Algorithmen und Datenstrukturen

Prof. Dr. Ralf Möller

Universität zu Lübeck

Institut für Informationssysteme

Felix Kuhr (Übungen)

sowie viele Tutoren

Allgemeine Lernziele Vorlesung

Einem Vortragenden zuhören zu lernen,

… der über ein nicht ganz triviales Thema referiert

Dem Vortragenden beim Vortrag gedanklich folgen

Vorbereitung für das Erarbeiten der Inhalte

Erarbeitung durch

- Nacharbeitung der Präsentationen
- Lösen von Übungsaufgaben
- Diskussion in Übungsgruppe

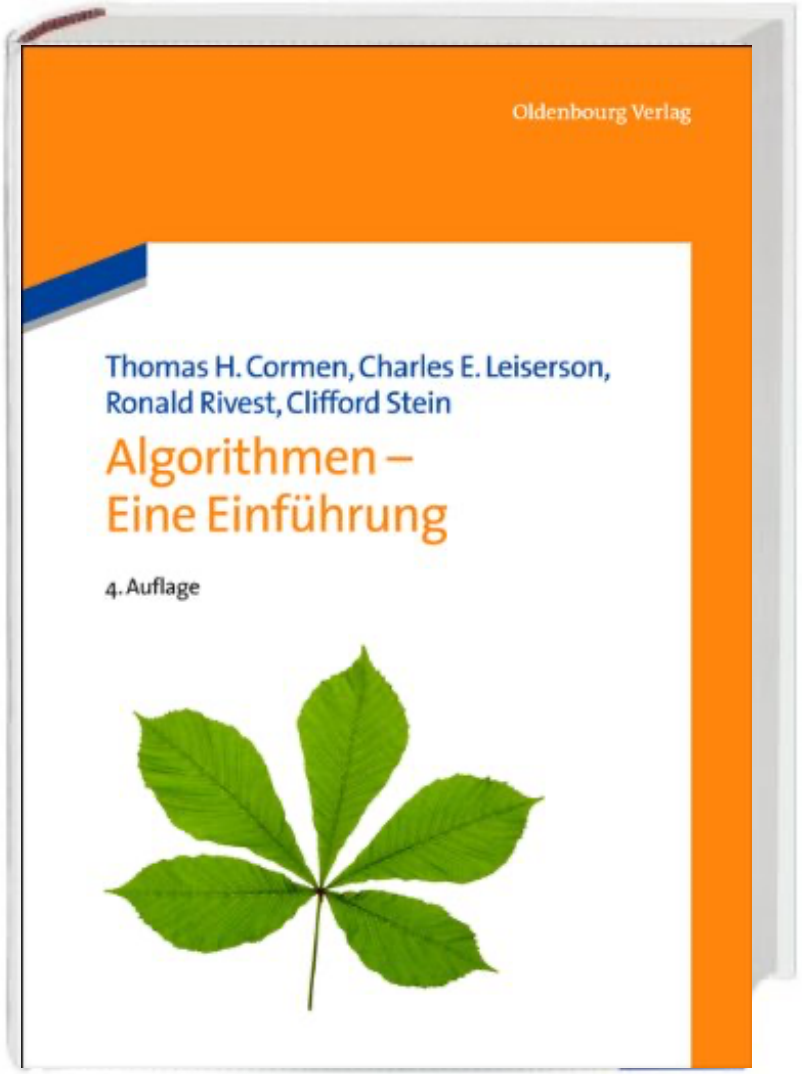
Organisatorisches: Übungen

- **Start**: Siehe Moodle
- **Übungen**: Verschiedene Gruppen, Anmeldung über Moodle
- **Übungsaufgaben** stehen jeweils kurz nach der Vorlesung am Freitag über Moodle bereit
- Aufgaben sollen in einer **2-er Gruppe** bearbeitet werden
- **Abgabe der Lösungen** erfolgt bis Donnerstag in der jeweils folgenden Woche nach Ausgabe bis 12 Uhr
- Bei Programmieraufgaben: C++ oder Java
- Bitte unbedingt Namen, Matrikelnummern und Übungsgruppennummern auf Abgaben vermerken

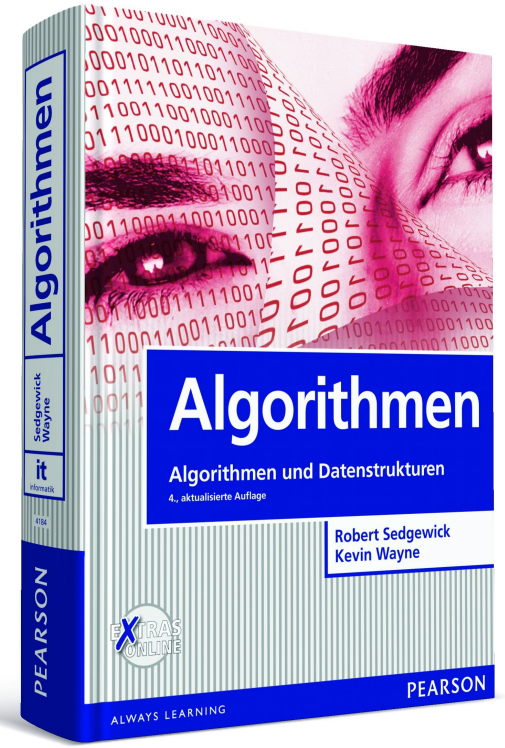
Organisatorisches: Prüfung

- Die **Eintragung in den Kurs** und in eine Übungsgruppe ist **Voraussetzung**, um an dem Modul Algorithmen und Datenstrukturen teilnehmen zu können und Zugriff auf die aktuellen Unterlagen zu erhalten (PDF, PPTX, MP4)
- Am Ende des Semesters findet eine **Klausur** statt
- **Voraussetzung** zur Teilnahme an der Klausur sind mindestens **50% der gesamtmöglichen Punkte aller Übungszettel**

Das „Skript“


Oldenbourg Verlag
Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson,
Ronald Rivest, Clifford Stein
Algorithmen –
Eine Einführung
4. Auflage

Zusätzlich empfohlene Literatur



Teilnehmerkreis und Voraussetzungen

Studiengänge

- Bachelor **Informatik**
- Bachelor **IT-Sicherheit**
- Bachelor **Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften**
- Bachelor **Medieninformatik**
- Bachelor **Medizinische Informatik**
- Bachelor **Medizinische Ingenieurwissenschaft**
- Bachelor **Robotik und Autonome Systeme**

Vorausgesetzte Kenntnisse

- Einführung in die Programmierung
- Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 1

Spezielle Lernziele in diesem Kurs

- Weg **vom Problem zum Algorithmus** gehen können
  - **Auswahl** eines Algorithmus aus Alternativen unter Bezugnahme auf vorliegende Daten und deren Struktur
  - **Entwicklung** eines Algorithmus mitsamt geeigneter Datenstrukturen (Terminierung, Korrektheit, ...)
- **Analyse von Algorithmen** durchführen
  - Anwachsen der Laufzeit bei Vergrößerung der Eingabe
- Erste Schritte in Bezug auf die **Analyse von Problemen** gehen können
  - Ja, Probleme sind etwas anderes als Algorithmen!
  - Probleme können in gewisser Weise „schwer“ sein
  - Prüfung, ob Algorithmus optimal

Beispielproblem: Summe der Elemente eines Feldes A[1..n] bestimmen

- Algorithmus?

- summe(A) = $\sum_{i=1}^{n} A[i]$
- Programm :

```
function summe(A)
    s ← 0
    for i from 1 to n do
        s ← s + A[i]
    return s
```

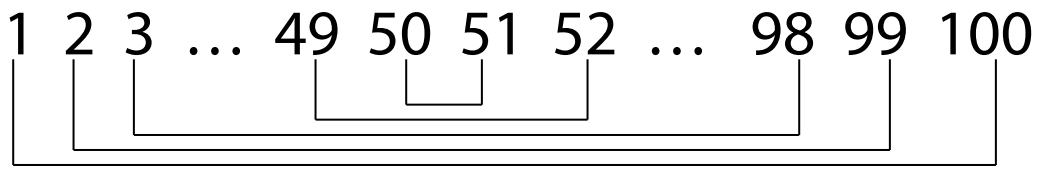
- Aufwand?
- Wenn A n Elemente hat, n Schritte!
- Der Aufwand wird *linear* genannt

Spezialisierung des Problems

- Vorwissen: A[i] = i

- Das Problem wird sehr viel einfacher!

Ausnutzen der Einschränkung



Summe jedes Paares: 101

50 Paare: $101 * 50 = 5050$

- Programm:

```
function summe(A)
    n ← length(A)
    return (n+1)*(n/2)
```

- Nach Carl Friedrich Gauß (ca. 1786)
- Aufwand?
- Konstant, d.h. hängt (idealisiert!) nicht von n ab
- Entwurfsmuster: Ein-Schritt-Berechnung (konstanter Aufwand)

Algorithmen: Notation durch Programme

- Annahme: Serielle Ausführung
- Vgl. **Vorlesung „Einführung in die Programmierung“**
  - Variablen, Felder A[...]
  - Zuweisungen ← (oder auch **:=**)
  - Fallunterscheidungen **if** ... **then** ... **else** ...
    - Vergleich und Berechnungen für Bedingungstest
  - Schleifen **while** ... **do**, **for** ... **do**
    - Vergleich und Berechnungen für Bedingungstest
  - **procedure**, **function**
  - Auf Folien wird der jeweilige Skopus durch Einrückung ausgedrückt

Das erste Problem: Summe der Elemente

- **Gegeben: A[1..n] : N**
  - Feld (Array) A von n Zahlen aus N (natürliche Zahlen)
- **Gesucht:**
  - Transformation **S** auf A, so dass gilt:
    - $s = \Sigma_{i \in \{1,...,n\}} A[i]$
  - Also: Gesucht ist ein Verfahren **S**, so dass **{ P } S { Q }** gilt (Notation nach Hoare)
    - Vorbedingung **P**: true (keine Einschränkung)
    - Nachbedingung **Q**: $s = \Sigma_{i \in \{1,...,n\}} A[i]$

C.A.R. Hoare, An axiomatic basis for computer programming. Communications of the ACM, Vol. 12, S. 567 - 583, **1969**

Das zweite Problem: Summe der Elemente

- **Gegeben: A[1..n] : N**
  - Feld (Array) A von n Zahlen aus N (natürliche Zahlen)
- **Gesucht:**
  - Transformation **S** von A, so dass gilt:
    - $s = \Sigma_{i \in \{1,\ldots,n\}} A[i]$
  - Also: Gesucht ist ein Verfahren **S**, so dass **{ P } S { Q }** gilt (Notation nach Hoare)
    - Vorbedingung **P**: $\forall\, i \in \{1 \ldots n\}$: **A[i] = i**
    - Nachbedingung **Q**: $s = \Sigma_{i \in \{1,\ldots,n\}} A[i]$

C.A.R. Hoare, An axiomatic basis for computer programming. Communications of the ACM, Vol. 12, S. 567 - 583, **1969**

Ein neues Problem: In-situ-Sortierproblem

- **Gegeben: A[1..n] : N**
  - Feld (Array) A von n Zahlen aus N (natürliche Zahlen)
- **Gesucht:**
  - Transformation S von A, so dass gilt: $\forall 1 \leq i < j \leq n: A[i] \leq A[j]$
  - Nebenbedingung: Es wird intern kein weiteres Feld gleicher (oder auch nur fast gleicher Größe) verwendet
  - Also: Gesucht ist ein Verfahren **S**, so dass **{ P } S { Q }** gilt (Notation nach Hoare)
    - Vorbedingung **P:** true (keine Einschränkung)
    - Nachbedingung **Q:** $\forall 1 \leq i < j \leq n: A[i] \leq A[j]$
    - Nebenbedingung: nur „konstant“ viel zusätzlicher Speicher (feste Anzahl von Hilfsvariablen)

C.A.R. Hoare, An axiomatic basis for computer programming. Communications of the ACM, Vol. 12, S. 567 - 583, **1969**

In-situ-Sortieren: Problemanalyse

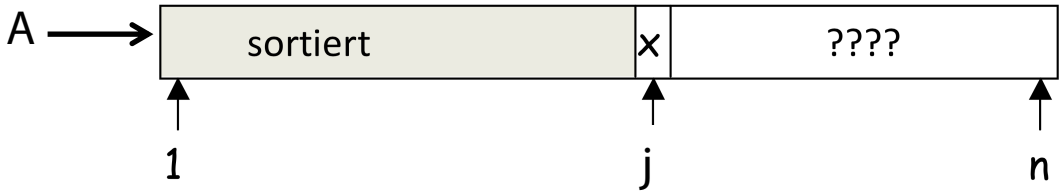
- Felder erlauben **wahlfreien** Zugriff auf Elemente
  - **Zugriffszeit** für ein Feld **konstant**
    (d.h. sie hängt nicht vom Indexwert ab)
  - Idealisierende Annahme (gilt nicht für moderne Computer)
- Es gibt keine Aussage darüber, ob die Feldinhalte schon sortiert sind, eine willkürliche Reihenfolge haben, oder umgekehrt sortiert sind
  - Vielleicht lassen sich solche „**erwarteten Eingaben**“
    aber in der Praxis feststellen
- **Aufwand das Problem zu lösen**: Man kann leicht sehen, dass jedes Element „falsch positioniert“ sein kann
  - **Mindestaufwand** im allgemeinen Fall: n Bewegungen
  - **Maximalaufwand** in Abhängigkeit von n?

Aufwand zur Lösung eines Problems

- Gegeben ein **Problem** (hier: In-situ-Sortierproblem)
  - Damit verbundene Fragen:
    - Wie „langsam“ muss ein Algorithmus sein, damit alle möglichen Probleminstanzen korrekt gelöst werden?
    - Oder: Wenn wir schon einen Algorithmus haben, können wir noch einen „substantiell besseren“ finden? Was müssen wir investieren?
- Jede Eingabe A stellt eine **Probleminstanz** dar
- Notwendiger Aufwand in Abhängigkeit von der Größe der Eingabe heißt **Komplexität eines Problems**
  - Anzahl der notwendigen Verarbeitungsschritte in Abhängigkeit der Größe der Eingabe (hier: Anzahl der Elemente des Feldes A)
  - Komplexität durch jeweils „schlimmste“ Probleminstanz bestimmt
  - Einzelne Probleminstanzen können evtl. weniger Schritte benötigen

Beispiel 2: Sortierung

- Gegeben: A = [4, 7, 3, 5, 9, 1]
- Gesucht: In-situ-Sortierverfahren (aufsteigend)
- Aufgabe: Entwickle "Idee"




```
1: procedure INSERTION-SORT(A)
2:     for j ← 2 to length(A) do
3:         key ← A[j]
4:         ▷ Insert A[j] into the sorted sequence A[1..j − 1]
5:         i ← j − 1
6:         while i > 0 and A[i] > key do
7:             A[i + 1] ← A[i]
8:             i ← i − 1
9:         A[i + 1] ← key
```

Entwurfsmuster / Entwurfsverfahren

- Schrittweise Berechnung
  - Beispiel: Bestimmung der Summe eines Feldes durch Aufsummierung von Feldelementen
- Ein-Schritt-Berechnng
  - Beispiel: Bestimmung der Summe eines Feldes ohne die Feldelemente selbst zu betrachten (geht nur unter Annahmen)
- Verkleinerungsprinzip
  - Beispiel: Sortierung eines Feldes
    - Unsortierter Teil wird immer kleiner, letztlich leer
    - Umgekehrt: Sortierter Teil wird immer größer, umfasst am Ende alles → Sortierung erreicht

Laufzeitanalyse

- Laufzeit als **Funktion der Eingabegröße**
- Verbrauch an Ressourcen: **Zeit**, **Speicher**, Bandbreite, Prozessoranzahl, ...
- Laufzeit bezogen auf serielle Maschinen mit wahlfreiem Speicherzugriff
  - **von Neumann-Architektur ...**
  - ... und Speicherzugriffszeit als konstant angenommen
- Laufzeit kann von der Art der Eingabe abhängen (**bester Fall, typischer Fall, schlechtester Fall**)
- Meistens: schlechtester Fall betrachtet

Aufwand für Zuweisung, Berechnung, Vergleich?

		Zeit	Wie oft?
1:	**procedure** INSERTION-SORT(A)		
2:	**for** $j \leftarrow 2$ to $length(A)$ **do**	c_1	n
3:	$key \leftarrow A[j]$	c_2	$n-1$
4:	▷ Insert $A[j]$ into $A[1..j-1]$		
5:	$i \leftarrow j-1$	c_4	$n-1$
6:	**while** $i > 0$ and $A[i] > key$ **do**	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
7:	$A[i+1] \leftarrow A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n}(t_j-1)$
8:	$i \leftarrow i-1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n}(t_j-1)$
9:	$A[i+1] \leftarrow key$	c_8	$n-1$

t_j = Anzahl der Durchläufe der *while*-Schleife im j-ten Durchgang.

$c_1 - c_8$ = unspezifizierte Konstanten.

$$T(n) = c_1 n + (c_2 + c_4 + c_8)(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$$

Bester Fall: Feld ist aufsteigend sortiert

Ist das Array bereits aufsteigend sortiert, so wird die *while*-Schleife jeweils nur einmal durchlaufen: $t_j = 1$

$$T(n) = c_1 n + (c_2 + c_4 + c_8)(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$$

$$T(n) = (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8)$$

Also ist $T(n)$ eine lineare Funktion der Eingabegröße n.

Schlechtester Fall: Feld ist absteigend sortiert

Ist das Array bereits absteigend sortiert, so wird die *while*-Schleife maximal oft durchlaufen: $t_j = j$

$$T(n) = c_1 n + (c_2 + c_4 + c_8)(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$$

$$\sum_{j=2}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \qquad \sum_{j=2}^{n} (j-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \sum_{j=2}^{n} j - \sum_{j=2}^{n} 1 = (n(n+1)/2 - 1) - (n-1)$$

$$= n(n+1)/2 - n = n^2/2 + n/2 - n$$

$$= n^2/2 - n/2 = n(n-1)/2$$

Schlechtester Fall: Feld ist absteigend sortiert

Ist das Array bereits absteigend sortiert, so wird die *while*-Schleife maximal oft durchlaufen: $t_j = j$

$$T(n) = c_1 n + (c_2 + c_4 + c_8)(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$$

$$\sum_{j=2}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \qquad \sum_{j=2}^{n} (j-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$T(n) = c_1 n + (c_2 + c_4 + c_8)(n-1) + c_5 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) + (c_6 + c_7)\frac{n(n-1)}{2}$$

Also ist $T(n)$ eine quadratische Funktion der Eingabegröße n.

Schlimmster vs. typischer Fall

Meistens geht man bei der Analyse von Algorithmen vom (*worst case*) aus.

- *worst case* Analyse liefert obere Schranken
- In vielen Fällen ist der *worst case* die Regel
- Der aussagekräftigere (gewichtete) Mittelwert der Laufzeit über alle Eingaben einer festen Länge (*average case*) ist oft bis auf eine multiplikative Konstante nicht besser als der *worst case*.
- Belastbare Annahmen über die mittlere Verteilung von Eingaben sind oft nicht verfügbar.

Zusammenfassung: Entwurfsmuster

- In dieser Vorlesungseinheit:
  - Schrittweise Berechnung
  - Ein-Schritt-Berechnung
  - Verkleinerungsprinzip
- Nächste Vorlesung
  - Teile und Herrsche
- „Später“:
  - Vollständige Suchverfahren
    (z.B. Rücksetzen, Verzweigen und Begrenzen (Branch and Bound))
  - Approximative Such- und Berechnungsverfahren
    (z.B. gierige Suche)
  - Schrittweise Annäherung
  - Dynamisches Programmieren (Berechnung von Teilen und deren Kombination, Wiederverwendung von Zwischenergebnissen)