
Algorithmen und Datenstrukturen

Prof. Dr. Ralf Möller

Universität zu Lübeck

Institut für Informationssysteme

Tanya Braun (Übungen)

sowie viele Tutoren

Danksagung

Die nachfolgenden Präsentationen wurden mit einigen Änderungen übernommen aus der Vorlesung „Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen“ (Kapitel 2: Priority Queues) gehalten von Christian Scheideler an der TUM

<http://www14.in.tum.de/lehre/2008WS/ea/index.html.de>

Prioritätswarteschlangen

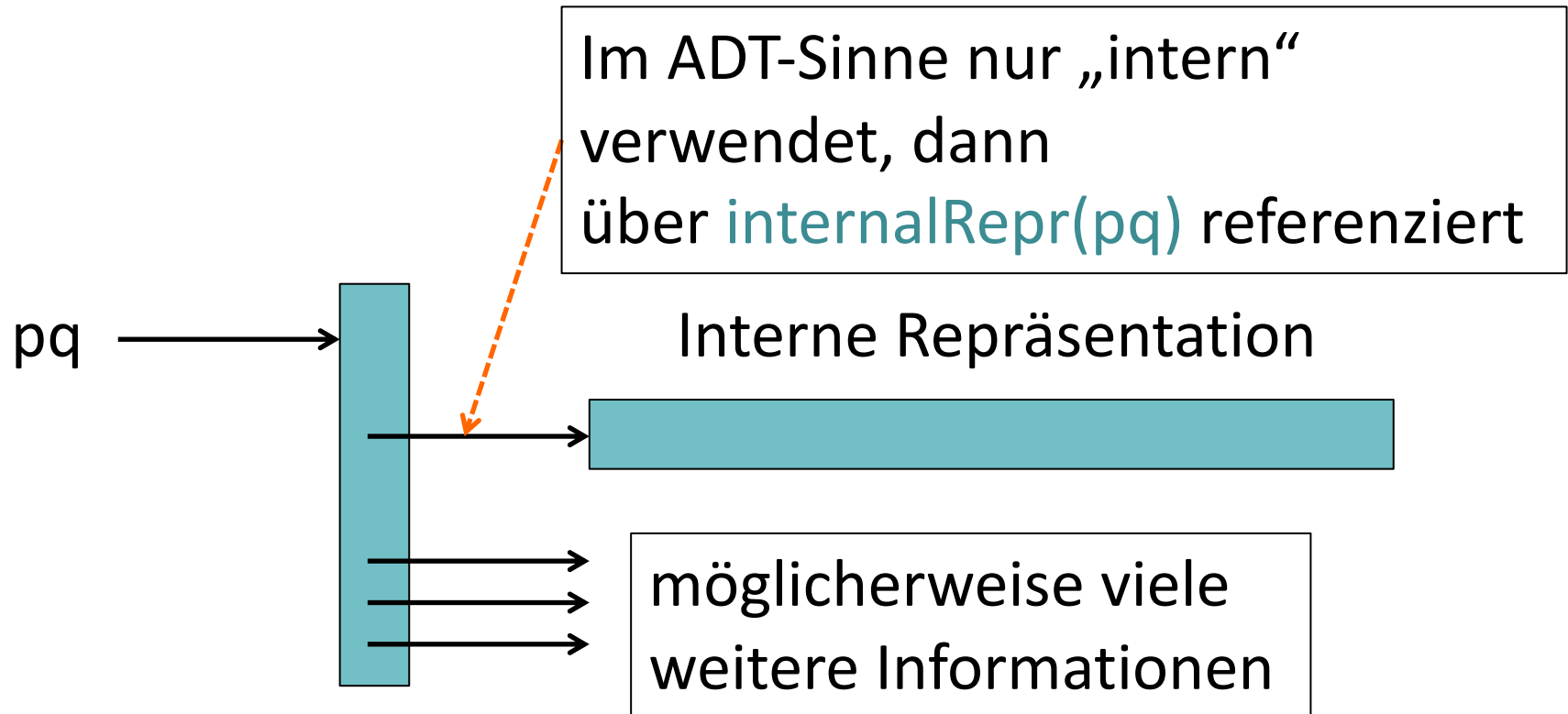
Geg.: $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Menge von Elementen

Ann.: **Priorität** eines jeden Elements e wird identifiziert über die Funktion **key**

Operationen:

- function **build**($\{e_1, \dots, e_n\}$) liefert neue Warteschlange
- procedure **insert**(e, pq) fügt Element e mit Priorität **key**(e) in pq ein, verändert pq sofern e noch nicht in pq
- function **min**(pq) gibt Element mit minimalem **key**(e) zurück
- procedure **deleteMin**(pq): löscht das minimale Element in pq , sofern vorhanden, und pq wird verändert, wenn etwas gelöscht wird

Prioritätswarteschlangen als ADTs



Erweiterte Prioritätswarteschlangen

Zusätzliche Operationen:

- **procedure delete**(e , pq) löscht e aus pq , falls vorhanden, verändert ggf. pq
- **procedure decreaseKey**(e , pq , Δ): $\text{key}(e) := \text{key}(e) - \Delta$, verändert evtl. pq
- **procedure merge**(pq , pq') fügt pq und pq' zusammen, verändert ggf. pq und auch pq'

Prioritätswarteschlangen

- Einfache Realisierung mittels unsortierter Liste:
 - build: Zeit $O(n)$
 - insert: $O(1)$
 - min, deleteMin: $O(n)$
- Realisierung mittels sortiertem Feld:
 - build: Zeit $O(n \log n)$ (Sortieren)
 - insert: $O(n)$ (verschiebe Elemente in Feld)
 - min, deleteMin: $O(1)$ (mit Anfangszeiger)

Bessere Struktur als Liste oder Feld möglich!

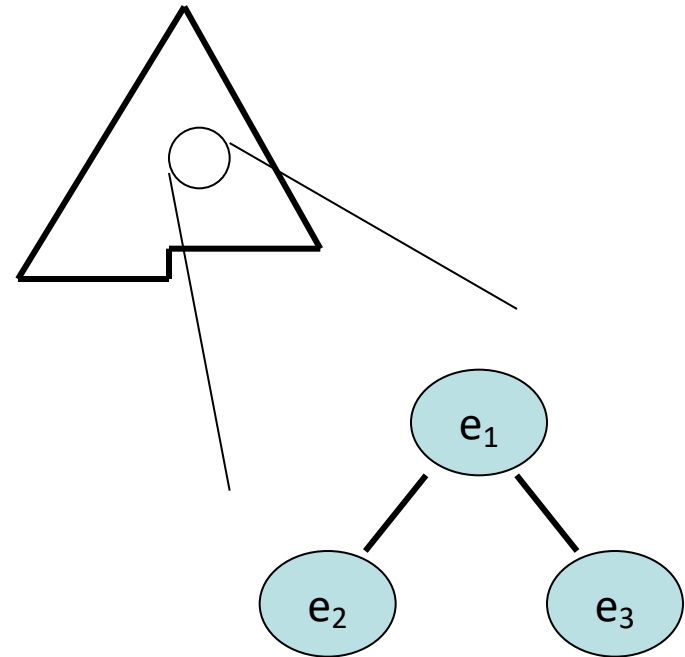
Binärer Heap (Wiederholung)

Idee: verwende binären Baum statt Liste

Bewahre zwei Invarianten:

- **Form-Invariante:**
vollst. Binärbaum bis auf
unterste Ebene
- **(Min)Heap-Invariante:**

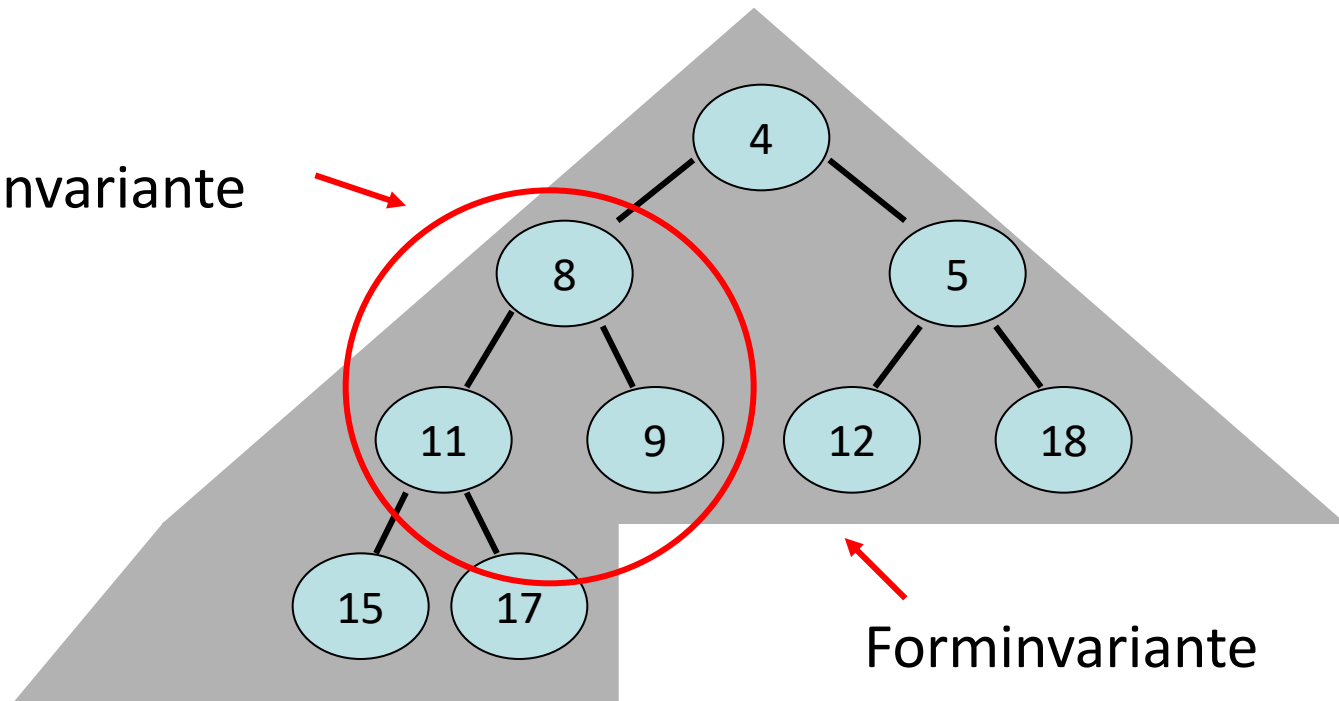
$\text{key}(e_1) \leq \min(\{ \text{key}(e_2), \text{key}(e_3) \})$
für die Kinder e_2 und e_3 von e_1



Binärer Heap (Wiederholung)

Beispiel:

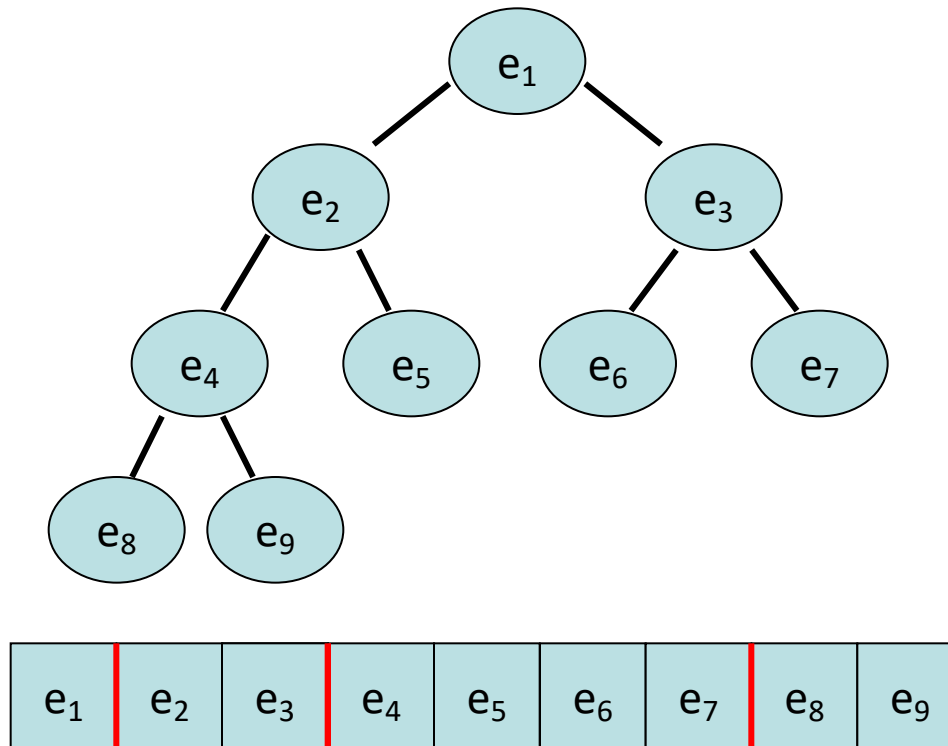
Heapinvariante



Forminvariante

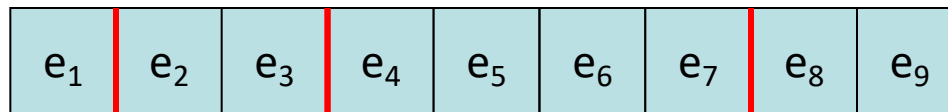
Binärer Heap (Wiederholung)

Realisierung eines Binärbaums als Feld:



Binärer Heap (Wiederholung)

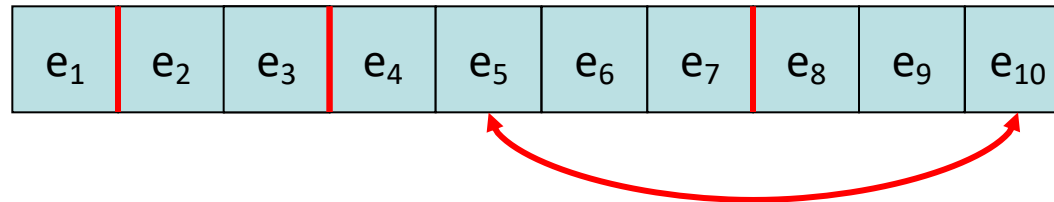
Realisierung eines Binärbaums als Feld:



- **H**: Array [1..n]
- Kinder von **e** in **H[i]**: in **H[2i]**, **H[2i+1]**
- **Form-Invariante**: **H[1], ..., H[k]** besetzt für $k \leq n$
- **Heap-Invariante**:
$$\text{key}(\text{H}[i]) \leq \min(\{ \text{key}(\text{H}[2i]), \text{key}(\text{H}[2i+1]) \})$$

Binärer Heap (Wiederholung)

Realisierung eines Binärbaums als Feld:



insert(e , pq): Sei H das Trägerfeld von pq
($H = \text{internalRepr}(pq)$)

- **Form-Invariante:** $n := n + 1$; $H[n] := e$
- **Heap-Invariante:** vertausche e mit Vater
bis $\text{key}(H[\lfloor k/2 \rfloor]) \leq \text{key}(e)$ für e in $H[k]$
oder e in $H[1]$

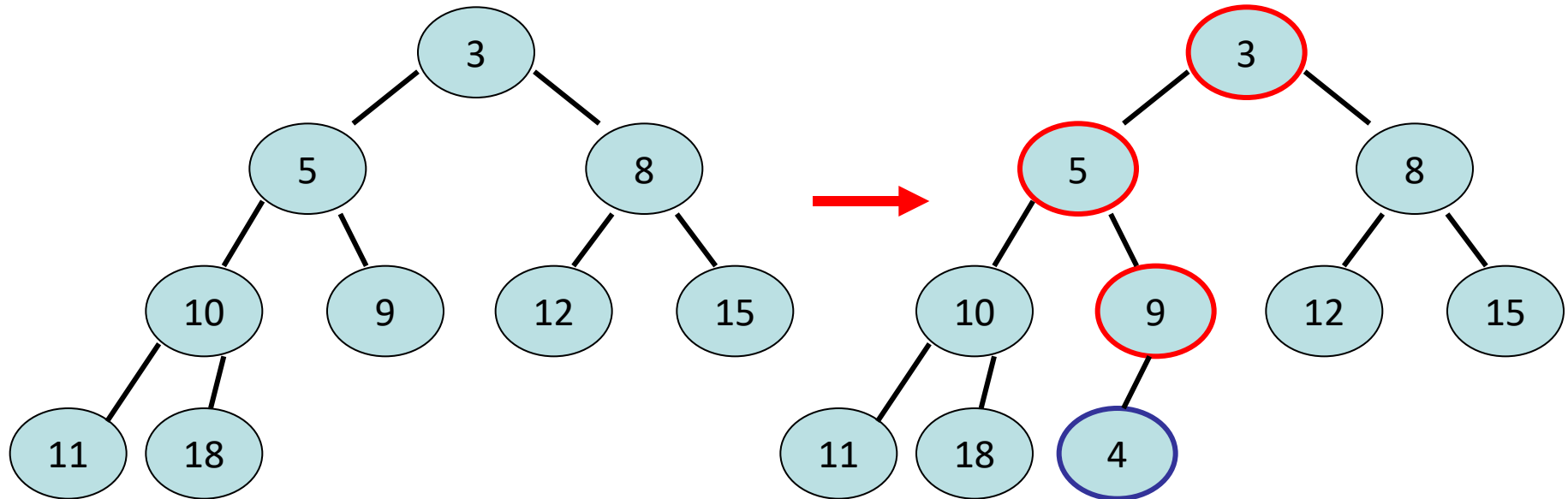
Insert Operation

Procedure **insert**(**e**, **pq**)
 H:=**heap**(**pq**); **n**:=**n**+1; **H**[**n**]:=**e**
 siftUp(**n**, **H**)

Procedure **siftUp**(**i**, **H**)
 while **i**>1 and **key**(**H**[**parent**(**i**)]) > **key**(**H**[**i**]) do
 temp := **H**[**i**]; **H**[**i**] := **H**[**parent**(**i**)]; **H**[**parent**(**i**)] := **temp**;
 i:=**parent**(**i**)

Laufzeit: $O(\log n)$

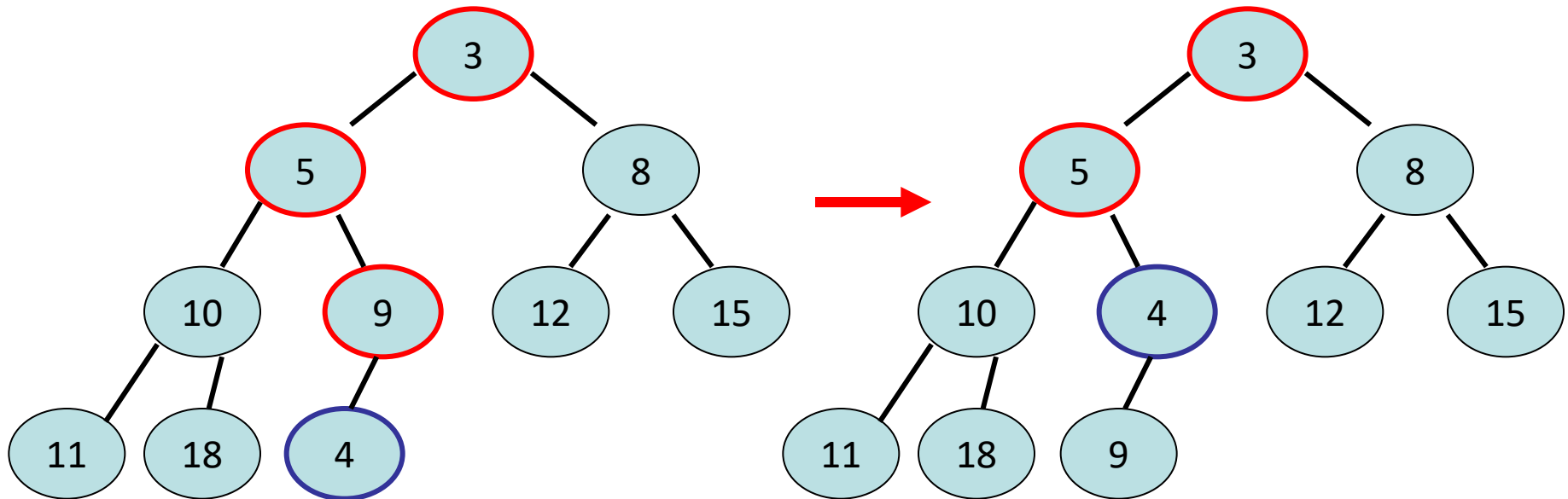
Insert - Binärer Heap



Invariante: $H[k]$ ist minimal für Teilbaum von $H[k]$

 : Knoten, die Invariante eventuell verletzen

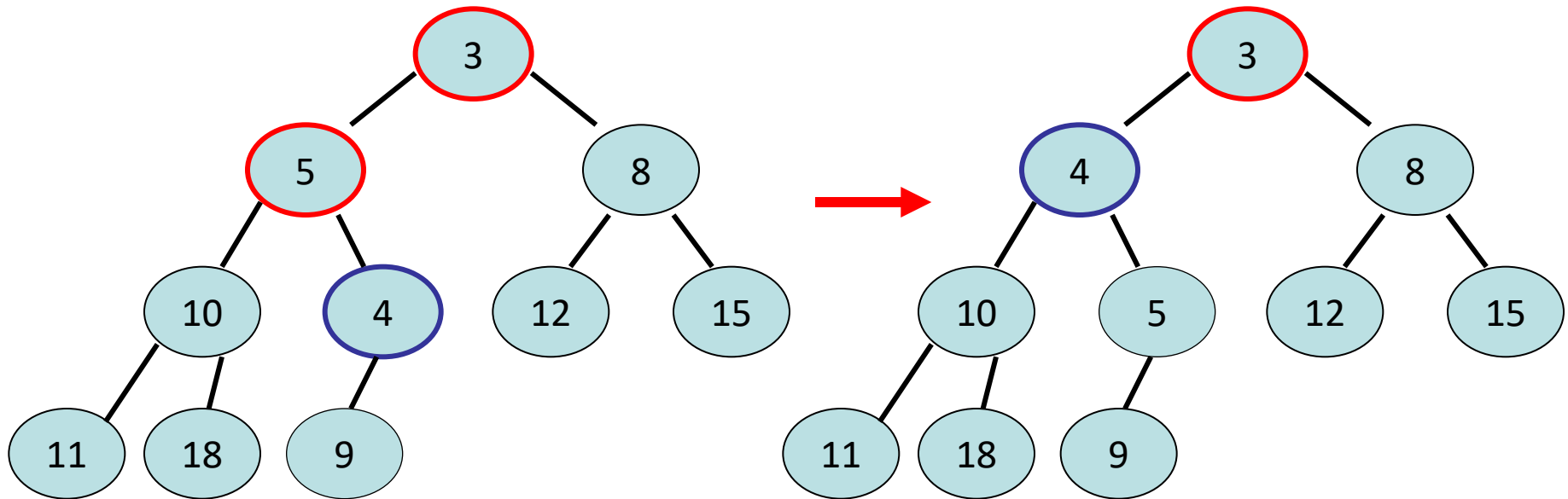
Insert Operation - Korrektheit



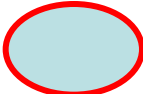
Invariante: $H[k]$ ist minimal für Teilbaum von $H[k]$

 : Knoten, die Invariante eventuell verletzen

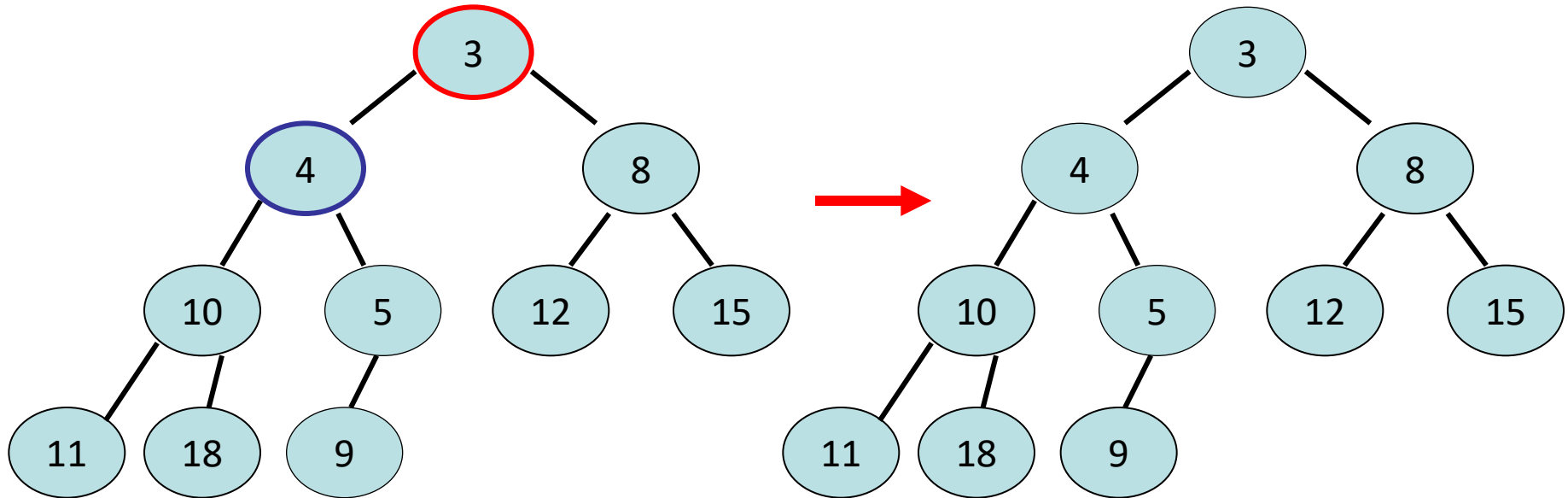
Insert Operation - Korrektheit



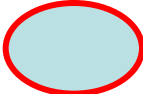
Invariante: $H[k]$ ist minimal für Teilbaum von $H[k]$

 : Knoten, die Invariante eventuell verletzen

Insert Operation - Korrektheit



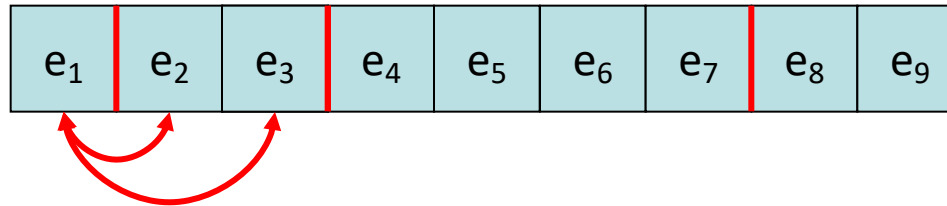
Invariante: $H[k]$ ist minimal für Teilbaum von $H[k]$

 : Knoten, die Invariante eventuell verletzen

Prioritätswarteschlange mit binärem Heap

Operator	Laufzeit
insert	
min	
deleteMin	

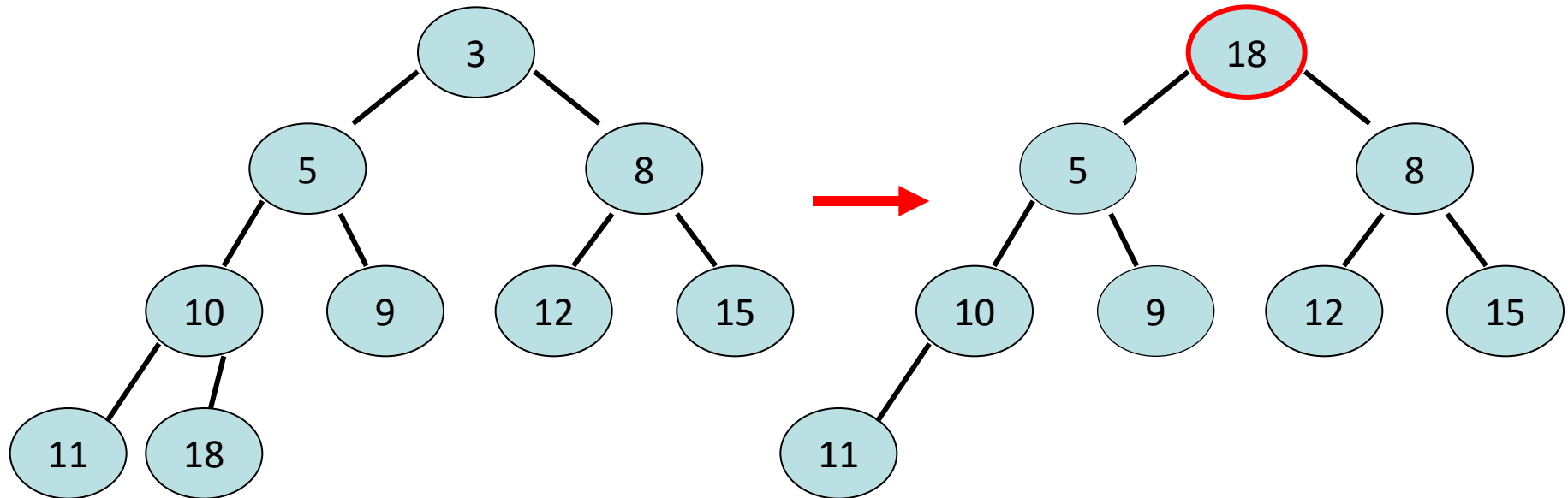
DeleteMin: Binärer Heap



deleteMin(pq):

- **Form-Invariante:** $H[1] := H[n]; n := n - 1$
- **Heap-Invariante:** starte mit Element e in $H[1]$.
Vertausche e mit Kind mit min Schlüssel bis
 $H[k] \leq \min(\{ H[2k], H[2k+1] \})$ für Position k von e
oder e in Blatt

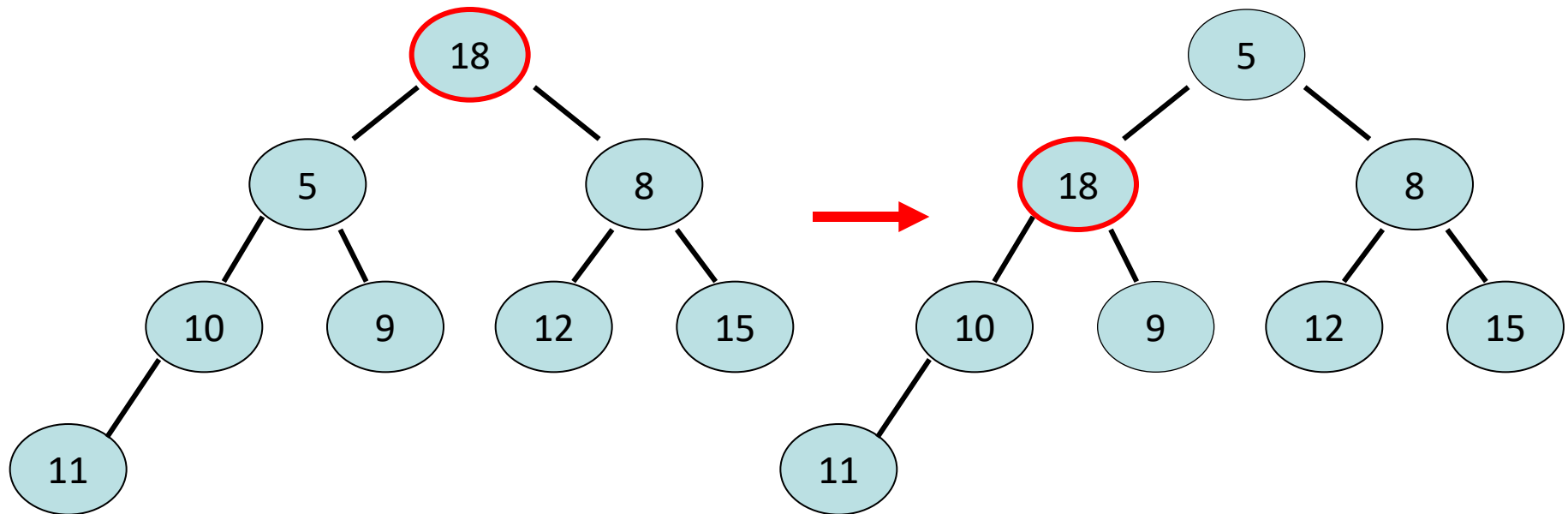
DeleteMin Operation - Korrektheit



Invariante: $H[k]$ ist minimal für Teilbaum von $H[k]$

 : Knoten, die Invariante eventuell verletzen

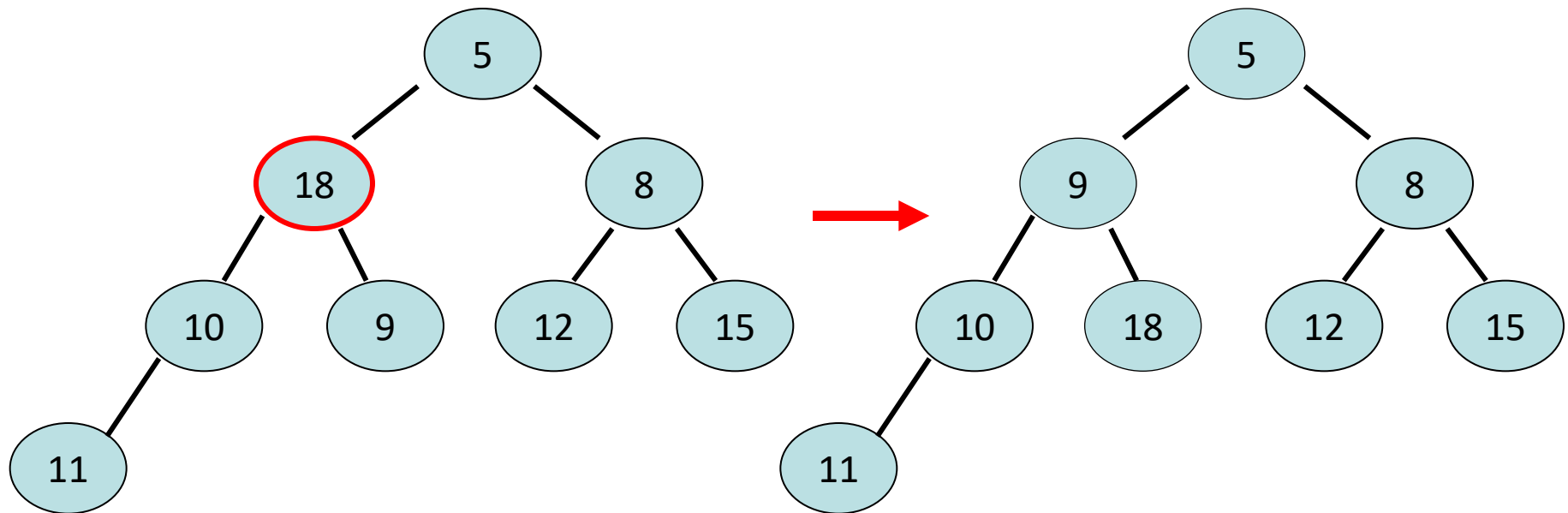
DeleteMin Operation - Korrektheit



Invariante: $H[k]$ ist minimal für Teilbaum von $H[k]$

 : Knoten, die Invariante eventuell verletzen

DeleteMin Operation - Korrektheit



Invariante: $H[k]$ ist minimal für Teilbaum von $H[k]$

 : Knoten, die Invariante eventuell verletzen

Binärer Heap

function **deleteMin**(pq):

 H:=heap(pq); e:=H[1]; H[1]:=H[n]; n:=n-1

siftDown(1, H)

 return e

Laufzeit: $O(\log n)$

procedure **siftDown**(i, H)

 while **not**(isLeaf(i)) do

 if **not**(exist(rightChild(i))) then m:=leftChild(i)

 else

 if $\text{key}(H[\text{leftChild}(i)]) < \text{key}(H[\text{rightChild}(i)])$

 then m:= leftChild(i)

 else m:=rightChild(i)

 if $\text{key}(H[i]) \leq \text{key}(H[m])$

 then exit // Heap-Inv gilt

 temp := H[i]; H[i] := H[m]; H[m] := temp;

 i:=m

Prioritätswarteschlange mit binärem Heap

Operator	Laufzeit
insert	$O(\log n)$
min	$O(1)$
deleteMin	$O(\log n)$

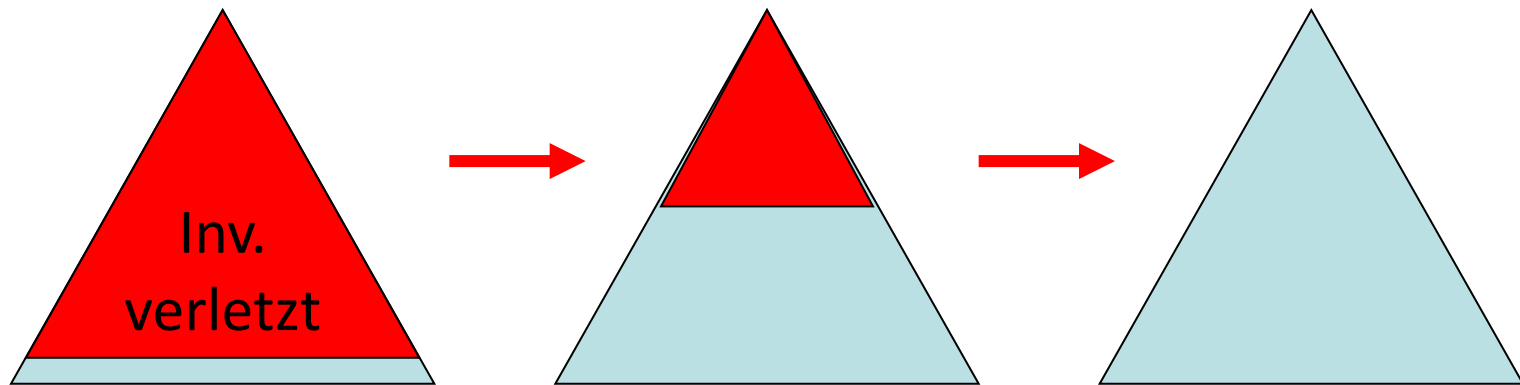
Binärer Heap

$\text{build}(\{e_1, \dots, e_n\})$:

- Naive Implementierung: über n $\text{insert}(e)$ -Operationen.
Laufzeit $O(n \log n)$
- Bessere Implementierung:
Setze $H[i] := e_i$ für alle i . Rufe $\text{siftDown}(i)$ auf
für $i = \text{parent}(n)$ runter bis 1 (d.h. von der vorletzten
Ebene hoch bis zur obersten Ebene)

Binärer Heap: Operation build

Setze $H[i] := e_i$ für alle i . Rufe $\text{siftDown}(i, H)$ für $i = \text{parent}(n)$ runter bis 1 auf.



Invariante: Für alle $j > i$: $H[j]$ minimal für Teilbaum von $H[j]$

Aufwand? Sicher $O(n \log n)$, siehe vorige Überlegungen

Unnötig pessimistisch (besser gesagt: asymptotisch nicht eng)

Aufwand für build

- Die Höhe des Baumes, in den eingesiebt wird, nimmt zwar von unten nach oben zu, ...
- ... aber für die meisten Knoten ist die Höhe „klein“ (die meisten Knoten sind unten)
- Ein n -elementiger Heap hat Höhe $\log n$...
- ... und maximal $\lceil n/2^{h+1} \rceil$ viele Knoten (Teilbäume) mit Höhe h
- **siftDown**, aufgerufen auf Ebene h , braucht h Schritte
- Der Aufwand für **build** ist also

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil O(h) = O \left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{h}{2^h} \right) = O \left(n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} \right) = O(n)$$

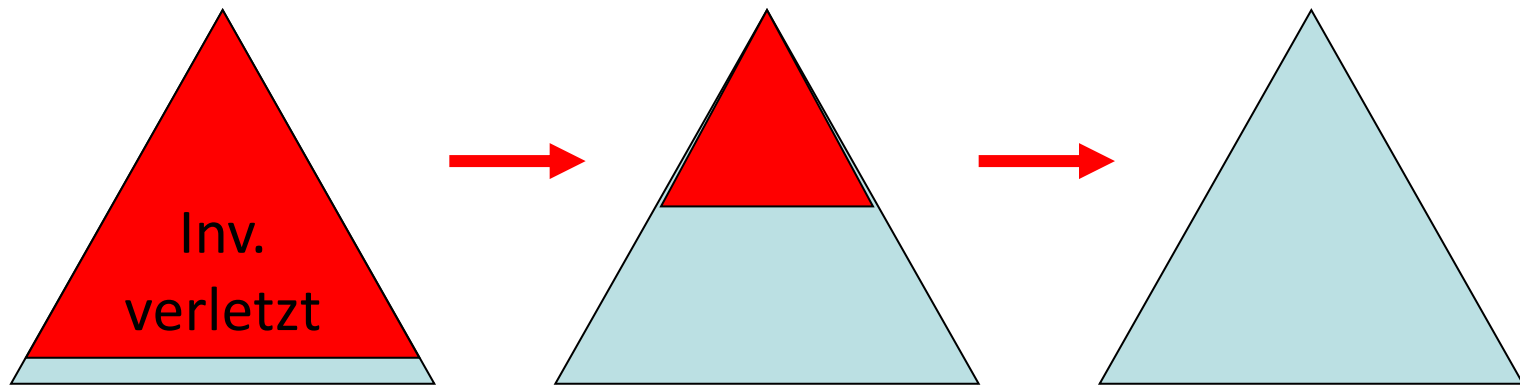
- wobei wir $x = \frac{1}{2}$ setzen in
$$\sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$
 for $|x| < 1$.

Ergibt sich aus der Ableitung der geometrischen Reihe mit $a_0 = 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}$$

Binärer Heap: Operation build

Setze $H[i] := e_i$ für alle i . Rufe $\text{siftDown}(i, H)$ für $i = \lfloor n/2 \rfloor$ runter bis 1 auf.



Invariante: Für alle $j > i$: $H[j]$ minimal für Teilbaum von $H[j]$

Aufwand ist gekennzeichnet durch eine Funktion in $O(n)$

Binärer Heap

Laufzeiten Heap:

- build: $O(n)$
- insert: $O(\log n)$
- min: $O(1)$
- deleteMin: $O(\log n)$

Vergleich

- Liste:
 - build: $O(n)$
 - insert: $O(1)$
 - min, deleteMin: $O(n)$
- Sortiertes Feld:
 - build: $O(n \log n)$
 - insert: $O(n)$
 - min, deleteMin: $O(1)$

Binärer Heap

Laufzeiten Heap:

- build: $O(n)$
- insert: $O(\log n)$
- min: $O(1)$
- deleteMin: $O(\log n)$

Vergleich

- Liste:
 - build: $O(n)$
 - insert: $O(1)$
 - min, deleteMin: $O(n)$
- Sortiertes Feld:
 - build: $O(n \log n)$
 - insert: $O(n)$
 - min, deleteMin: $O(1)$

Prioritätswarteschlange mit binärem Heap

Operator	Laufzeit
insert	$O(\log n)$
min	$O(1)$
deleteMin	$O(\log n)$
delete	$O(\log n)^*$
decreaseKey	$O(\log n)^*$
merge	$O(n)$

* Wenn Position von e bekannt

Anwendungen für log-n-merge

- Lastumverteilung
 - Delegation der Aufträge für einen Prozessor an einen anderen (evtl. schnelleren) Prozessor
- Reduce-Operation, Mischung von parallel ermittelten Ergebnissen, jeweils mit Bewertung bzw. Sortierung

Binomial-Heap zum schnellen Verschmelzen

Binomial-Heap basiert auf sog. Binomial-Bäumen

Binomial-Baum muss erfüllen:

- **Form-Invariante** (r : Rang):

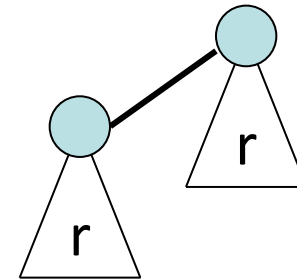
$r=0$



$r=1$



$r \rightarrow r+1$



- **Heap-Invariante:** $\text{key}(\text{Vater}) \leq \text{key}(\text{Kinder})$

Binomial-Heap

Beispiel für korrekte Binomial-Bäume:

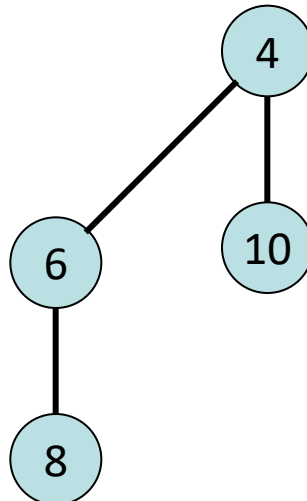
$r=0$



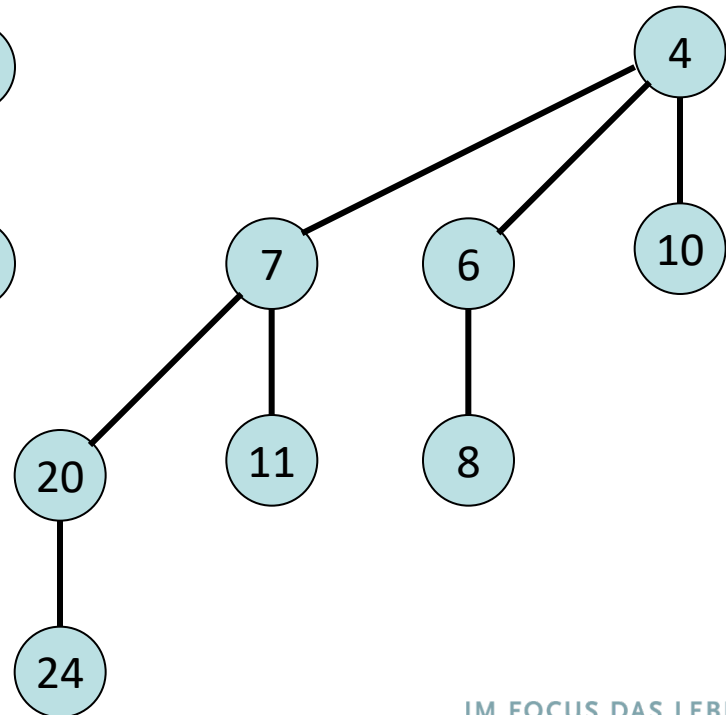
$r=1$



$r=2$



$r=3$



Binomial-Heap

Eigenschaften von Binomial-Bäumen:

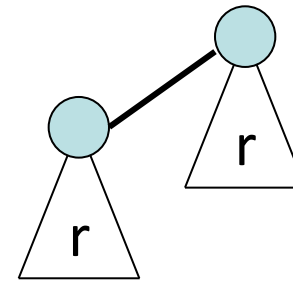
$r=0$



$r=1$



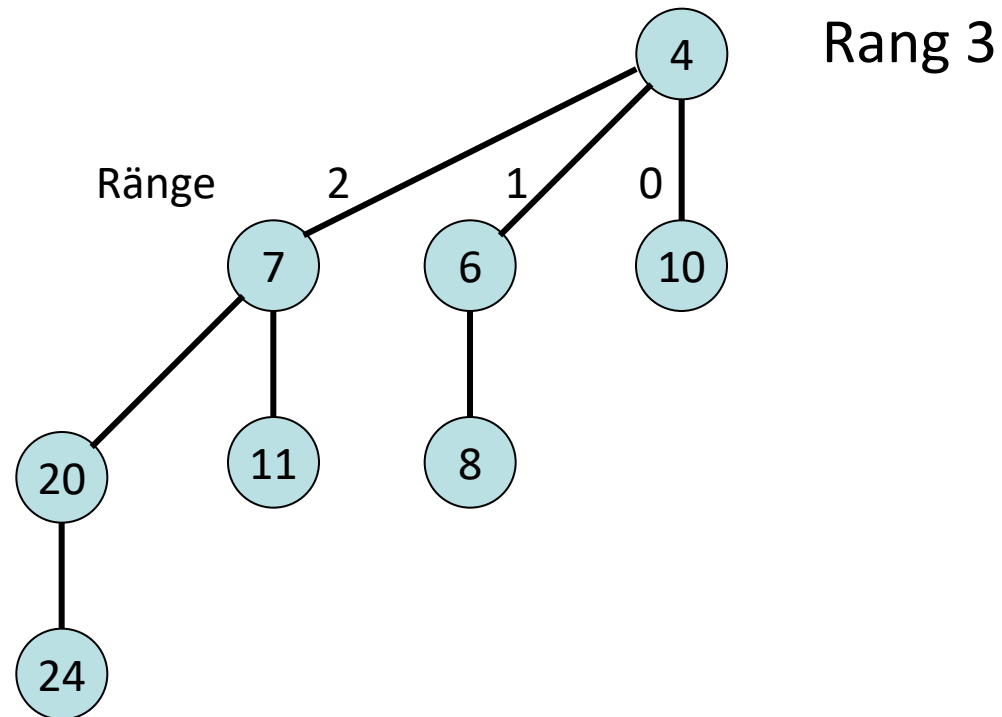
$r \rightarrow r+1$



- 2^r Knoten
- maximaler Grad r (bei Wurzel)
- Wurzel weg: Zerfall in Binomial-Bäume mit Rang 0 bis $r-1$

Binomial-Heap

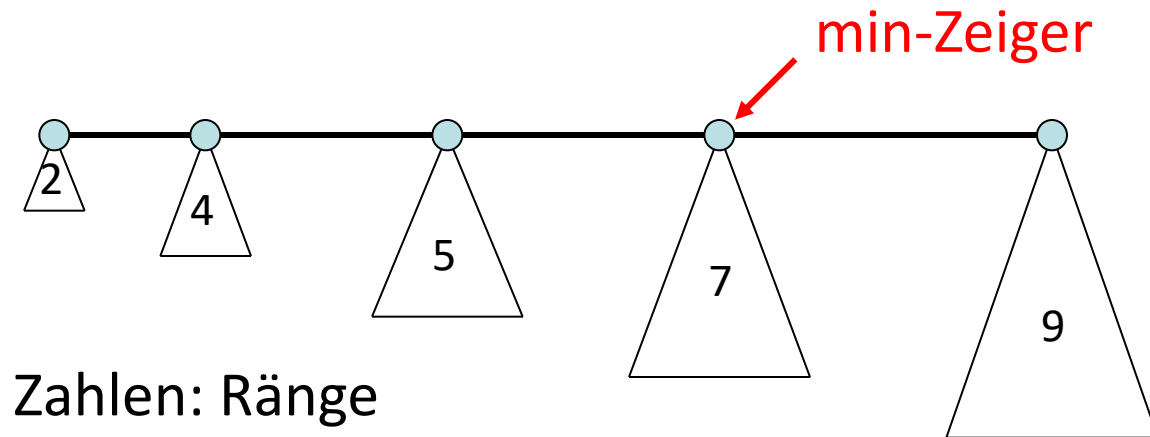
Beispiel für Zerfall in Binomial-Bäume mit Rang 0 bis $r-1$



Binomial-Heap

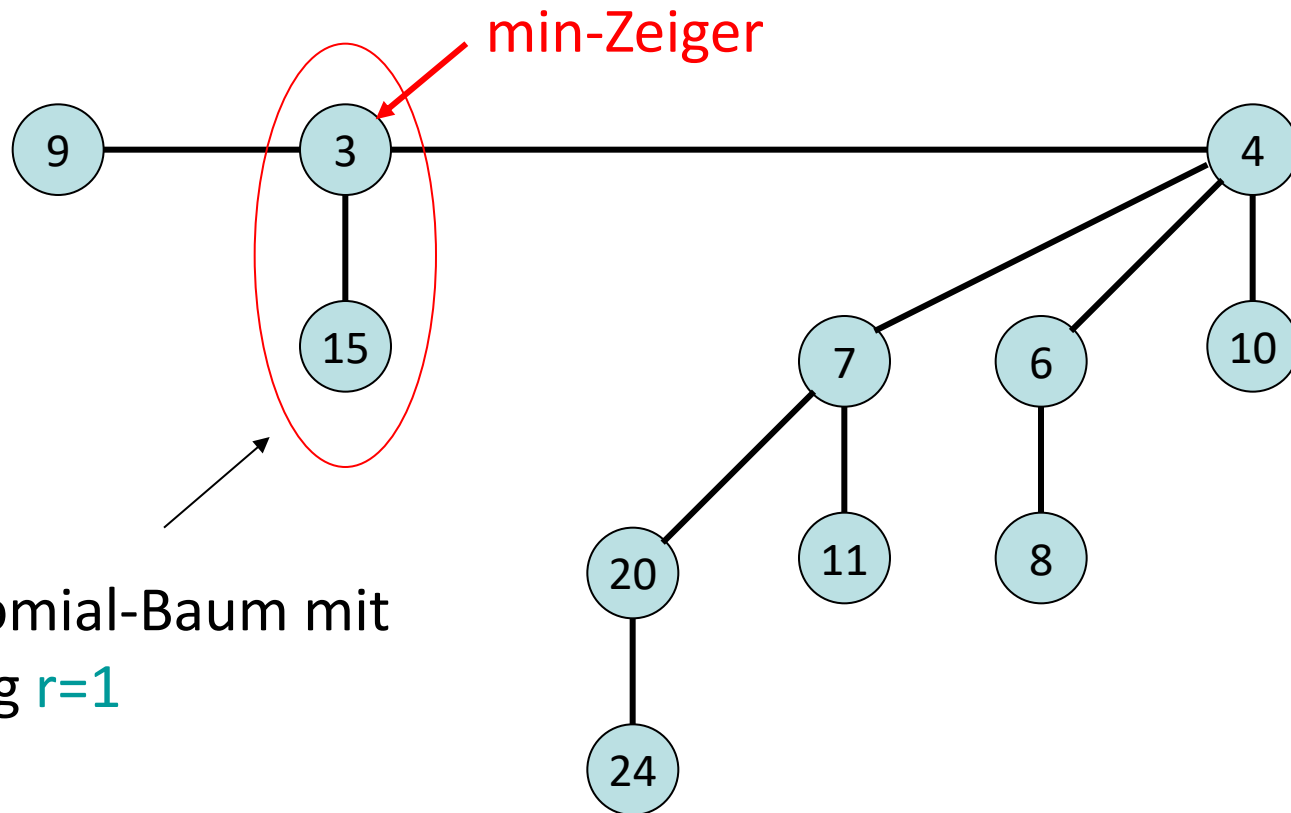
Binomial-Heap:

- verkettete Liste von Binomial-Bäumen
- Pro Rang maximal 1 Binomial-Baum
- Zeiger auf Wurzel mit minimalem key



Binomial-Heap

Beispiel eines korrekten Binomial-Heaps:



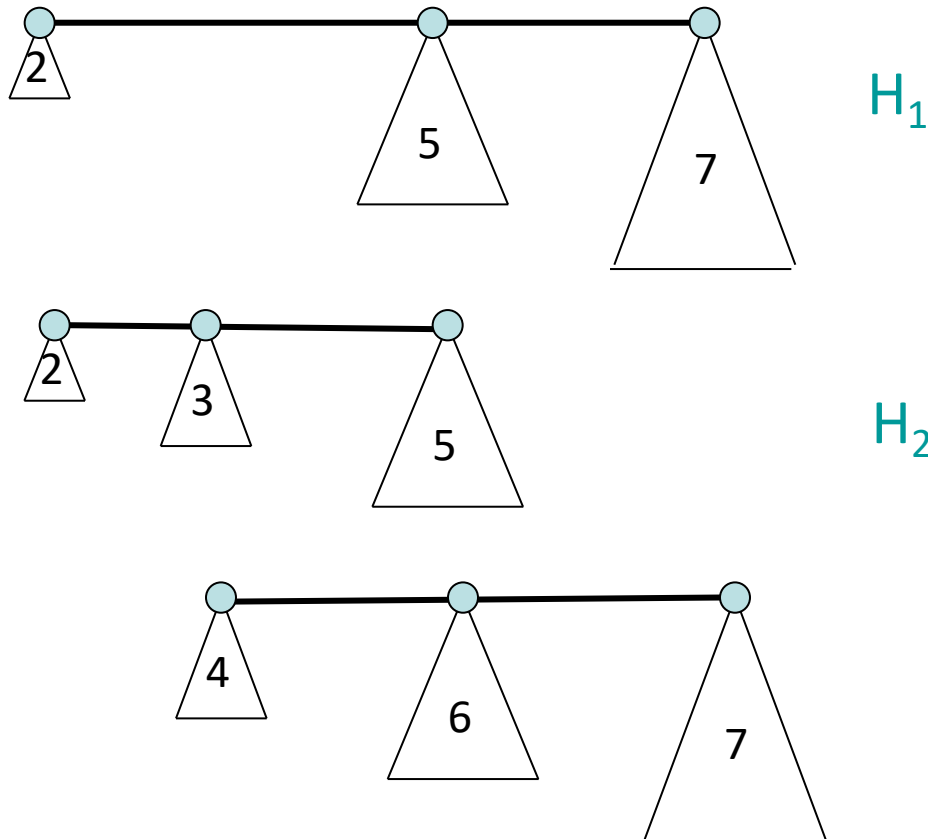
Binomial-Baum mit
Rang $r=1$

Anzahl der Bäume auf der Kette

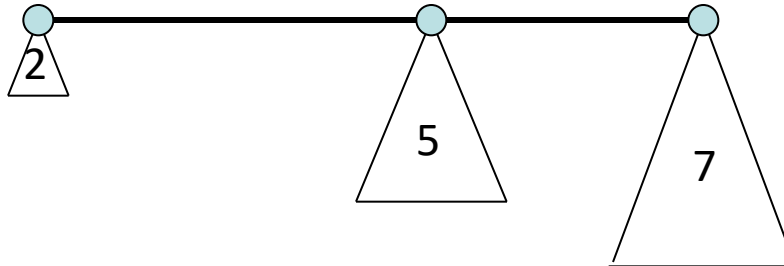
- Binomial-Heap-Invariante:
Pro Rang maximal 1 Binomial-Baum
- Was heißt das?
- Für n Knoten können höchstens $\log n$ viele Binomialbäume in der Kette vorkommen
(dann müssen alle Knoten untergebracht sein)

Binomial-Heap

Merge von Binomial-Heaps H_1 und H_2 :

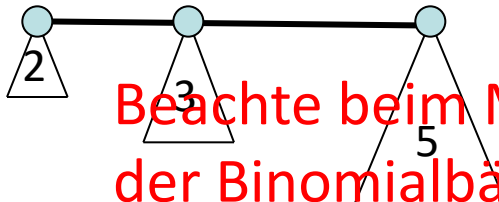


Beispiel einer Merge-Operation



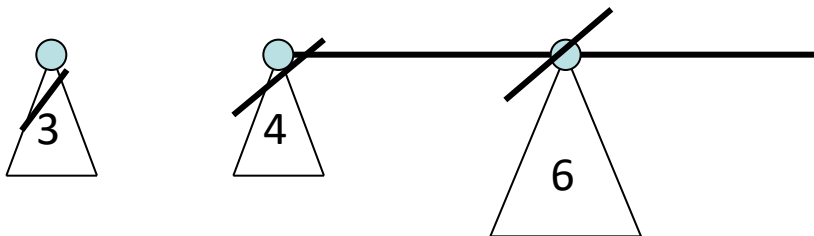
H_1

Zahlen geben
die Ränge an



H_2

Beachte beim Mergen
der Binomialbäume die
Heap-Eigenschaft!



Ergebnis-Heap

Operationen auf Binomial-Heaps

Sei B_i : Binomial-Baum mit Rang i

- $\text{merge}(pq, pq')$: Aufwand für Merge-Operation: $O(\log n)$
- $\text{insert}(e, pq)$: Merge mit B_0 , Zeit $O(\log n)$
- min : spezieller Zeiger, Zeit $O(1)$
- deleteMin : sei Minimum in Wurzel von B_i ,
Löschen von Minimum: $B_i \rightarrow B_0, \dots, B_{i-1}$. Diese
zurückmergen in Binomial-Heap. Zeit dafür $O(\log n)$.

Binomial-Heap

- `decreaseKey(e, pq,  $\Delta$ )`: `siftUp`-Operation in Binomial-Baum von `e` und aktualisierte min-Zeiger. Zeit $O(\log n)$
- `delete(e, pq)`: (min-Zeiger zeigt nicht auf `e`) setze `key(e) :=  $-\infty$` und wende `siftUp`-Operation auf `e` an, bis `e` in der Wurzel; dann weiter wie bei `deleteMin`.
Zeit $O(\log n)$

Zusammenfassung

Laufzeit	Binärer-Heap	Binomial-Heap
insert	$O(\log n)$	$O(\log n)$
min	$O(1)$	$O(1)$
deleteMin	$O(\log n)$	$O(\log n)$
delete	$O(\log n)$	$O(\log n)$
decreaseKey	$O(\log n)$	$O(\log n)$
merge	$O(n)$	$O(\log n)$

Zusammenfassung

Laufzeit	Binärer-Heap	Binomial-Heap
insert	$O(\log n)$	$O(\log n)$
min	$O(1)$	$O(1)$
deleteMin	$O(\log n)$	$O(\log n)$
delete	$O(\log n)$	$O(\log n)$
decreaseKey	$O(\log n)$	$O(\log n)$
merge	$O(n)$	$O(\log n)$

Datenstruktur Fibonacci-Heap

- Baut auf Binomial-Bäumen auf, aber erlaubt **lazy merge** und **lazy delete**.
- **Lazy merge**: keine Verschmelzung von Binomial-Bäumen gleichen Ranges bei merge, nur Verkettung der Wurzellisten
- **Lazy delete**: erzeugt unvollständige Binomial-Bäume

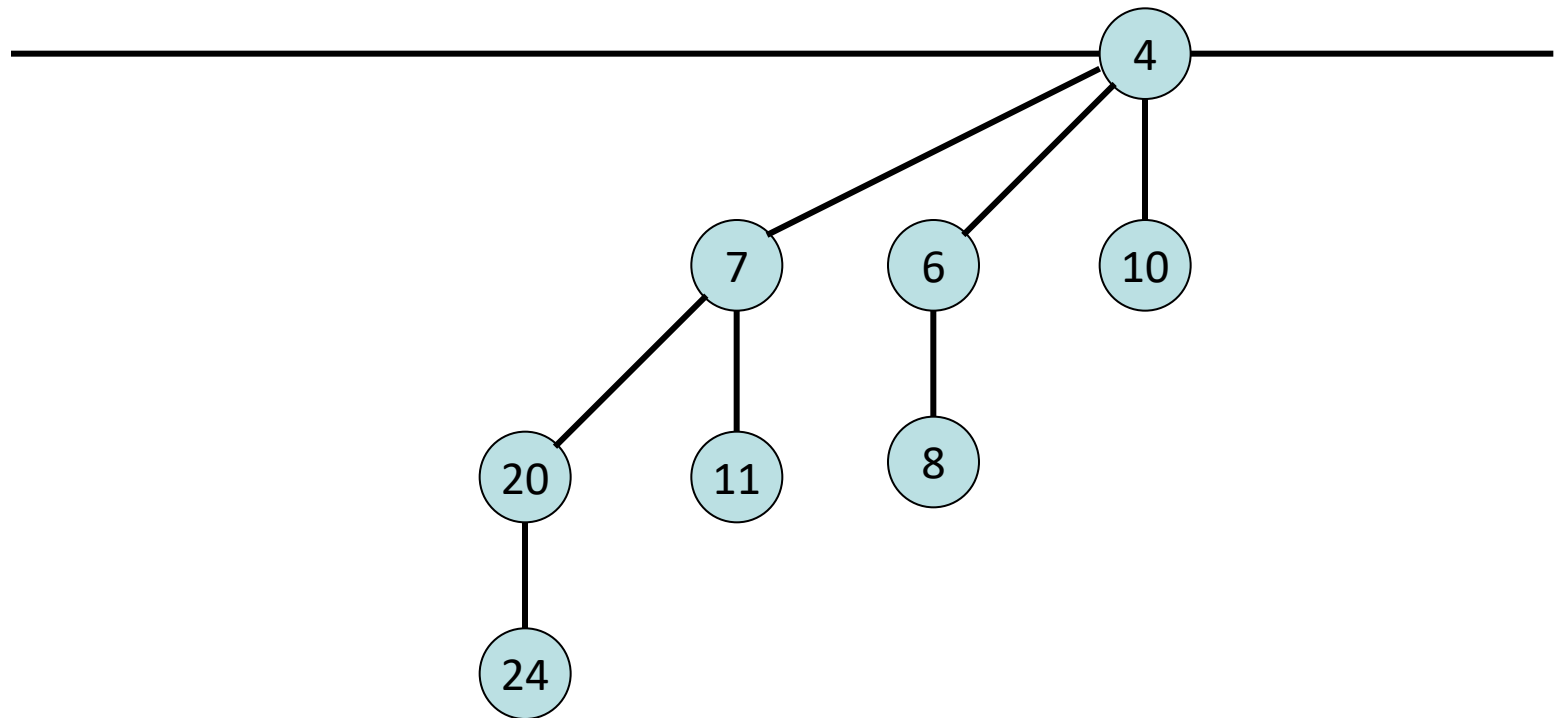
Der Name rührt von der Analyse der Datenstruktur her, bei der Fibonacci-Zahlen eine große Rolle spielen (wird nachher deutlich)

Michael L. Fredman, Robert E. Tarjan: Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms. In: Journal of the ACM. 34, Nr. 3, S. 596–615, 1987

Fibonacci-Heap

Baum in Binomial-Heap: Zentrale Invariante

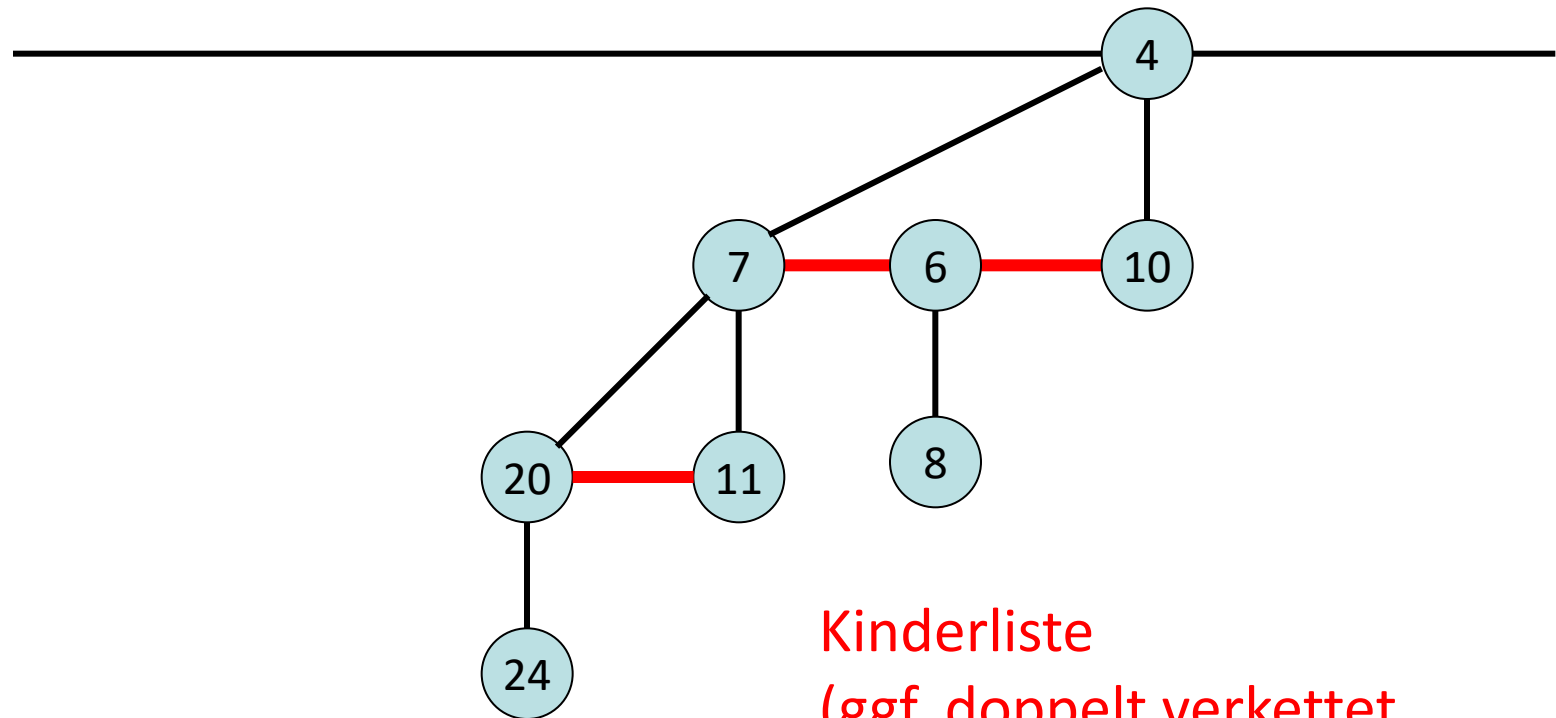
Rang = Anzahl der Kinder des Wurzelknotens



Fibonacci-Heap: Anpassung der Struktur

Baum in Fibonacci-Heap: Zentrale Invariante

Rang = Anzahl der Kinder des Wurzelknotens



Kinderliste
(ggf. doppelt verkettet
dito für Wurzelliste)

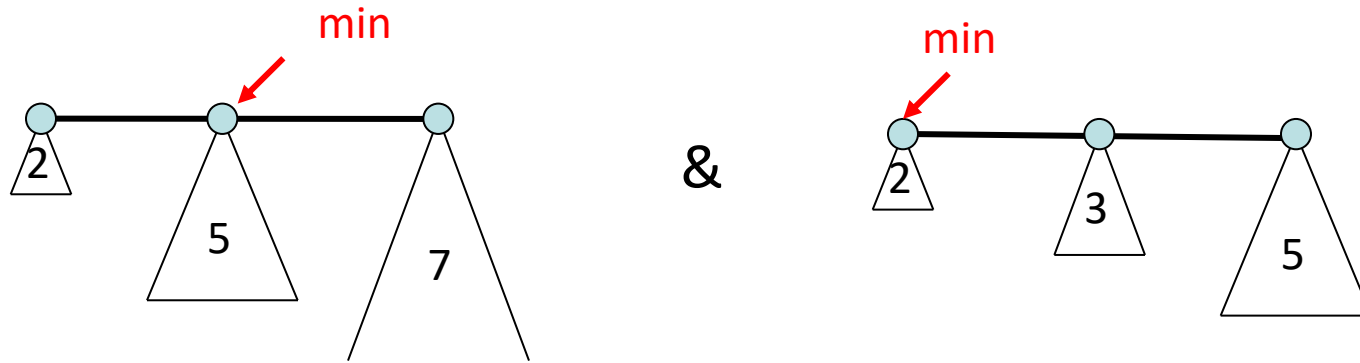
Fibonacci-Heap

Für jeden Knoten wird gespeichert:

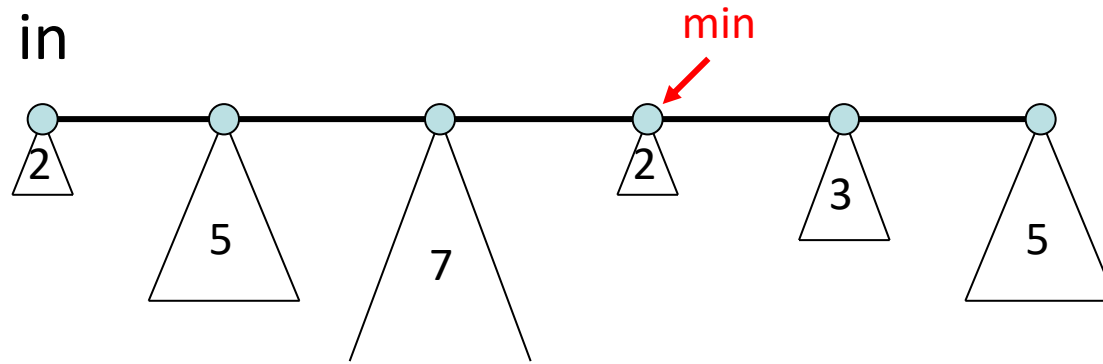
- im Knoten gespeichertes Element
- Vater
- Liste der Kinder (mit Start- und Endpunkt)
- Rang

Fibonacci-Heap: Lazy-Merge

Lazy merge von



resultiert in



Wurzellisten
hintereinander-
hängen: $O(1)$

Problem:

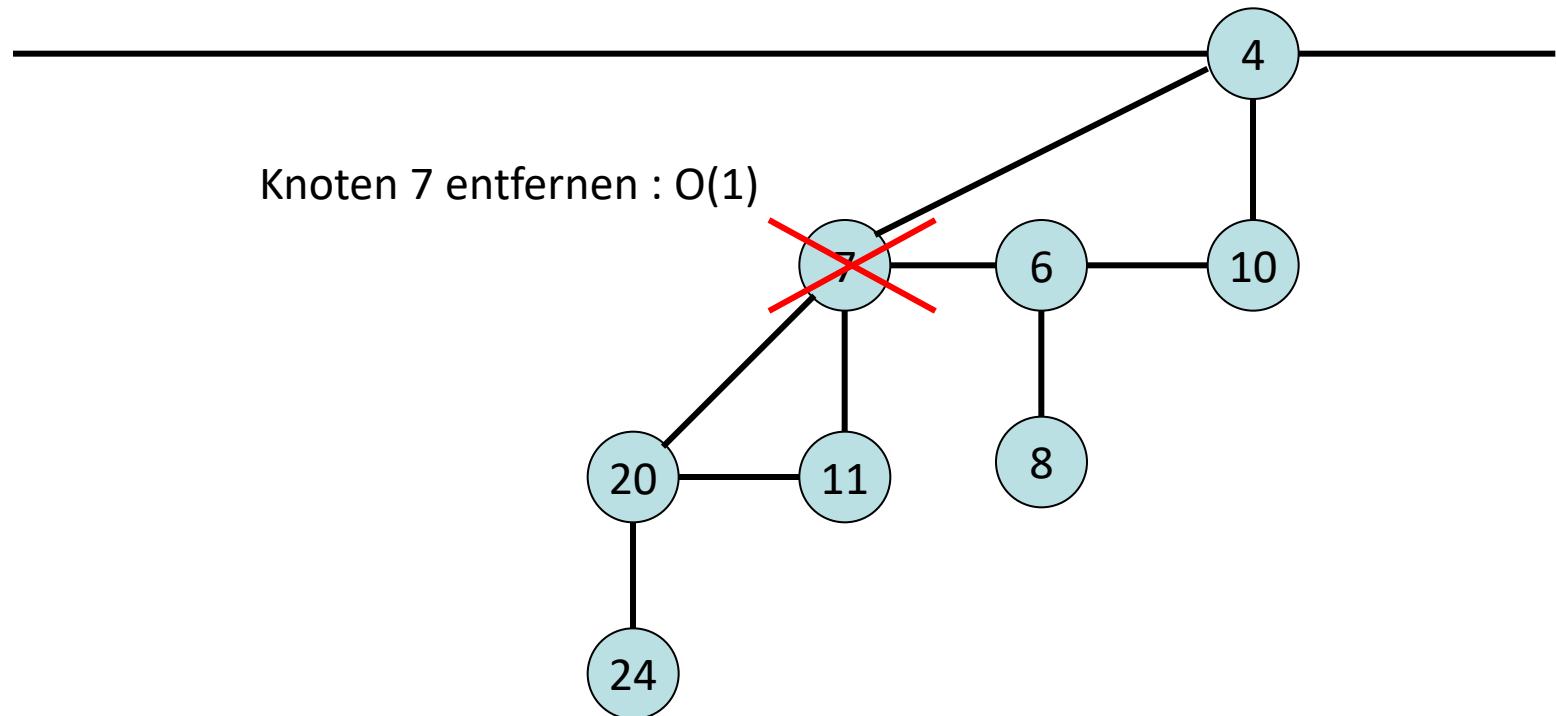
- Bäume gleichen Ranges treten in der Wurzelliste auf
- Binomial-Heap-Eigenschaft kann verletzt sein

Fibonacci-Heap: Lazy-Delete

Lazy delete:

Kinderliste in Wurzelliste integrieren: $O(1)$

Knoten 7 entfernen : $O(1)$

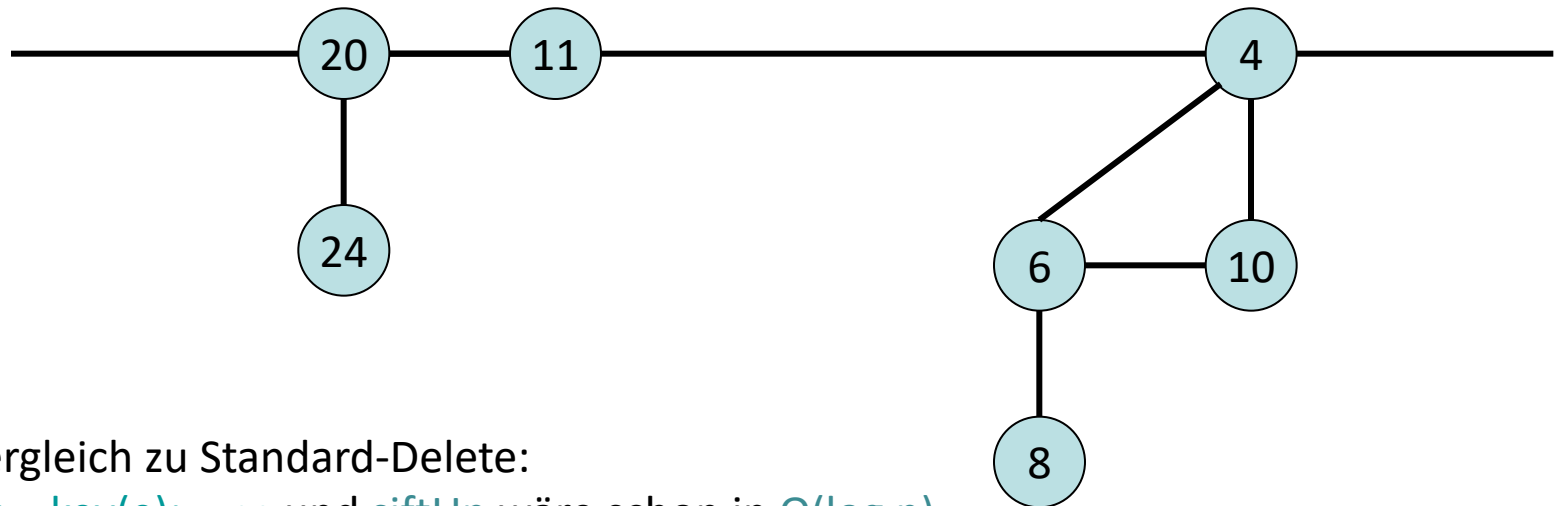


Fibonacci-Heap: Lazy-Delete

Lazy delete:

Annahme: Knoten 7 ist im direkten Zugriff

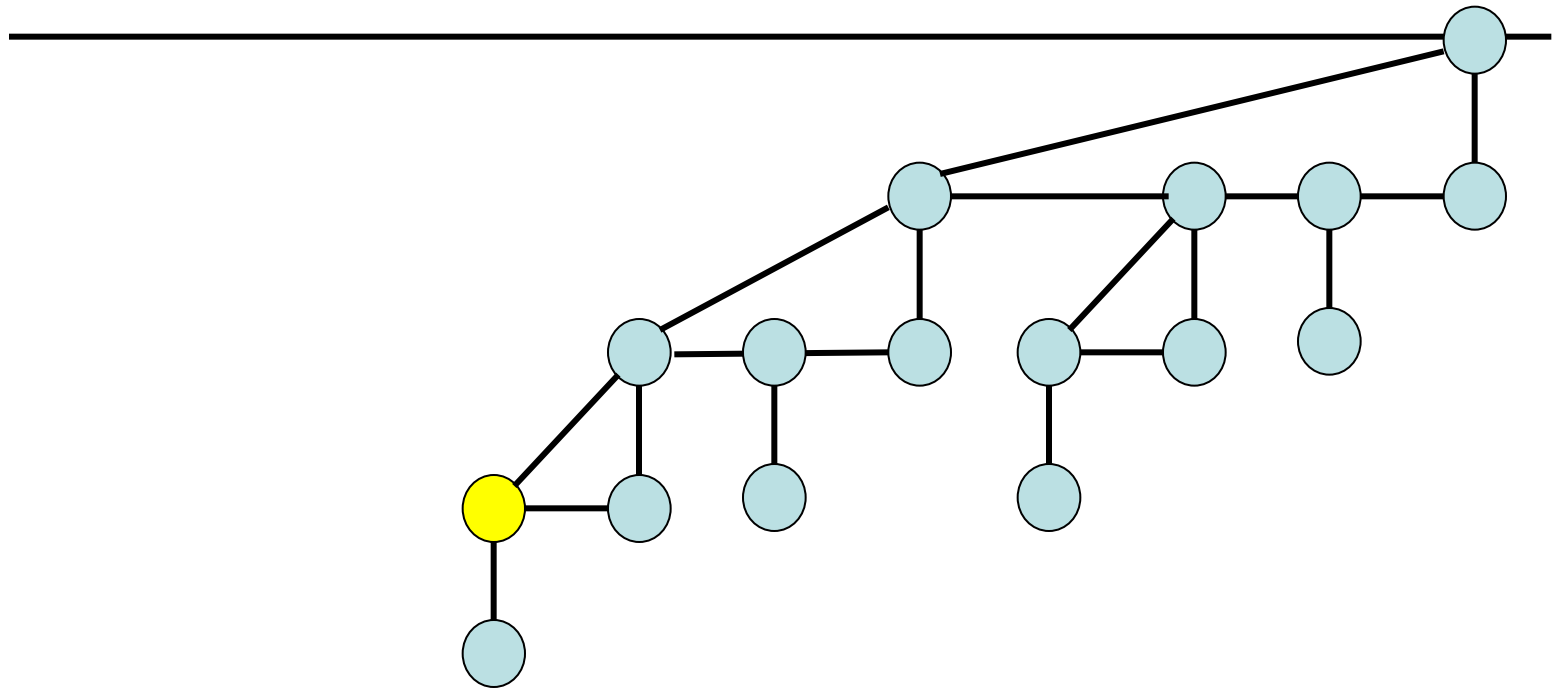
Aufwand: $O(1)$, da gegebener Knoten 7 in $O(1)$ Zeit entfernbar und Kinderliste von 7 in $O(1)$ Zeit in Wurzelliste integrierbar



- Vergleich zu Standard-Delete:
 - $\text{key}(e) := -\infty$ und siftUp wäre schon in $O(\log n)$
- Also kein siftUp
- Problem:
 - Bäume gleichen Ranges treten in der Wurzelliste auf
 - Binomial-Heap-Eigenschaft kann verletzt sein

Fibonacci-Heap

Beispiel für delete(x)



Fibonacci-Heap: Übersicht

Operationen:

- **merge**: Verbinde Wurzellisten, aktualisiere min-Pointer: Zeit $O(1)$
- **insert(x, pq)**: Füge B_0 (mit x) in Wurzelliste ein, aktualisiere min-Pointer. Zeit $O(1)$
- **min(pq)**: Gib Element, auf das der min-Pointer zeigt, zurück. Zeit $O(1)$
- **deleteMin(pq), delete(x, pq), decreaseKey(x, pq, Δ)**: noch zu bestimmen...

Fibonacci-Heap

deleteMin(pq): Diese Operation hat Aufräumfunktion.
Der min-Pointer zeige auf **x**.

procedure deleteMin()

*entferne **x** aus Wurzelliste*

*konkateneriere Kinderliste von **x** mit Wurzelliste*

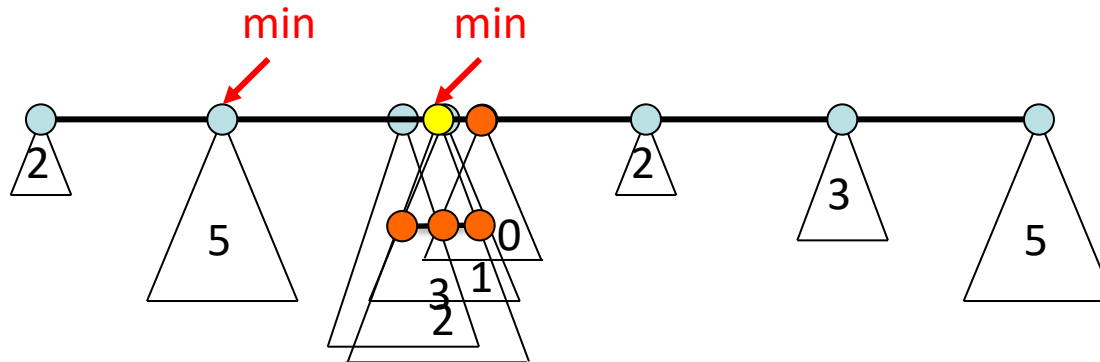
while ≥ 2 *Bäume mit gleichem Rang **i** do*

*merge Bäume zu Baum mit Rang **i+1** // (wie bei zwei Binomial-Bäumen)*

aktualisiere den min-Pointer

- Durch die Integration der Kinderliste in die Wurzelliste können dort Bäume gleichen Ranges auftreten, die Struktur wird jedoch danach konsolidiert
- Die schon durch **delete** auftretenden Heaps gleichen Ranges werden gleich mit behandelt!

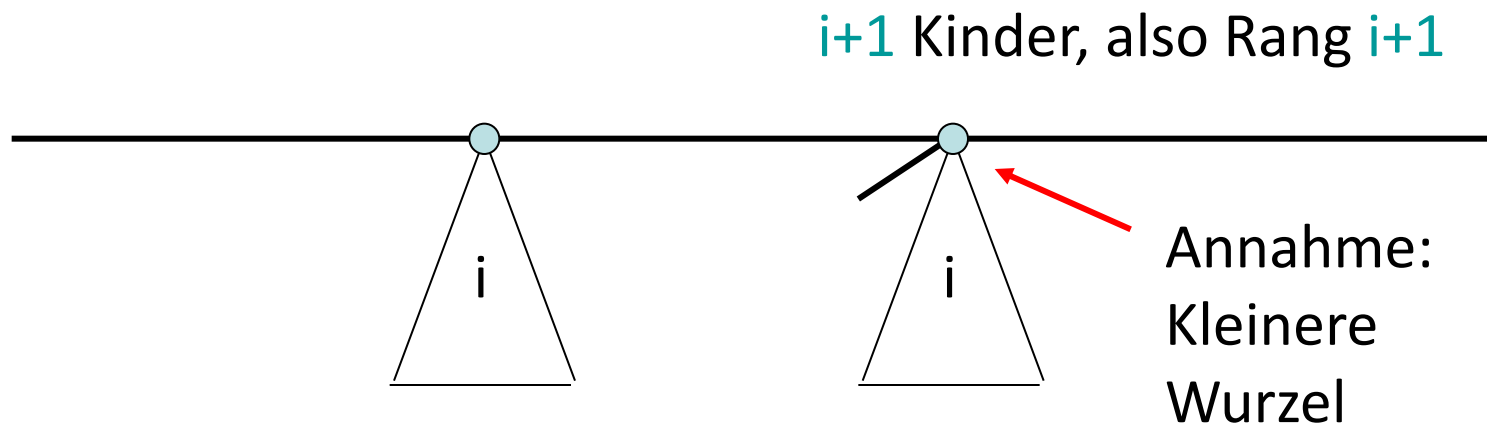
Beispiel: deleteMin



vorher

Binomial-Heap-Eigenschaft gilt auch

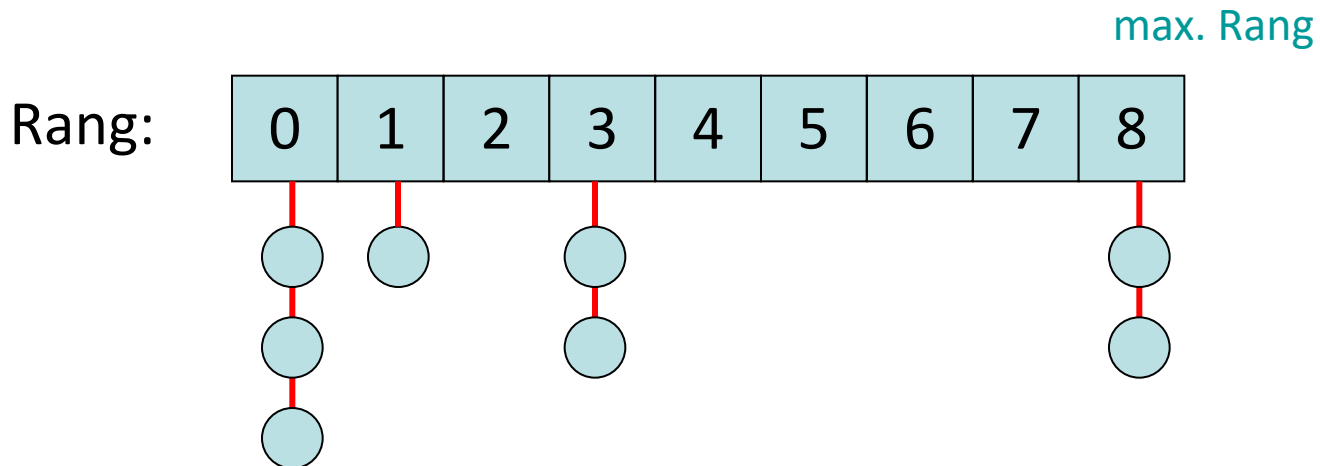
Verschmelzung zweier Bäume mit Rang i
(d.h. Wurzelknoten haben i Kinder):



Fibonacci-Heap

Effiziente Findung von Wurzeln mit gleichem Rang:

- Scanne vor while-Schleife alle Wurzeln und speichere diese nach Rängen in Feld (Eimerkette!):



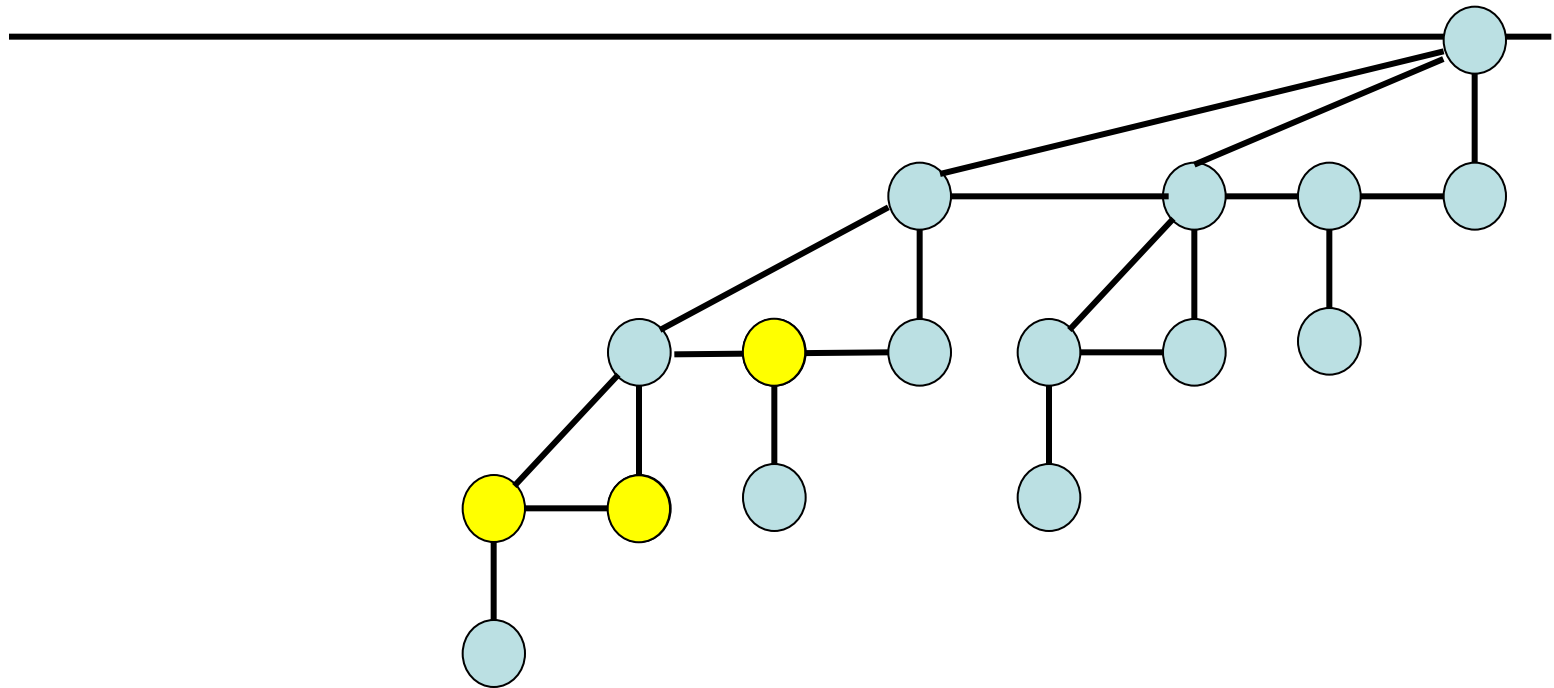
- Merge dann wie bei Binomialbäumen von Rang 0 an bis maximaler Rang erreicht

Operation delete

- Konsolidierung im Inneren der Heaps

Fibonacci-Heap

Beispiel für delete(x): (● : Mark=1)



Fibonacci-Heap

Sei $\text{parent}(x)$ Vater von Knoten x . Wenn x neu eingefügt wird, ist $\text{Mark}(x)=0$ ($\text{Mark}(x)$ speichert, ob ein Kind entfernt wurde).

```
procedure delete( $x$ ):  
  if  $x$  ist min-Wurzel then  
    deleteMin()  
  else  
    hänge  $x$  aus, füge Kinder von  $x$  in Wurzelliste ein (entmarkiere entsprechend)  
  if not  $\text{parentExists}(x)$  then  
    exit //  $x$  ist Wurzel  
  while true do  
     $x := \text{parent}(x)$   
    if not  $\text{parentExists}(x)$  then  
      exit //  $x$  ist Wurzel  
    if  $\text{Mark}(x)=0$  then  
       $\text{Mark}(x) := 1$   
      exit  
    else //  $\text{Mark}(x)=1$ , also schon Kind weg  
      hänge  $x$  samt Unterbaum in Wurzelliste  
       $\text{Mark}(x) := 0$  // Wurzeln benötigen kein Mark
```


Fibonacci-Heap

procedure decreaseKey(x, Δ):

füge x samt Unterbaum in Wurzelliste ein (entmarkiere entsprechend)

$\text{key}(x) := \text{key}(x) - \Delta$

aktualisiere min-Pointer

if not parentExists(x) **then**

exit // war x Wurzel?

while true **do**

$x := \text{parent}(x)$

if not parentExists(x) **then**

exit // x ist Wurzel

if Mark(x)=0 **then**

$\text{Mark}(x) := 1$

exit

else // Mark(x)=1

hänge x samt Unterbaum in Wurzelliste

$\text{Mark}(x) := 0$

Fibonacci-Heap mit markierten Fehlern

Zeitaufwand:

- `deleteMin()`:
 $O(\text{max. Rang} + \text{\#Baumverschmelzungen})$
- `delete(x), decreaseKey(x, \Delta)`:
 $O(1 + \text{\#kaskadierende Schritte})$
d.h. $\text{\#umgehangter markierter Knoten}$

Wir werden sehen:

Zeitaufwand kann in beiden Fällen $O(n)$ sein,
aber richtig verteilt viel günstiger.

Strukturfehler: Verschiebung der Arbeit

- Statt bei jedem **merge** und **decreaseKey** einen Aufwand von $O(\log n)$ zu leisten, ...
- ... wird die Arbeit bei einem **deleteMin** mit übernommen, ...
- ... mit der Idee, dass man die entsprechenden Strukturen dort sowieso anfassen muss
- Das Umverteilen kann sich über eine längere Sequenz von Operationen durchaus amortisieren
- Vgl. **build** für binäre Heaps

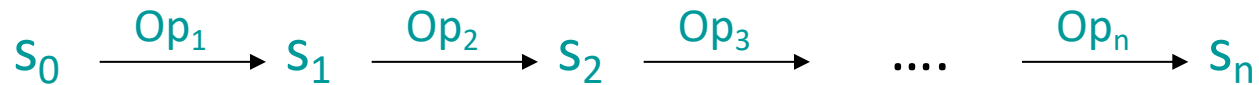
Amortisierte Analyse

Betrachte Folge von n Operationen auf anfangs leerem Fibonacci-Heap.

- Summierung der worst-case Kosten viel zu hoch!
- Average-case Analyse auch nicht sehr aussagekräftig
- **Besser: amortisierte Analyse**, d.h. durchschnittliche Kosten aller Operationen der Sequenz im worst-case Fall (teuerste **Folge**)

Amortisierte Analyse

- S : Zustandsraum einer Datenstruktur
- F : beliebige Folge von Operationen $\langle Op_1, Op_2, Op_3, \dots, Op_n \rangle$
- s_0 : Anfangszustand der Datenstruktur



- Zeitaufwand $T(F) = \sum_{i=1}^n T_{Op_i}(s_{i-1})$

Amortisierte Analyse

Zeitaufwand $T(F) = \sum_{i=1}^n T_{Op_i}(s_{i-1})$

Für den Zeitbedarf definieren wir eine Menge von Abschätzungsfunktionen $A_{Op}(s)$, eine pro Operation Op

Die Menge $\{ A_x(s) \mid x \in \{Op_1, Op_2, Op_3, \dots, Op_n\}$ heißt **Familie amortisierter Zeitschranken** falls für jede Sequenz F von Operationen gilt

$$T(F) \leq A(F) := c + \sum_{i=1}^n A_{Op_i}(s_{i-1})$$

für eine Konstante c unabhängig von F

Amortisierte Analyse: Potentialmethode

Behauptung: Sei S der Zustandsraum einer Datenstruktur, sei s_0 der Anfangszustand und sei $\phi: S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative Funktion.

$\phi: S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ wird auch **Potential** genannt.

Für eine Operation X und einen Zustand s mit $s \xrightarrow{X} s'$ definiere $A_X(s)$ über die **Potentialdifferenz**:

$$A_X(s) := \phi(s') - \phi(s) + T_X(s) := \Delta\phi(s) + T_X(s)$$

Dann sind die Funktionen $A_X(s)$ eine Familie amortisierter Zeitschranken.

Amortisierte Analyse: Potentialmethode

Zu zeigen: $T(F) \leq c + \sum_{i=1}^n A_{Op_i}(s_{i-1})$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n A_{Op_i}(s_{i-1}) &= \sum_{i=1}^n [\phi(s_i) - \phi(s_{i-1}) + T_{Op_i}(s_{i-1})] \\ &= T(F) + \sum_{i=1}^n [\phi(s_i) - \phi(s_{i-1})] \\ &= T(F) + \phi(s_n) - \phi(s_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\models T(F) &= \sum_{i=1}^n A_{Op_i}(s_{i-1}) + \phi(s_0) - \phi(s_n) \\ &\leq \sum_{i=1}^n A_{Op_i}(s_{i-1}) + \phi(s_0) \text{ konstant}\end{aligned}$$

Amortisierte Analyse: Potentialmethode

Für Fibonacci-Heaps verwenden wir für das Potential den Begriff Balance (**bal**)

$\text{bal}(s) := \# \text{Bäume} + 2 \cdot \# \text{markierte Knoten im Zustand } s$

Für jeden markierten Knoten müssen wir

- eine Abtrennung und Entmarkierung vornehmen und
- dann in die Wurzelliste einsortieren
(was für deleteMin wieder Aufwand erzeugt)

**Daher nehmen zählen wir für das Potential
jeden markierten Knoten zweimal**

Fibonacci-Heap: insert, merge, min

- t_i : Zeit für Operation i ausgeführt im Zustand s
- a_i : amortisierter Aufwand für Operation i
 $a_i = t_i + \Delta \text{bal}_i$ mit $\Delta \text{bal}_i = \text{bal}(s') - \text{bal}(s)$, falls $i: s \rightarrow s'$ im aktuellen Zustand s ausgeführt wird

Amortisierte Kosten der Operationen:

$$\text{bal}(s) = \# \text{Bäume}(s) + 2 \cdot \# \text{markierte Knoten}(s)$$

- insert: $t = O(1)$ und $\Delta \text{bal}_{\text{insert}} = +1$, also $a_{\text{insert}} = O(1)$
- merge: $t = O(1)$ und $\Delta \text{bal}_{\text{merge}} = 0$, also $a_{\text{merge}} = O(1)$
- min: $t = O(1)$ und $\Delta \text{bal}_{\text{min}} = 0$, also $a_{\text{min}} = O(1)$

Fibonacci-Heap

- Inv:
- Ein **Fibonacci-Heap** aus n Elementen hat **Bäume vom Rang maximal $O(\log n)$** (wie beim Binomial-Heap)
- Siehe Tafelbild

Fibonacci-Heap: Eigenschaften

Invariante 1: Sei x ein Knoten im Fibonacci-Heap mit $\text{Rang}(x)=k$. Seien die Kinder von x sortiert in der Reihenfolge ihres Anfügens an x . Dann ist der Rang des i -ten Kindes $\geq i-2$.

Beweis der Gültigkeit:

- Beim Einfügen des i -ten Kindes ist $\text{Rang}(x)=i-1$.
- Das i -te Kind hat zu dieser Zeit auch Rang $i-1$.
- Danach verliert das i -te Kind höchstens eines seiner Kinder¹, d.h. sein Rang ist $\geq i-2$.

¹ Bei einem schon markierten Vater eines gelöschten Knotens wird konsolidiert

Fibonacci-Heap: Eigenschaften

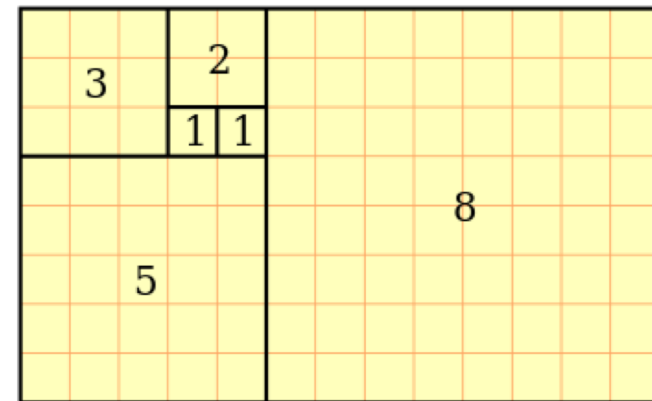
Invariante 2: Sei x ein Knoten im Fibonacci-Heap mit $\text{Rang}(x)=k$. Dann enthält der Baum mit Wurzel x mindestens F_{k+2} Elemente, wobei F_{k+2} die $(k+2)$ -te Fibonacci-Zahl ist.

Einschub: Definition der Fibonacci-Zahlen:

- $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$
- $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ für alle $i > 1$

Daraus folgt, dass $F_{i+2} = 1 + \sum_{j=0}^i F_j$

Warum? (s.Tafel)



1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, usw.

[Wikipedia]

Fibonacci-Heap

Beweis der Gültigkeit von Invariante 2:

- Sei f_k die minimale Anzahl von Elementen in einem Baum mit Rang k .

- Aus Invariante 1 folgt:

$$f_k \geq f_{k-2} + f_{k-3} + \dots + f_0 + 1 + 1$$

1. Kind

Rang des i -ten Kindes $\geq i-2$

- Weiterhin ist $f_0=1$ und $f_1=2$

Wurzel

- Also folgt nach den Fibonacci-Zahlen:

$$f_k \geq F_{k+2}$$

Spirale über den Goldenen Schnitt



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi \approx 1,61803$$

aus: [Wikipedia]

Verwandtschaft mit dem Goldenen Schnitt [\[Bearbeiten\]](#)

Wie von [Johannes Kepler](#) festgestellt wurde, nähert sich der [Quotient](#) zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen dem [Goldenen Schnitt](#) Φ an. Dies folgt unmittelbar aus der [Näherungsformel](#) für große n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi^{n+1}}{\Phi^n} = \Phi \approx 1,618 \dots$$

Diese Quotienten zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen haben eine bemerkenswerte [Kettenbruchdarstellung](#)

$$\frac{1}{1} = 1 \quad \frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{1} \quad \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} \quad \frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} \quad \frac{8}{5} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}$$

Da diese Quotienten im Grenzwert gegen den goldenen Schnitt konvergieren, lässt sich dieser als der unendliche Kettenbruch

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

darstellen.

Die Zahl Φ ist [irrational](#). Das bedeutet, dass sie sich nicht durch ein Verhältnis zweier ganzer Zahlen darstellen lässt, ein Umstand, der wesentlich zu ihrer Bedeutung in Kunst und Natur beiträgt. Am besten lässt sich Φ durch Quotienten zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen darstellen. Dies gilt auch für verallgemeinerte Fibonaccifolgen, bei denen f_0 und f_1 beliebige natürliche Zahlen annehmen.

Fibonacci-Heap

- Man hat herausgefunden, dass $F_k > \Phi^k$ ist für

$$\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618034$$

- D.h. ein Baum mit Rang k im Fibonacci-Heap hat mindestens $1,61^k$ Knoten.
- Ein **Fibonacci-Heap** aus n Elementen hat also **Bäume vom Rang maximal $O(\log n)$** (wie beim Binomial-Heap)

<http://www.was-darwin-nicht-wusste.de/wunder/mathematische-ueberraschungen.html>

<http://www14.in.tum.de/lehre/2008WS/ea/index.html.de>

<http://www14.in.tum.de/lehre/2008WS/ea/index.html.de>

Fibonacci-Heap: deleteMin

Behauptung:

Die amortisierten Kosten von deleteMin() sind $O(\log n)$.

Beweis:

- Einfügen der Kinder von x in Wurzelliste ($\#Kinder(x) = \text{Rang}(x)$):
 $\Delta bal_1 = \text{Rang}(x) - 1$ (-1 weil x entfernt wird)
- Jeder Merge-Schritt verkleinert #Bäume um 1:
 $\Delta bal_2 = -(\#Merge\text{-Schritte})$
- Wegen Inv (Rang der Bäume max. $O(\log n)$) gilt: $\#Merge\text{-Schritte} = \#Bäume - O(\log n)$
- Insgesamt: $\Delta bal_{\text{deleteMin}} = \text{Rang}(x) - \#Bäume + O(\log n)$
- Laufzeit (in geeigneten Zeiteinheiten):
 $t_{\text{deleteMin}} = \#Bäume^1 + O(\log n)$
- Amortisierte Laufzeit:
 $a_{\text{deleteMin}} = t_{\text{deleteMin}} + \Delta bal_{\text{deleteMin}} \in O(\log n)$

¹ Realisierung der Eimerkette

Fibonacci-Heap: delete

Behauptung: Die amortisierten Kosten von $\text{delete}(x)$ sind $O(\log n)$.

Beweis: (x ist kein min-Element – sonst wie oben)

- Einfügen der Kinder von x in Wurzelliste:
 $\Delta \text{bal}_1 \leq \text{Rang}(x)$
- Jeder kaskadierende Schritt (Entfernung eines markierten Knotens) erhöht die Anzahl Bäume um 1:
 $\Delta \text{bal}_2 = \# \text{kaskadierende Schritte}$
- Jeder kaskadierende Schritt entfernt eine Markierung:
 $\Delta \text{bal}_3 = -2 \cdot \# \text{kaskadierende Schritte}$
- Der letzte Schritt von delete erzeugt evtl. eine Markierung:
 $\Delta \text{bal}_4 \in \{0, 2\}$

Fibonacci-Heap: delete (Forts.)

Behauptung: Die amortisierten Kosten von $\text{delete}(x)$ sind $O(\log n)$.

Beweis (Fortsetzung):

- Insgesamt:

$$\begin{aligned}\Delta \text{bal}_{\text{delete}} &= \text{Rang}(x) - \# \text{kaskadierende Schritte} + O(1) \\ &= O(\log n) - \# \text{kaskadierende Schritte}\end{aligned}$$

- Laufzeit (in geeigneten Zeiteinheiten):

$$t_{\text{delete}} = O(1) + \# \text{kaskadierende Schritte}$$

- Amortisierte Laufzeit:

$$a_{\text{delete}} = t_{\text{delete}} + \Delta \text{bal}_{\text{delete}} \in O(\log n)$$

Fibonacci-Heap: decreaseKey

Behauptung: Die amortisierten Kosten von $\text{decreaseKey}(x, \Delta)$ sind $O(1)$.

Beweis:

- Jeder kask. Schritt erhöht die Anzahl Bäume um 1:
 $\Delta \text{bal}_1 = \# \text{kaskadierende Schritte}$
- Jeder kask. Schritt entfernt eine Markierung (bis auf x):
 $\Delta \text{bal}_2 \leq -2 \cdot (\# \text{kaskadierende Schritte} - 1)$
- Der letzte Schritt erzeugt evtl. eine Markierung:
 $\Delta \text{bal}_3 \in \{0, 2\}$
- Insgesamt: $\Delta \text{bal}_{\text{decreaseKey}} = - \# \text{kask. Schritte} + O(1)$
- Laufzeit: $t_{\text{decreaseKey}} = \# \text{kask. Schritte} + O(1)$
- Amortisierte Laufzeit:
 $a_{\text{decreaseKey}} = t_{\text{decreaseKey}} + \Delta \text{bal}_{\text{decreaseKey}} = O(1)$

Zusammenfassung: Laufzeitvergleich



Laufzeit	Binärer Heap	Binomial-Heap	Fibonacci-Heap
insert	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
min	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
deleteMin	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$ amor.
delete	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$ amor.
decreaseKey	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$ amor.
merge	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(1)$

Michael L. Fredman, Robert E. Tarjan: Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms. In: Journal of the ACM. 34, Nr. 3, S. 596–615, 1987

Zusammenfassung: Laufzeitvergleich



Laufzeit	Binärer Heap	Binomial-Heap	Fibonacci-Heap
insert	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
min	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
deleteMin	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$ amor.
delete	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$ amor.
decreaseKey	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$ amor.
merge	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(1)$

Weitere Entwicklung unter Ausnutzung
von Dateneigenschaften: Radix-Heap

Radix-Heap (nur Analyse)

Voraussetzungen [\[Bearbeiten\]](#)

1. alle Schlüssel sind aus den natürlichen Zahlen
2. $\text{max. Schlüssel} - \text{min. Schlüssel} \leq C$ für ein festes C
3. Monotonie von *extractMin*, d.h. die von aufeinander folgenden *extractMin*-Aufrufen zurückgegebenen Werte sind monoton steigend

Laufzeit	Radix-Heap	erw. Radix-Heap
insert	$O(\log C)$ amor.	$O(\log C)$ amor.
min	$O(1)$	$O(1)$
deleteMin	$O(1)$ amor.	$O(1)$ amor.
delete	$O(1)$	$O(1)$ amor.
merge	n/a	$O(\log C)$ amor.
decreaseKey	$O(1)$	$O(\log C)$ amor.

Ahuja, Ravindra K.; Mehlhorn, Kurt; Orlin, James B.; Tarjan, Robert E.,
Faster algorithms for the shortest path problem, Journal of the
Association for Computing Machinery 37 (2): 213–223, 1990

Van Emde Boas Baum (vEB-Baum)

- Warteschlange mit Kapazitätsbegrenzung
- Verwendung eines speziellen Baumes
- Sei M die maximale Anzahl von Elementen im Baum, nicht die aktuell gespeicherte Anzahl n

Space	$O(M)$
Search	$O(\log \log M)$
Insert	$O(\log \log M)$
Delete	$O(\log \log M)$

Es geht auch ohne amortisierte Analyse ...

operation	linked list	binary heap	binomial heap	pairing heap †	Fibonacci heap †	Brodal queue
MAKE-HEAP	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
IS-EMPTY	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
INSERT	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
DELETE-MIN	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
DECREASE-KEY	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$2\sqrt{O(\log \log n)}$	$O(1)$	$O(1)$
DELETE	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
MERGE	$O(1)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
MIN	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$

Fredman, Michael L.; Sedgewick, Robert; Sleator, Daniel D.; Tarjan, Robert E. The pairing heap: a new form of self-adjusting heap. *Algorithmica*. 1 (1): 111–129, **1986**.

† amortized

Gerth Stølting Brodal, Worst-case efficient priority queues. *Proc. 7th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 52–58, **1996**