2}+f_{k-3}+\ldots+f_0 + 1 + 1$

  1. Kind

  Wurzel
- Weiterhin ist $f_0=1$ und $f_1=2$
- Also folgt nach den Fibonacci-Zahlen:

  $f_k \geq F_k$

Fibonacci-Heap

- Man hat herausgefunden, dass $F_k > \Phi^k$ ist für

$$\Phi=(1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}618034$$

- D.h. ein Baum mit Rang k im Fibonacci-Heap hat mindestens $1{,}61^k$ Knoten.
- Ein Fibonacci-Heap aus n Elementen hat also Bäume vom Rang maximal O(log n) (wie bei Binomial-Heap)

Warum? (s.Tafel)

http://www.was-darwin-nicht-wusste.de/wunder/mathematische-ueberraschungen.html

aus: [Wikipedia]

Verwandtschaft mit dem Goldenen Schnitt [Bearbeiten]

Wie von Johannes Kepler festgestellt wurde, nähert sich der Quotient zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen dem Goldenen Schnitt Φ an. Dies folgt unmittelbar aus der Näherungsformel für große *n*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi^{n+1}}{\Phi^n} = \Phi \approx 1{,}618\ldots$$

Diese Quotienten zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen haben eine bemerkenswerte Kettenbruchdarstellung

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{2}{1} = 1+\frac{1}{1} \qquad \frac{3}{2} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}} \qquad \frac{5}{3} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} \qquad \frac{8}{5} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$$

Da diese Quotienten im Grenzwert gegen den goldenen Schnitt konvergieren, lässt sich dieser als der unendliche Kettenbruch

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

darstellen.

Die Zahl Φ ist irrational. Das bedeutet, dass sie sich nicht durch ein Verhältnis zweier ganzer Zahlen darstellen lässt, ein Umstand, der wesentlich zu ihrer Bedeutung in Kunst und Natur beiträgt. Am besten lässt sich Φ durch Quotienten zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen darstellen. Dies gilt auch für verallgemeinerte Fibonaccifolgen, bei denen f_0 und f_1 beliebige natürliche Zahlen annehmen.

Fibonacci-Heap: insert, merge, min

- t_i: Zeit für Operation i ausgeführt im Zustand s
- a_i: amortisierter Aufwand für Operation i
  $a_i = t_i + \Delta bal_i$ mit $\Delta bal_i = bal(s')-bal(s)$, falls $i:s \rightarrow s'$
  im aktuellen Zustand s ausgeführt wird

Amortisierte Kosten der Operationen:

$bal(s) = \#Bäume(s) + 2 \cdot \#markierte\ Knoten(s)$

- insert: $t=O(1)$ und $\Delta bal_{insert} = +1$, also $a=O(1)$
- merge: $t=O(1)$ und $\Delta bal_{merge} = 0$, also $a=O(1)$
- min: $t=O(1)$ und $\Delta bal_{min} = 0$, also $a=O(1)$

Fibonacci-Heap: deleteMin

Behauptung:

Die amortisierten Kosten von deleteMin() sind O(log n).

Beweis:

- Einfügen der Kinder von x in Wurzelliste (#Kinder(x) = Rang(x)):
  $\Delta bal_1 =$ Rang(x) – 1 (-1 weil x entfernt wird)
- Jeder Merge-Schritt verkleinert #Bäume um 1:
  $\Delta bal_2 =$ -(#Merge-Schritte)
- Wegen Invariante 2 und Φ (Rang der Bäume max. O(log n))
  gilt: #Merge-Schritte = #Bäume – O(log n)
- Insgesamt: $\Delta bal_{deleteMin}$ = Rang(x) - #Bäume + O(log n)
- Laufzeit (in geeigneten Zeiteinheiten):
  $t_{deleteMin}$ = #Bäume[1] + O(log n)
- Amortisierte Laufzeit:
  $a_{deleteMin} = t_{deleteMin} + \Delta bal_{deleteMin} = O(\log n)$

[1] Realisierung der Eimerkette

Fibonacci-Heap: delete

Behauptung: Die amortisierten Kosten von delete(x) sind O(log n).

Beweis: (x ist kein min-Element – sonst wie oben)

- Einfügen der Kinder von x in Wurzelliste:
  $\Delta bal_1 \leq$ Rang(x)
- Jeder kaskadierende Schnitt (Entfernung eines markierten Knotens) erhöht die Anzahl Bäume um 1:
  $\Delta bal_2 =$ #kaskadierende Schnitte
- Jeder kaskadierende Schnitt entfernt eine Markierung:
  $\Delta bal_3 = -2 \cdot$#kaskadierende Schnitte
- Der letzte Schnitt von delete erzeugt evtl. eine Markierung:
  $\Delta bal_4 \in \{0,2\}$

Fibonacci-Heap: delete (Forts.)

Behauptung: Die amortisierten Kosten von delete(x) sind O(log n).

Beweis (Fortsetzung):

- Insgesamt:
  Δbal_{delete} = Rang(x) - #kaskadierende Schnitte + O(1)
  = O(log n) - #kaskadierende Schnitte
  wegen Invariante 2 und Begrenzung über Φ
- Laufzeit (in geeigneten Zeiteinheiten):
  t_{delete} = O(1) + #kaskadierende Schnitte
- Amortisierte Laufzeit:
  $a_{delete} = t_{delete} + \Delta bal_{delete}$ = O(log n)

Fibonacci-Heap: decreaseKey

Behauptung: Die amortisierten Kosten von decreaseKey(x,Δ) sind O(1).

Beweis:

- Jeder kask. Schnitt erhöht die Anzahl Bäume um 1:
  Δbal_1 = #kaskadierende Schnitte
- Jeder kask. Schnitt entfernt eine Markierung (bis auf x):
  $\Delta bal_2 \leq -2 \cdot$(#kaskadierende Schnitte-1)
- Der letzte Schnitt erzeugt evtl. eine Markierung:
  $\Delta bal_3 \in \{0,2\}$
- Insgesamt: $\Delta bal_{decreaseKey}$ = - #kask. Schnitte + O(1)
- Laufzeit: $t_{decreaseKey}$ = #kask. Schnitte + O(1)
- Amortisierte Laufzeit:
  $a_{decreaseKey} = t_{decreaseKey} + \Delta bal_{decreaseKey} = O(1)$

Zusammenfassung: Laufzeitvergleich

Laufzeit	Binärer Heap	Binomial-Heap	Fibonacci-Heap
insert	O(log n)	O(log n)	O(1)
min	O(1)	O(1)	O(1)
deleteMin	O(log n)	O(log n)	O(log n) amor.
delete	O(log n)	O(log n)	O(log n) amor.
decreaseKey	O(log n)	O(log n)	O(1) amor.
merge	O(n)	O(log n)	O(1)

Michael L. Fredman, Robert E. Tarjan: Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms. In: Journal of the ACM. 34, Nr. 3, S. 596–615, **1987**

Zusammenfassung: Laufzeitvergleich

Laufzeit	Binärer Heap	Binomial-Heap	Fibonacci-Heap
insert	O(log n)	O(log n)	O(1)
min	O(1)	O(1)	O(1)
deleteMin	O(log n)	O(log n)	O(log n) amor.
delete	O(log n)	O(log n)	O(log n) amor.
decreaseKey	O(log n)	O(log n)	O(1) amor.
merge	O(n)	O(log n)	O(1)

Weitere Entwicklung unter Ausnutzung von Dateneigenschaften: Radix-Heap

Radix-Heap (nur Analyse)

Voraussetzungen [Bearbeiten]

1. alle Schlüssel sind aus den natürlichen Zahlen
2. max. Schlüssel - min. Schlüssel $\leq$ C für ein festes C
3. Monotonie von *extractMin*, d.h. die von aufeinander folgenden *extractMin*-Aufrufen zurückgegebenen Werte sind monoton steigend

Laufzeit	Radix-Heap	erw. Radix-Heap
insert	O(log C) amor.	O(log C) amor.
min	O(1)	O(1)
deleteMin	O(1) amor.	O(1) amor.
delete	O(1)	O(1) amor.
merge	???	O(log C) amor.
decreaseKey	O(1)	O(log C) amor.

Ahuja, Ravindra K.; Mehlhorn, Kurt; Orlin, James B.; Tarjan, Robert E., Faster algorithms for the shortest path problem, Journal of the Association for Computing Machinery 37 (2): 213–223, **1990**

Van Emde Boas Baum (vEB-Baum)

- Warteschlange mit Kapazitätsbegrenzung
- Verwendung eines speziellen Baumes
- Sei M die maximale Anzahl von Elementen im Baum, nicht die aktuell gespeicherte Anzahl n

Space	$O(M)$
Search	$O(\log \log M)$
Insert	$O(\log \log M)$
Delete	$O(\log \log M)$

P. van Emde-Boas, R. Kass und E. Zijlstra: *Design and Implementation of an Efficient Priority Queue.* In: *Mathematical Systems Theory.* 10: 99–127, **1977**

Es geht auch ohne amortisierte Analyse …

operation	linked list	binary heap	binomial heap	pairing heap †	Fibonacci heap †	Brodal queue
MAKE-HEAP	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
IS-EMPTY	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
INSERT	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
EXTRACT-MIN	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
DECREASE-KEY	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$2^{\sqrt{O(\log \log n)}}$	$O(1)$	$O(1)$
DELETE	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
MELD	$O(1)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
FIND-MIN	$O(n)$	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$

† amortized

Fredman, Michael L.; Sedgewick, Robert; Sleator, Daniel D.; Tarjan, Robert E. The pairing heap: a new form of self-adjusting heap. Algorithmica. 1 (1): 111–129, **1986**.

Gerth Stølting Brodal, Worst-case efficient priority queues. Proc. 7th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pp. 52–58, **1996**