Algorithmen und Datenstrukturen

Partitionierung von Mengen, Disjunkte Mengen

Prof. Dr. Ralf Möller

Universität zu Lübeck

Institut für Informationssysteme

Felix Kuhr (Übungen)

sowie viele Tutoren

Danksagung

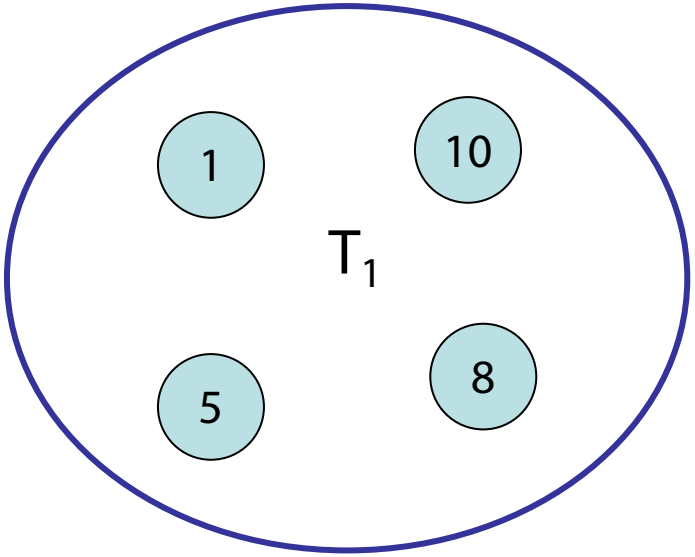
Die nachfolgenden Präsentationen wurden mit ausdrücklicher Erlaubnis des Autors übernommen und danach abgewandelt aus:

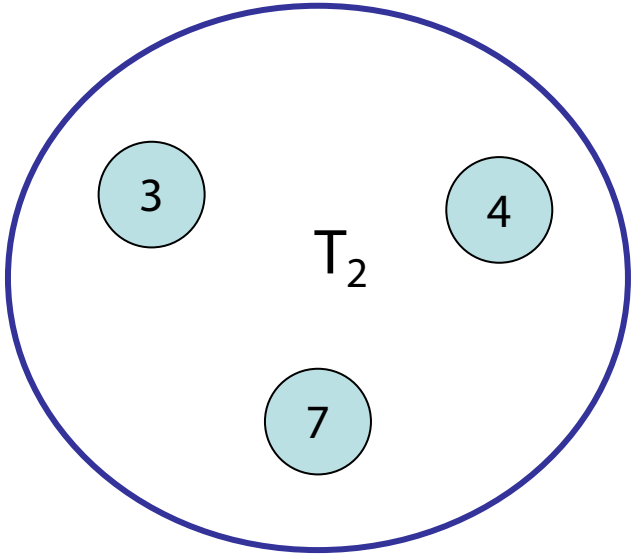
- „Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen“ (Kapitel 6: Verschiedenes) gehalten von Christian Scheideler an der TUM http://www14.in.tum.de/lehre/2008WS/ea/index.html.de

Partitionen einer Menge

- Disjunkte Teilmengen, die zusammen die Ursprungsmenge ergeben
  - $T = \{1, 5, 8, 10, 3, 4, 7\}$
  - Partitionen: T_1 und T_2
  - $T = T_1 \cup T_2, T_1 \cap T_2 = \emptyset$

Identifizierung einer Partition?





Datenstruktur für Disjunkte Mengen

Wozu brauchen wir so eine Datenstruktur?

- Anwendungen im Bereich Data-Mining
  - Clusterbildung und Clusterverschmelzung
- Effiziente Implementierung von Algorithmen für Graphen (kommt demnächst)

Was muss die Datenstruktur möglichst in O(1) können?

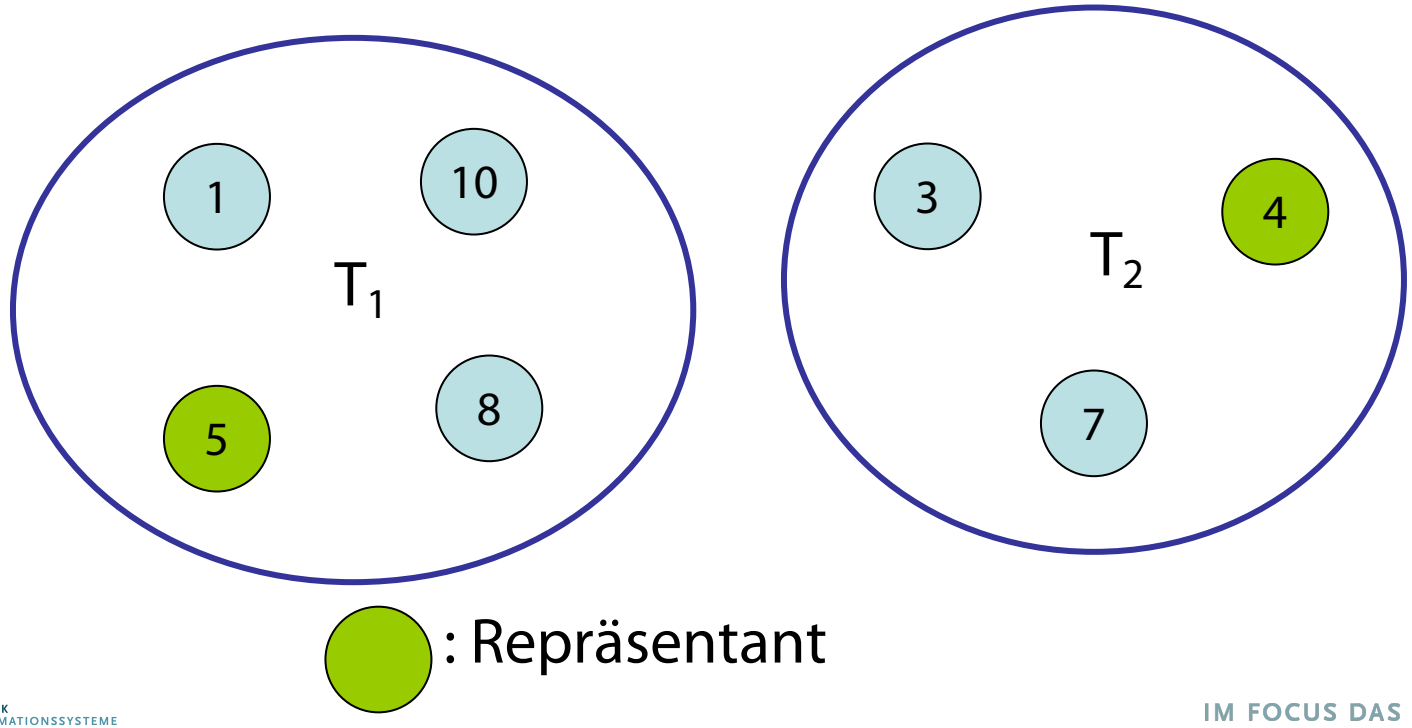
- Testen, ob zwei Elemente zu derselben Menge gehören
- Zwei Mengen vereinigen

Repräsentation von Disjunkten Mengen

- Häufiges Verwendungsmuster:
  - Inititale Bildung von einelementigen Mengen
  - Anschließende Vereinigung von Mengen (Partitionen werden immer größer, deren Anzahl nimmt ab)
- Repräsentation mit ADTs: Menge von Teilmengen?
  - find: Sind zwei Knoten in gleicher Menge?
  - find am Anfang in O(n)
    - n einelementige Mengen
  - find am Ende in O(log n)
    - eine n-elementige Menge
  - union in O(?)
- Bessere Realisierung ist anzustreben!

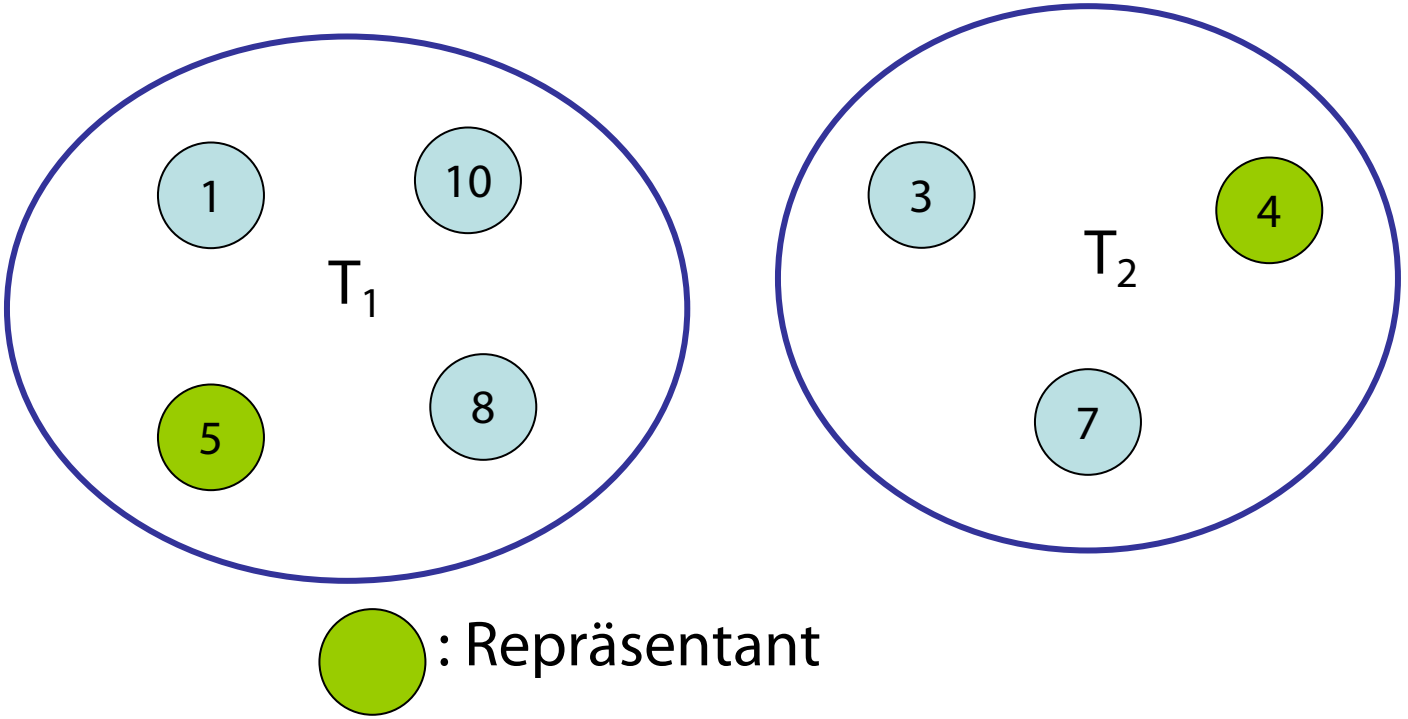
Identifizierung einer Partition

- Element aus Partition als Repräsentant
  - $T = \{1, 5, 8, 10, 3, 4, 7\}$
  - T_1: Repräsentant 5
  - T_2: Repräsentant 4



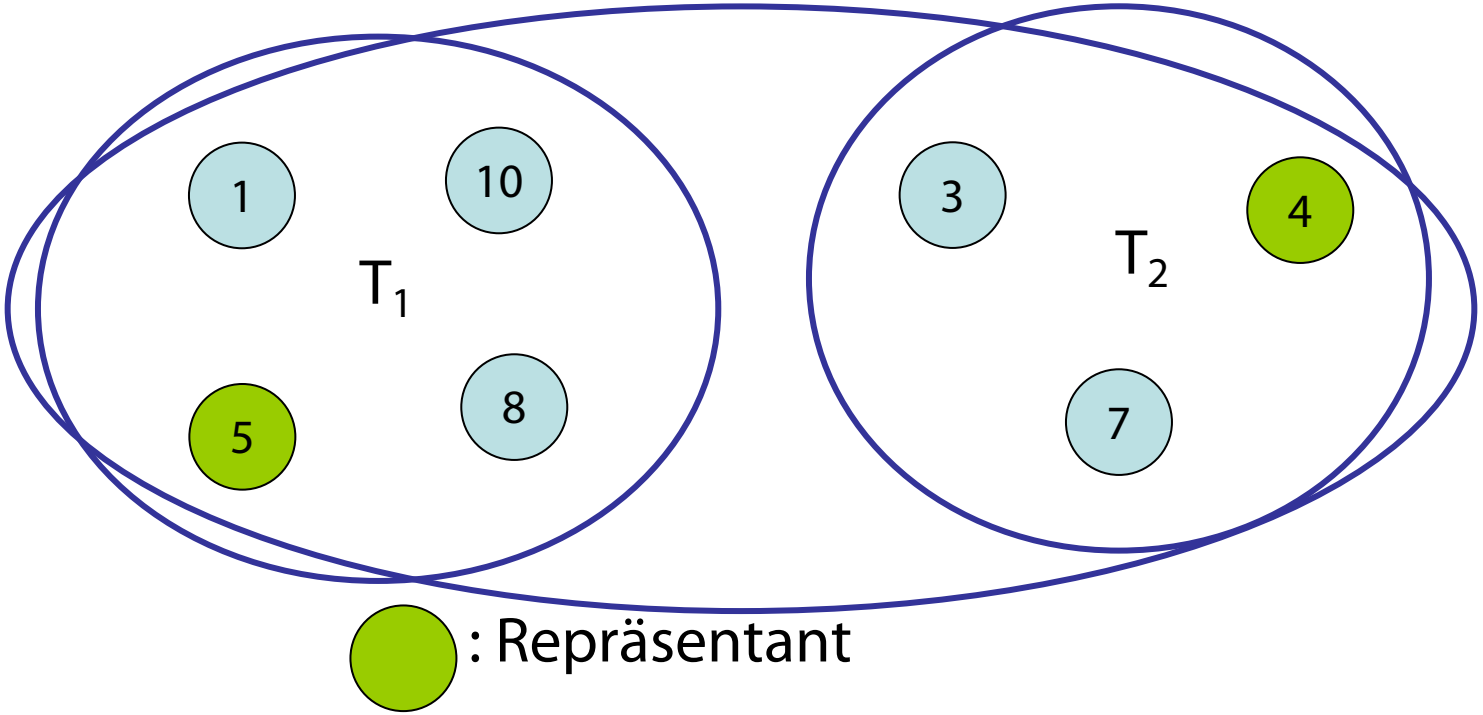
Test: Zugehörigkeit zur selben Partition?

- Gegeben: Partitionierung, Elemente: 1 und 10, 1 und 3
- Test über Gleichheit der Repräsentanten
  - Anforderung: schnell auf den Repräsentanten kommen



Vereinigung zweier Partitionen

- Gegeben: Partitionen mit Repräsentant
  - Partitionen: T_1,T_2
- Elemente vereinigen, einen Repräsentanten behalten
  - Anforderung: schnell zwei Mengen verschmelzen



Union-Find Datenstruktur: Partitionierung

Sei P eine Partitionierung: P := <>:Partitioning

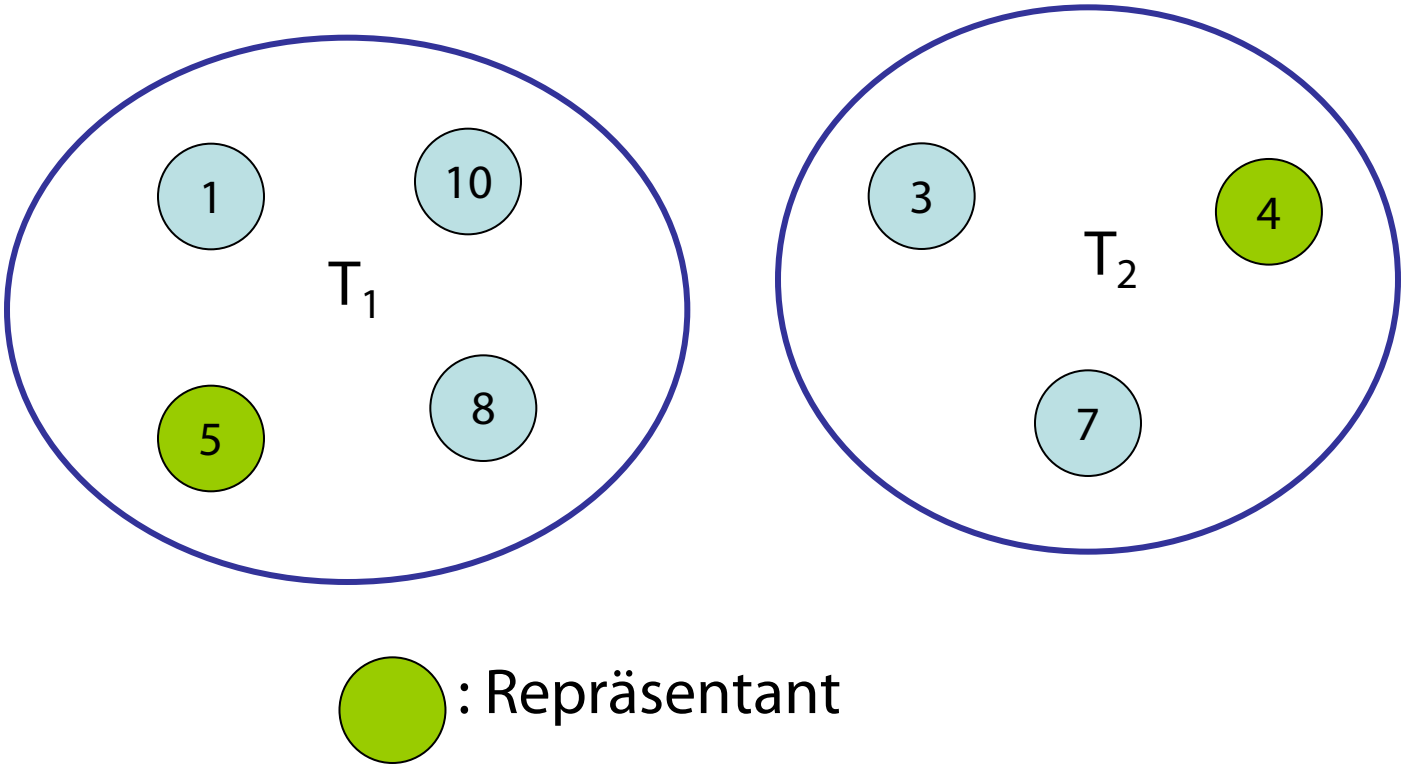
Operationen:

- makeSet(x, P:Partitioning): erzeugt in P für x eine einelementige Menge T mit x als Repräsentant (für ein P mehrfach mit verschiedenen Objekten x aufgerufen)
- union(T_1,T_2, P:Partitioning): vereinigt Elemente in T_1 und T_2 zu T_1 U T_2 in P, die Mengen T_1 und T_2 werden über den Repräsentanten referenziert
- find(x, P:Partitioning): gibt (eindeutigen) Repräsentanten der Teilmenge aus P zurück, zu der x gehört

Union-Find Datenstruktur

Sei $P = T_1 \cup T_2$

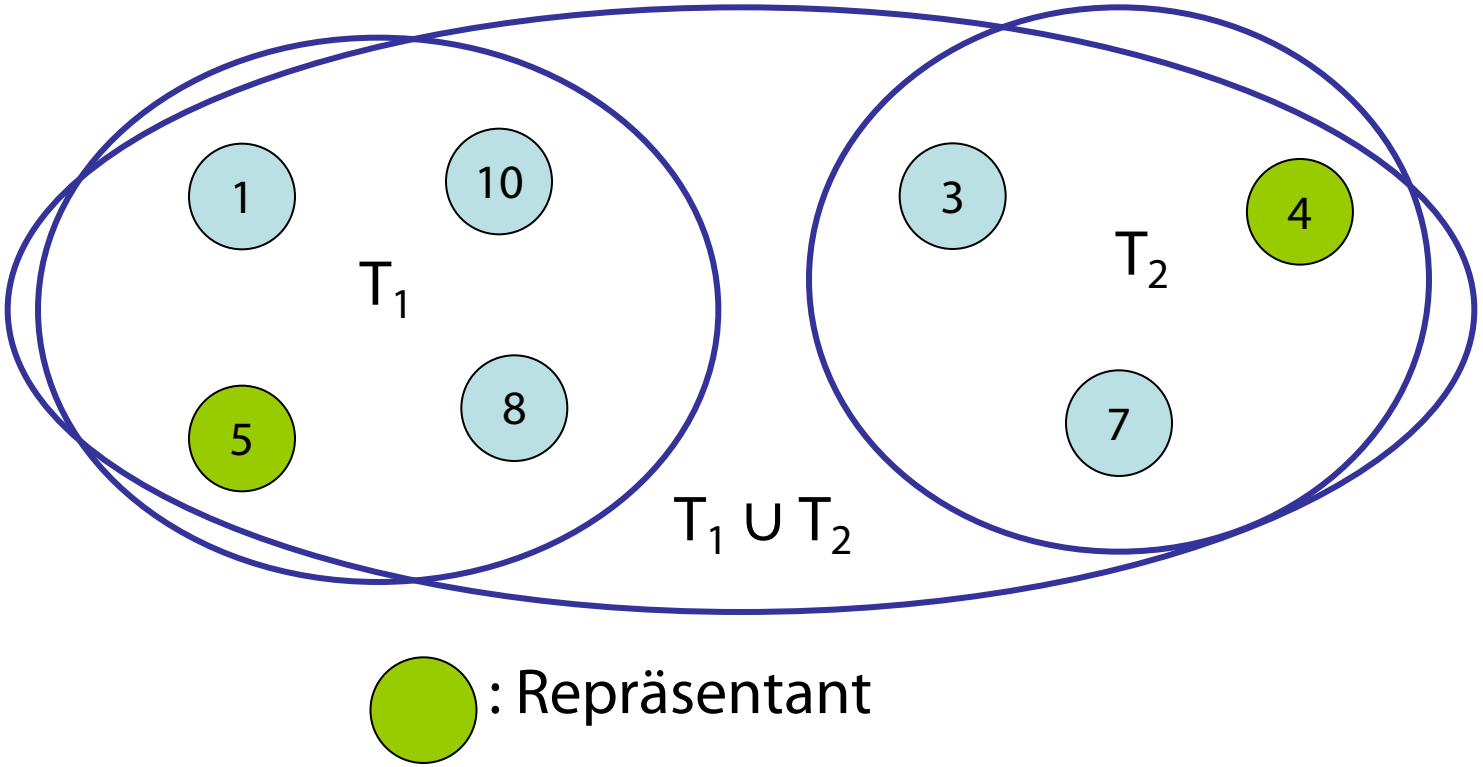
Find(10, P) liefert 5 Find(7, P) liefert 4



Union-Find Datenstruktur

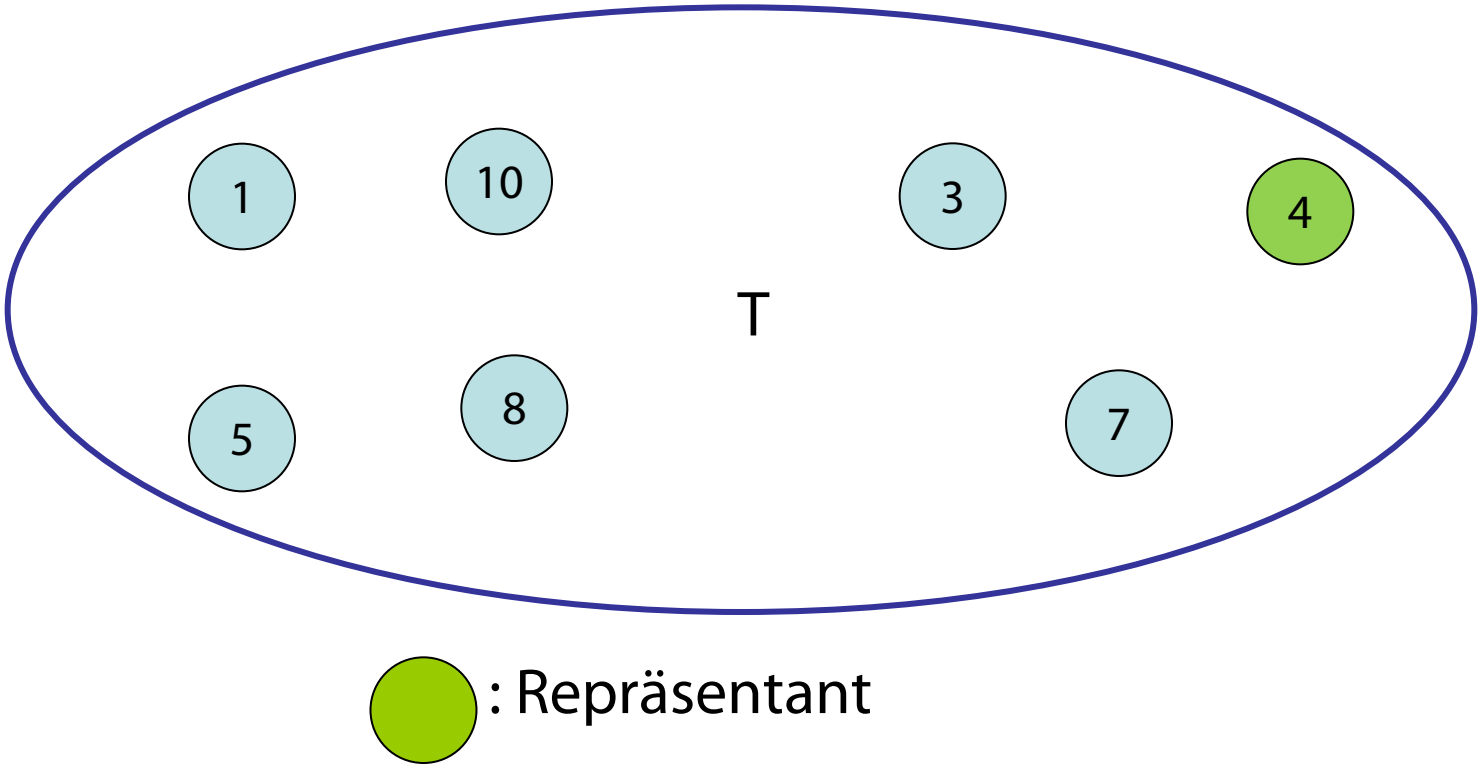
Sei $P = T_1 \cup T_2$

Union(T_1,T_2, P):



Union-Find Datenstruktur

Find(10, P) liefert 4



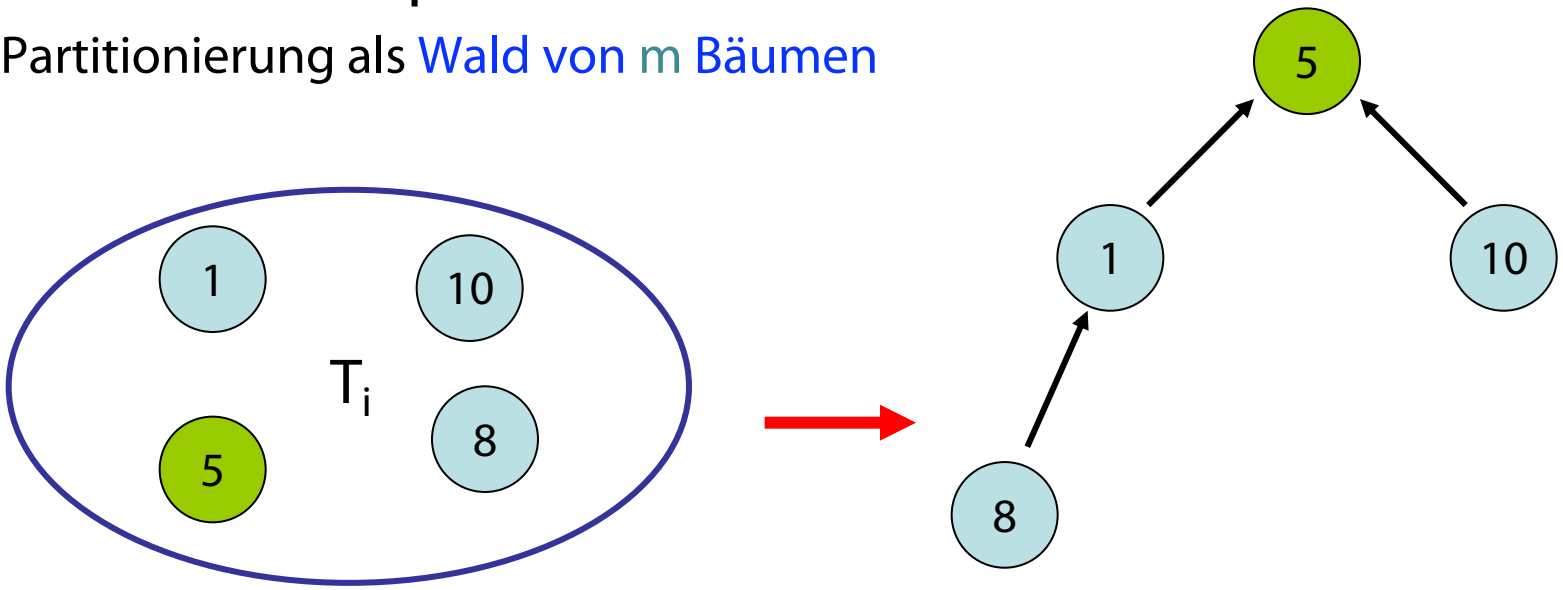
Repräsentation einer Partition?

1. Verkettete Liste mit Repräsentant als Listenende und Endelementzeiger (wie bei Schlangen)
   - Schnell bei union (eine Liste an andere hängen) O(1)
   - Langsam bei find (durchlaufen bis zum Ende) O(n)
2. Zweischichtiger Baum mit Repräsentant als Wurzel, Elemente als Blattknoten unter Wurzel mit Zeigern auf Wurzel
   - Schnell bei find (sofort von Blatt an Wurzel) O(1)
   - Langsam bei union (für eine Partition alle Blattknoten und Wurzel umhängen) O(n)

Union-Find Datenstruktur: Gerichteter Baum

Idee: Repräsentiere jede der m Teilmengen T_i einer Partitionierung P als mehrschichtigen gerichteten Baum mit Wurzel als Repräsentant

- Partitionierung als Wald von m Bäumen

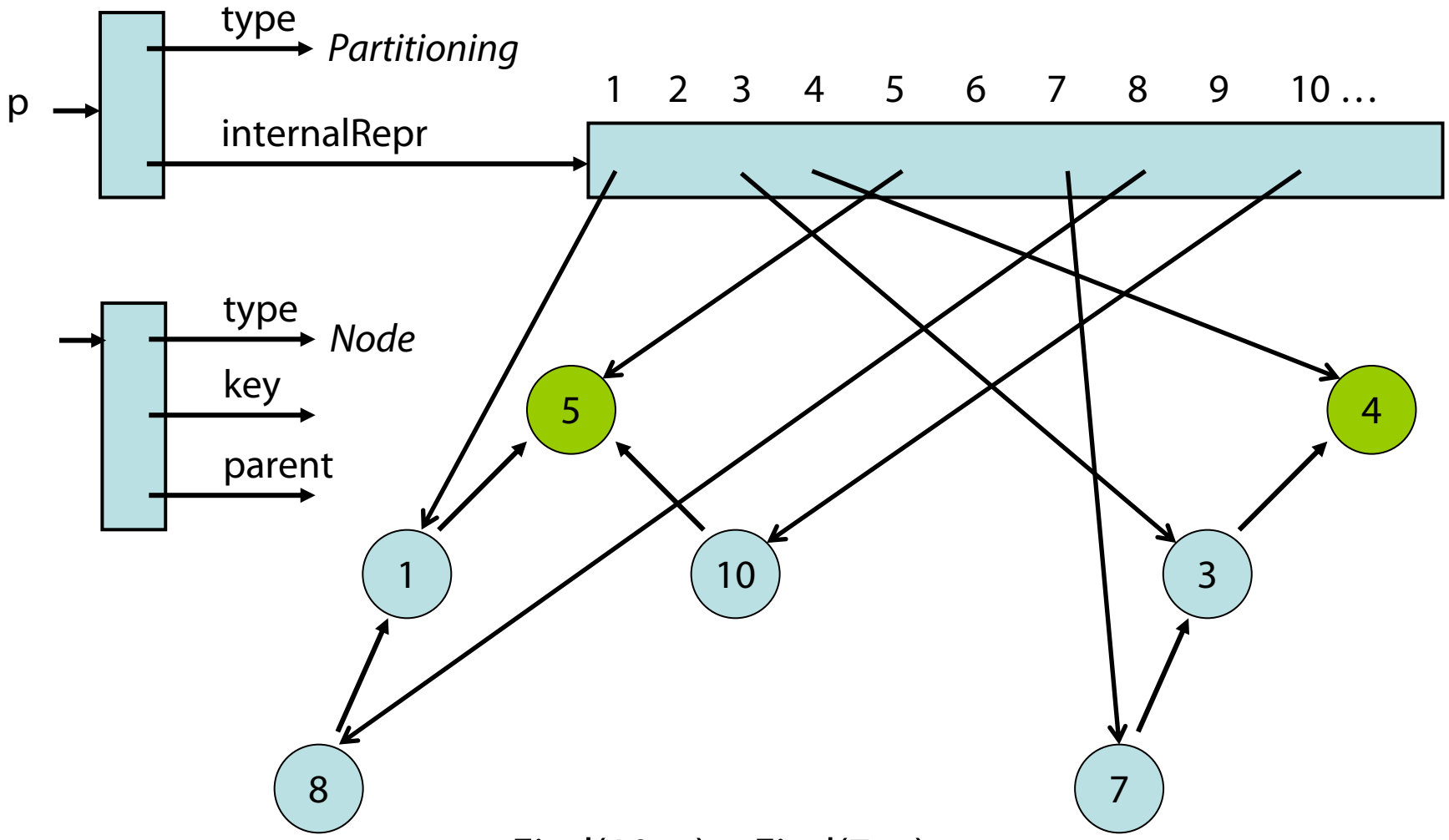


Galler, Bernard A.; Fischer, Michael J., An improved equivalence algorithm, Communications of the ACM 7 (5): 301–303, **1964**

Union-Find-Datenstruktur als Black-Box-ADT

- <>:Partitioning erzeugt eine neue Partitionierungsinstanz
- Black-Box-API
  - makeSet(x:Integer, P:Partitioning)
  - union(T_1 :Integer,T_2 :Integer, P:Partitioning)
  - find(x :Integer, P:Partitioning)
- Abbildung von Schlüsseln auf (interne) Knoten in O(1) notwendig
  - Realisierbar bei ganzen Zahlen als Schlüssel z.B. über Array
  - Werte der Arrayelemente sind Zeiger auf (interne) Knoten
  - Schlüssel werden als Indexe verwendet
  - Assoziation Schlüssel zu Knoten in O(1)
  - Array gespeichert als interne Repräsentation in Partitioning P
- Weitere Techniken zur Assoziation von Schlüsseln zu Knoten in O(1) lernen wir später kennen
  - Schlüssel könnten dann auch komplexe Objekte sein

Internal View



Find(10, p) = Find(7, p)

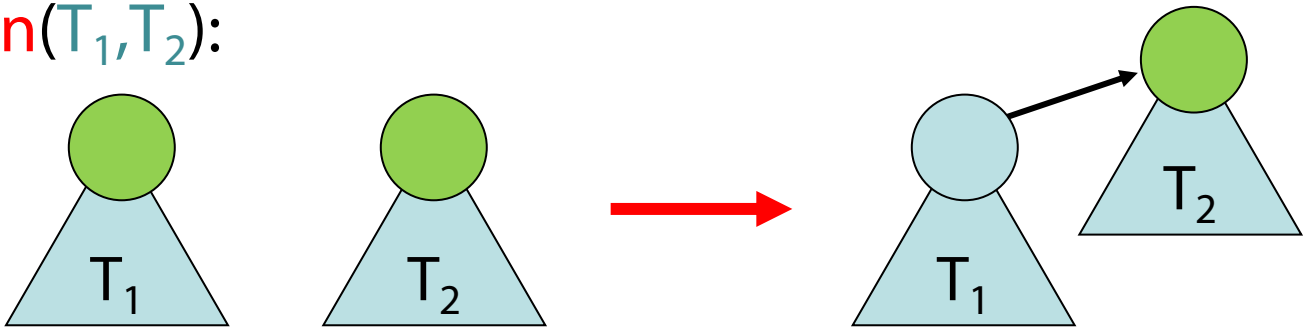
Union-Find-Datenstrukturen als White-Box

- Diskjunkte Mengen werden meist in übergeordneten Algorithmen verwendet
- Dort komplexe Datenobjekte vorhanden („Knoten“), nicht einfach Zahlen, die als Schlüssel dienen
- Wir nehmen direkt diese Knoten und
- … versehen sie mit weiteren Komponenten u.a. zum Zugriff auf den Vorgängerknoten (parent) und verzichten auf die abstrakten Datentypen *Partitioning* und *Node*
- White-Box API
  - makeSet(x) entfällt (parent hat Standardwert nil)
  - union(T_1,T_2) verändert parent von einem der T_i
  - find(x) liefert Knoten aus der Anwendung

Union-Find Datenstruktur

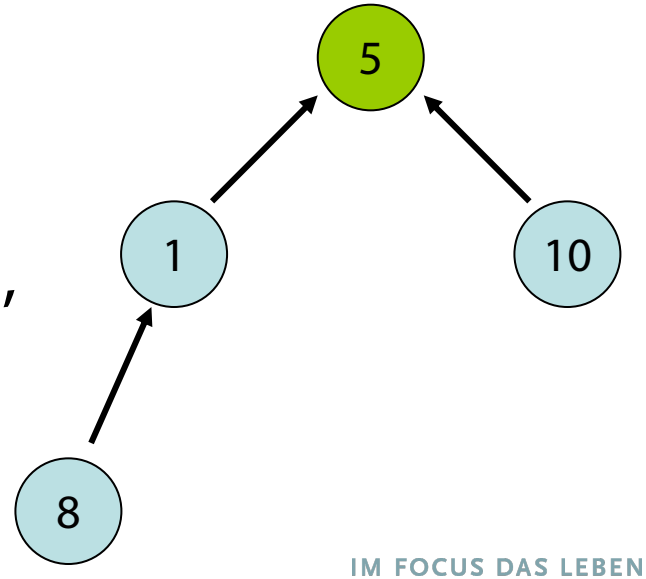
Realisierung der Operationen:

- union(T_1,T_2):



  - T_1 und T_2 werden über den Repräsentanten referenziert

- find(x): Suche Wurzel des Baumes, in dem sich x befindet (Also: suche Repräsentanten)



Union-Find Implementierung

Naïve Implementierung:

- Rechtes Argument von union kommt nach oben
  - union(1,5), union(8,5), union(10,5), …
  - union(1,5), union(5,8), union(8,10), …

Beobachtung

- Tiefe des Baums kann bis zu n sein

Analyse der Komplexität

Naïve Implementierung:

- Zeit für find(x): O(n)
- Zeit für union(T_1, T_2): O(1)
  - Annahme: T_1 und T_2 liegen durch Repräsentanten vor

- Was können wir verbessern?
  - Tiefe des Baums reduzieren beim Erzeugen mit union

Union-Find Implementierung

Gewichtete Union-Operation: Mache die Wurzel des flacheren Baums zum Kind der Wurzel des tieferen Baums

Wir brauchen als Knotenkomponente zusätzlich zu parent noch die Tiefe, rank genannt

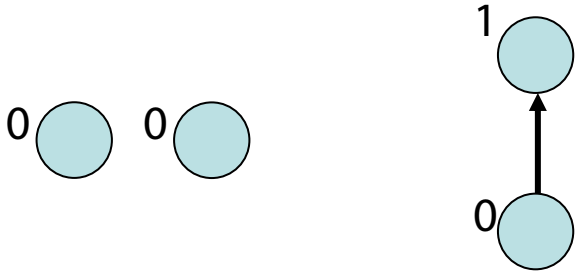
Ordne jedem Element x zu:

rank(x) = Tiefe des Unterbaums von Knoten x
(eigentlich inverser Baum: Kinder von x zeigen auf x)

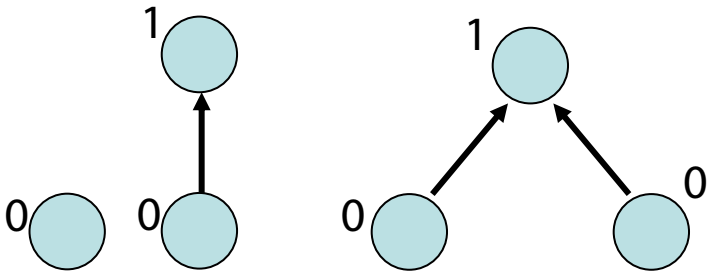
- Initialer Wert: rank(x) := 0
- union(T_1,T_2): Erhöht rank(x) um 1 für Wurzel x der Vereinigung, wenn für die Repräsentanten T_1, T_2 gilt: rank(T_1) = rank(T_2)

Union-Find Implementierung : rank(x)

- Veränderung von rank(x) bei union(T_1,T_2)
  - Gleiche Ränge



  - Unterschiedliche Ränge



Worst Case für rank(x) bei n Elementen?

Union-Find Implementierung

Beh.: Tiefe des Baums mit n Elementen ist in $O(\log n)$

Begründung:

- Die Tiefe von $T=T_1 \cup T_2$ erhöht sich nur dann, wenn $Tiefe(T_1)=Tiefe(T_2)$ ist
- Sei $N(t)$ die min. Anzahl Elemente in Baum der Tiefe t
- Es gilt $N(t) = 2 \cdot N(t-1) = 2^t$ mit $N(0)=1$
  - Beweis über Substitutionsmethode (oder Induktion)
- Für $t = \log n$ sind alle Knoten unterbracht, denn $N(\log n) = 2^{\log n} = n$
- Tiefe t in $O(\log n)$

Union-Find Implementierung

Beobachtungen (*):

- Bei n Elementen ist die max. Tiefe eines Baums $\log n$
- In einem Baum der Tiefe t sind min. 2^t Elemente
- Bei n Elementen im gesamten Wald gibt es max. $n/2^t$ Knoten der Tiefe t

Gewichtetes Union: Analyse der Komplexität

Mit gewichteter Union-Operation:

- Zeit für find: O(log n)
- Zeit für union: O(1)

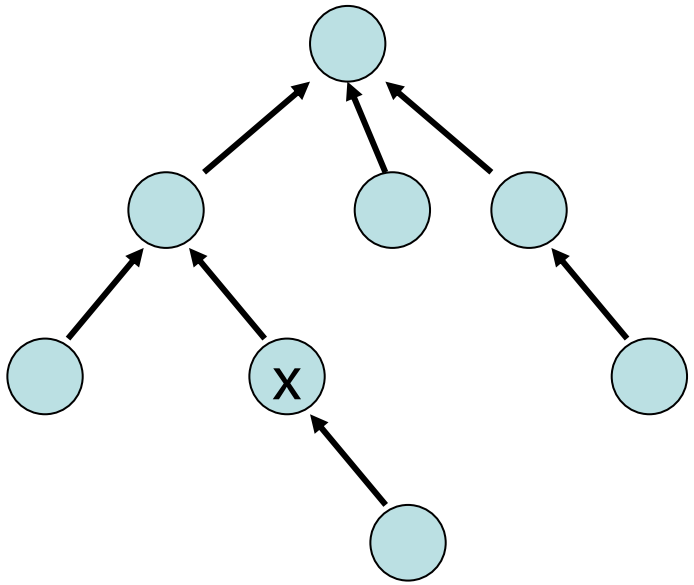
Geht das noch besser für find?

- Best Case für Find-Operation: Eingabe ist Repräsentant bzw. führt immer sofort zum Repräsentanten: O(1)
- Bei find(x) durchlaufen wir sowieso den Pfad vom Element x zum Repräsentanten
  - Idee: Elemente auf Pfad direkt auf Wurzel (Repräsentant) umleiten (Pfadkompression) (jeweils konstanter Aufwand)

Union-Find: Verbesserung

Besser: gewichtetes Union mit Pfadkompression

- Pfadkompression bei find: alle Knoten auf dem Pfad von x zur Wurzel zeigen hinterher direkt auf Wurzel



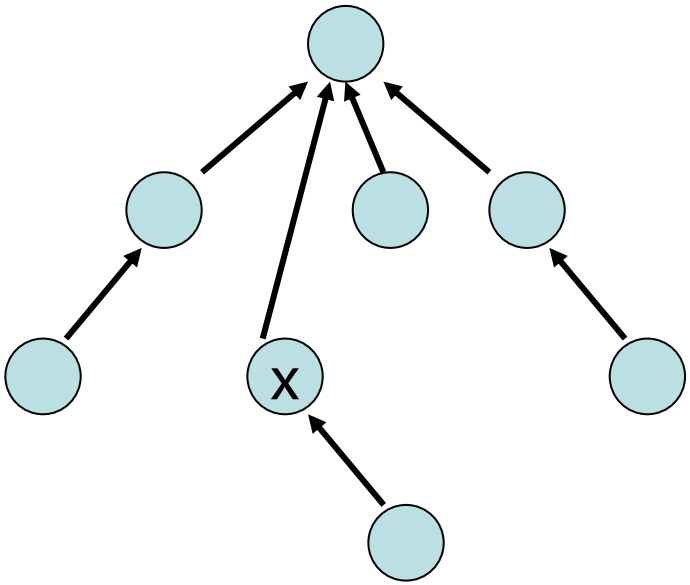
Hopcroft, J.E. and Ullman, J.D.; Set Merging Algorithms, SIAM Journal of Computing 2(4), S. 294-303, **1973**.

[1] Robert E. Tarjan, Jan van Leeuwen. Worst-case analysis of set union algorithms, Journal of the ACM 31 (2), S. 245–281, **1984**

Union-Find: Verbesserung

Besser: gewichtetes Union mit Pfadkompression

- Pfadkompression bei find: alle Knoten auf dem Pfad von x zur Wurzel zeigen hinterher direkt auf Wurzel



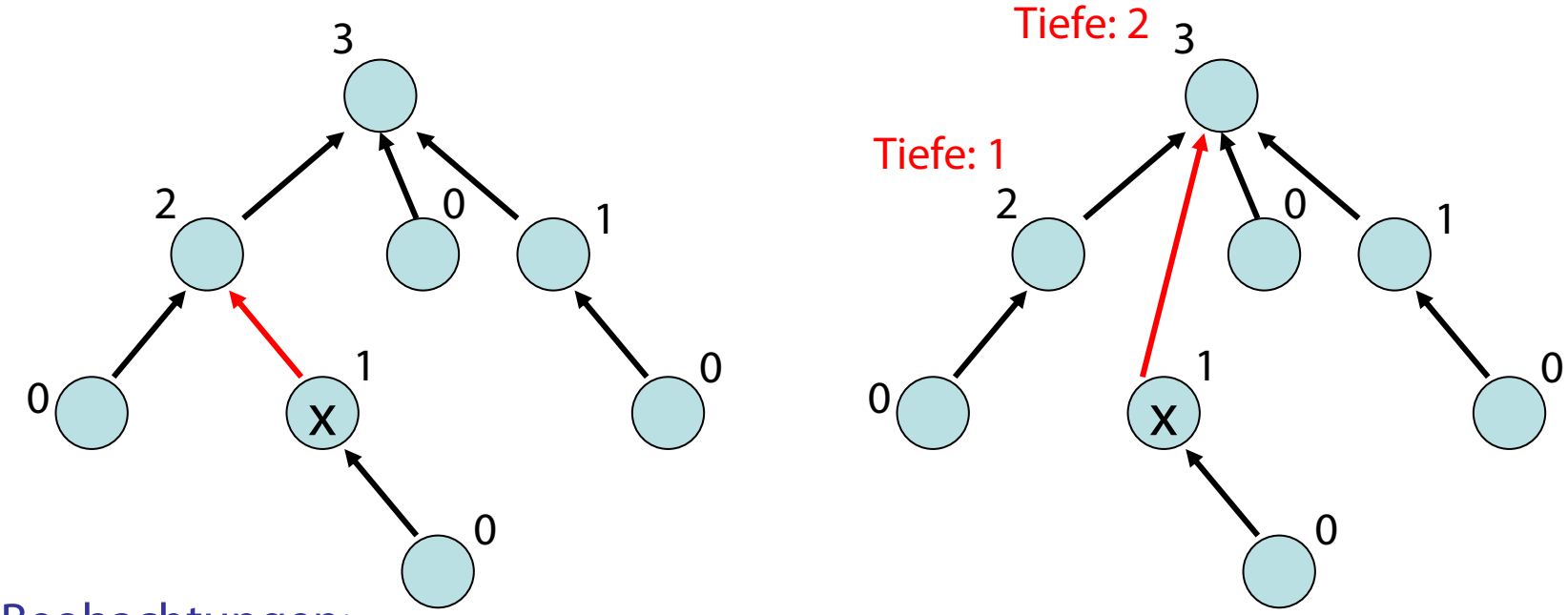
Jeder Knoten auf dem Pfad wird umgeleitet

Hopcroft, J.E. and Ullman, J.D.; Set Merging Algorithms, SIAM Journal of Computing 2(4), S. 294-303, **1973**.

[1] Robert E. Tarjan, Jan van Leeuwen. Worst-case analysis of set union algorithms, Journal of the ACM 31 (2), S. 245–281, **1984**

Union-Find Implementierung : rank(x)

- Auswirkung von Pfadkompression bei find



Beobachtungen:

- Auf dem Weg zur Wurzel: rank(x_i) aufsteigend
- Neuer Elternknoten hat höheren Rang
- Ränge müssen beim Umhängen angepasst werden

Amortisierte Analyse

Theorem: Bei gewichtetem union und Pfadkompression ist die amortisierte Zeitfunktion für find in O(log* n).

Was ist log* n?

Iterierter Logarithmus log* n

Bemerkung: log* n ist definiert als

$\log^* n = 0$ für $n \leq 1$

$\log^* n = \min\{ i > 0 \mid \underbrace{\log \log \ldots \log}_{i\text{-mal}} n \leq 1\}$ sonst

Beipiele:

- $\log^* 2 = 1$
- $\log^* 4 = 2$
- $\log^* 16 = 3$
- $\log^* 2^{65536} = 5$

log* n wächst sehr langsam

Union-Find Datenstruktur: Amortisierte Analyse

Theorem: Bei gewichtetem union und Pfadkompression ist die amortisierte Zeitfunktion für find in O(log* n)

Beweis:

- T': endgültiger Baum, der durch eine Folge von Unions ohne Finds entsteht

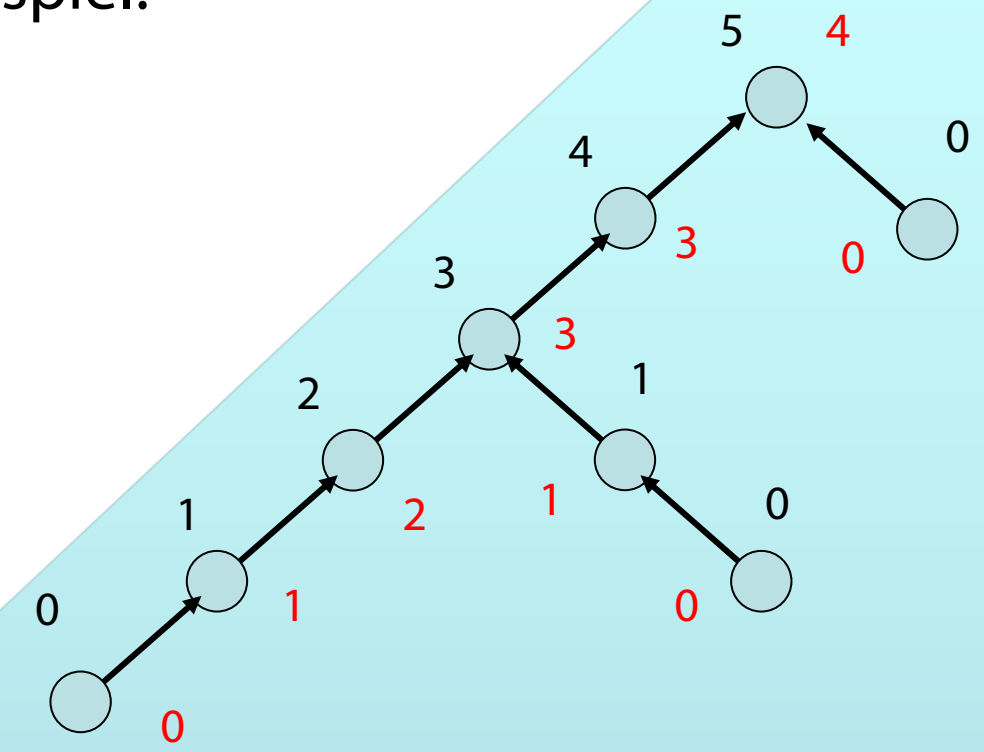
Ordne jedem Element x zwei Werte zu:

- rank(x) = Höhe des Unterbaums mit Wurzel x
- class(x) = i für das i mit $a_{i-1} < rank(x) \leq a_i$ wobei $a_{-1}=-1$, $a_0=0$ und $a_i = 2^{a_{i-1}}$ für alle $i>0$
- i=class -1 0 1 2 3 4 5
- a_i -1 , 0 , 1 , 2 , 4 , 16 , 65536
- rank 0 1 2 3,4 5,6,7,…16 …

Anzahl Klassenwechsel bis a_i: log* a_i

Union-Find Datenstruktur

Beispiel:



x: rank

x: class

i=class	-1	0	1	2	3		4		5
a_i	-1 ,	0 ,	1 ,	2 ,	4 ,		16 ,		65536
rank		0	1	2	3,4	5,6,7,…16		…	

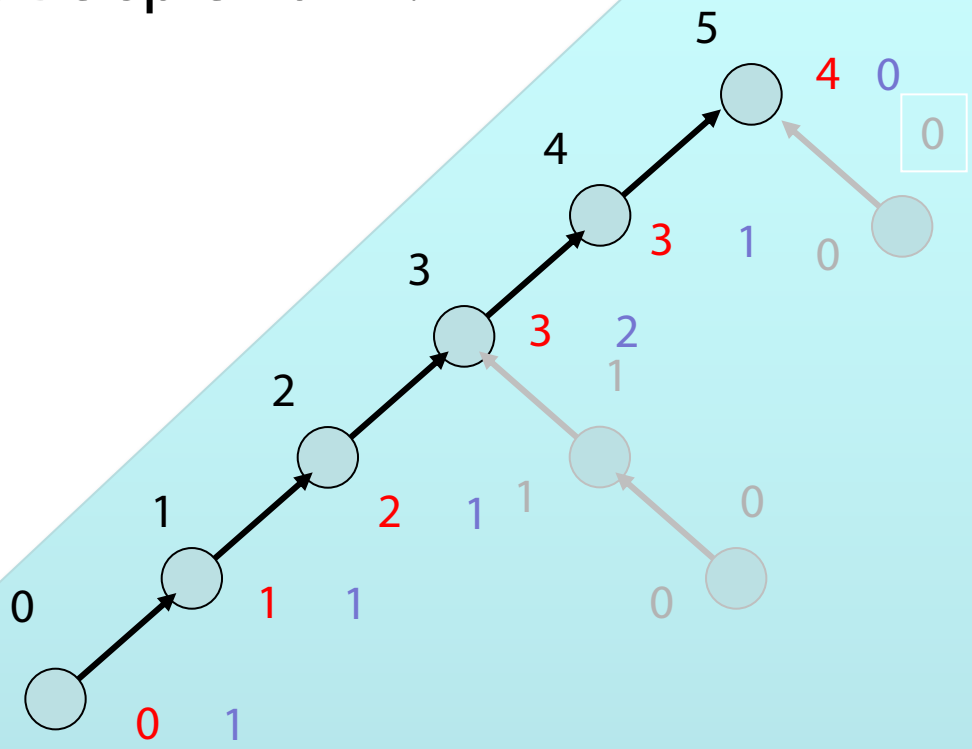
Amortisierte Analyse: Potentialmethode

Vorbereitung der Potentialdefinition:

- Sei dist(x) die minimale Distanz von x
  zu einem Vorfahr y im tatsächlichen Union-Find-Baum T (mit Pfadkompression),
  so dass class(y)>class(x) ist oder y die Wurzel ist
- dist für Wurzeln = 0

Union-Find Datenstruktur

Dist-Beispiel für T':



x: rank

x: class

x: dist

Amortisierte Analyse: Potentiale

Beweis (Fortsetzung):

- Bei union soll Potential zunehmen
  - Für find wird mehr Arbeit produziert
  - Rang der neuen Wurzel kann steigen
  - Werte dist von Knoten unter der Wurzel steigen evtl. auch (wenn kein Klassenwechsel),
- Bei find für Knoten x soll Potential abgebaut werden
  - Nachfolgende Aufrufe von find für den gleichen Knoten in O(1)
  - Nach Umhängen von Knoten x an die Wurzel: dist(x) = 1
  - Wir wollen die Arbeit von find auf die Aufrufe von union umverteilen, so dass sich die aymptotische Komplexität von union nicht ändert (auf jeden Union-Aufruf kommt konstanter Anteil)
  - Umverteilung, wenn dist-Gewinn > 0

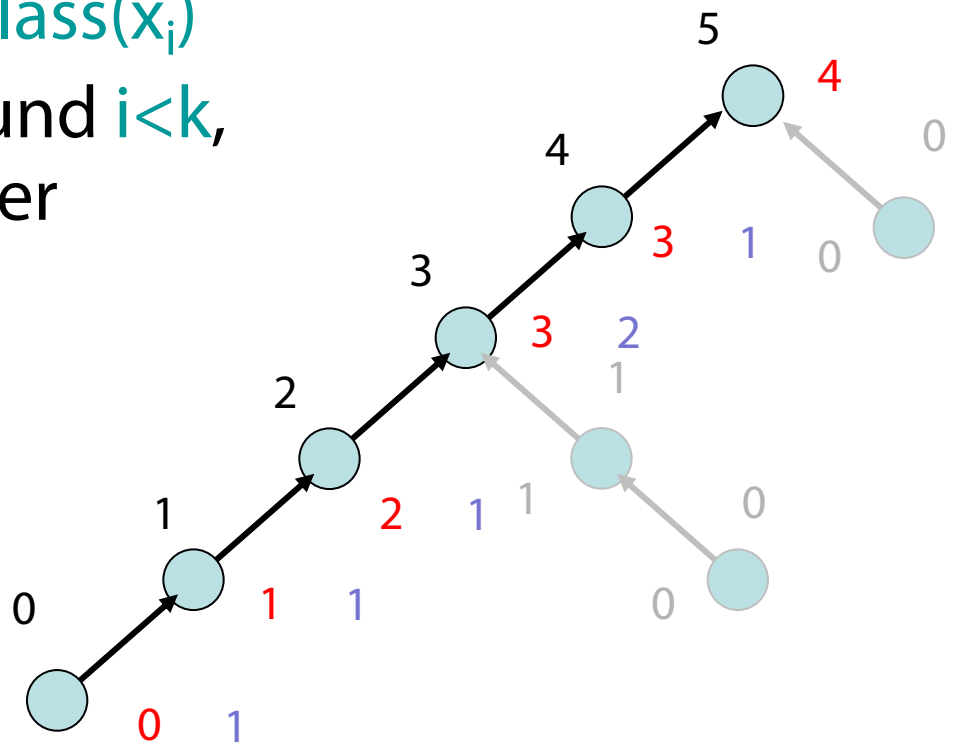
Definition der Potentialfunktion: Sei T ein Union-Find-Baum

$\Phi(T) := c \sum_{x \in T} dist(x)$ für eine geeignete Konstante $c>0$

Union-Find: Amortisierte Analyse

Amortisierte Kosten von find:

- $x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow x_2 \ldots x_k$: Pfad von x_0 zur Wurzel in T'
- Es gibt auf dem Pfad höchstens log* n Kanten (x_{i-1},x_i) mit $class(x_{i-1})<class(x_i)$
- Ist $class(x_{i-1})=class(x_i)$ und $i<k$, dann ist $dist(x_{i-1})$ vor der Find-Operation ≥ 2 und nachher $=1$



Union-Find: Amortisierte Analyse

Amortisierte Kosten von find:

- Damit können die Kosten für die Umlenkung aller Kanten (x_{i-1},x_i) mit $class(x_{i-1})=class(x_i)$ aus der Potentialverringerung "bezahlt" werden, denn die dist-Werte von x_{i-1} werden kleiner, wenn $class(x_{i-1})=class(x_i)$, also $\Phi(s') - \Phi(s) < 0$
- Nur beim Klassenübergang gewinnt man nichts
  - $O(\log^* n)$ viele Klassenübergänge
- Amortisierte Kosten von find also $O(\log^* n)$

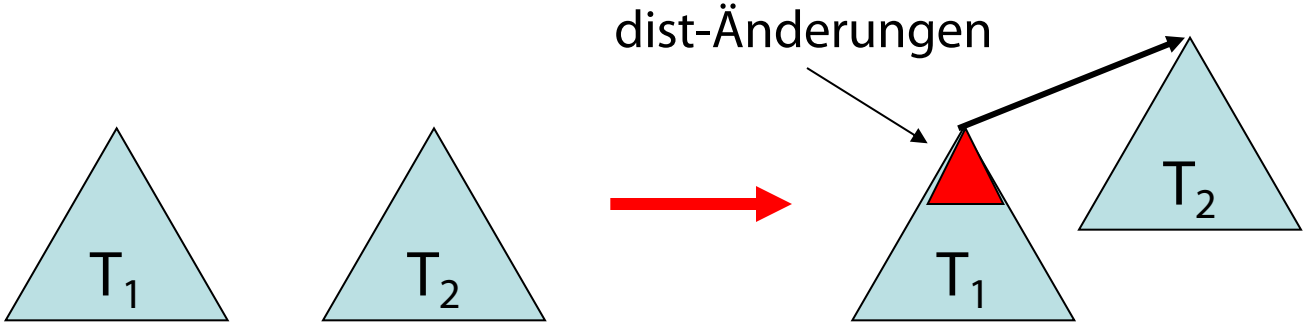
Überlegung

- Die Anzahl der Umhängevorgänge geht auf find und hängt von n ab.
- Wir würden eigentlich gern die Arbeit für jeden Umhängevorgang auf union umverteilen
  (“ aus Potentialverringerung bei find bezahlen”)
- Warum können wir nicht alle Schritte von find ausgehend von x auf die Union-Aufrufe umverteilen?
- Das wäre ja für n Elemente bei konstantem Umlenkungsaufwand maximal n Schritte
- Dann wäre find doch amortisiert in O(1), oder?
- Haben wir eine Obergrenze für das Potential?

Union-Find: Amortisierte Analyse

Maximales Potential, das durch alle Union-Operationen produziert wird:

- dist-Änderungen über alle Unions bzgl. T′ ist gleich $\Phi(T')$ (Reihenfolge der Unions egal)



- Potential von Baum T′ mit n Knoten:

$$\Phi(T') \leq c \sum_{i=0}^{\log^* n} \sum_{x:\text{rank}(x)=[a_{i-1}+1,\, a_i]} \text{dist}(x)$$

class(T_1) = class(T_2)

Union-Find: Amortisierte Analyse

$$\Phi(T') \leq c \sum_{i=0}^{\log^* n} \sum_{x:\mathrm{rank}(x)\in[a_{i-1}+1,\, a_i]} \mathrm{dist}(x)$$

Alle Unterbäume, deren Wurzel x den Rang rank(x)=j haben, sind disjunkt und enthalten jeweils mind. 2^j Knoten: Es gibt $n/2^j$ Bäume der Tiefe j (siehe Beobachtung (*))

$$\Phi(T') \leq c \sum_{i=0}^{\log^* n} (n/2^j)a_i \quad \text{mit } j=a_{i-1}+1,\ a_i \geq \mathrm{dist}(x)$$

$$\leq c' \cdot n \sum_{i=0}^{\log^* n} a_i / 2^{a_{i-1}}$$

$$\leq c' \cdot n \sum_{i=0}^{\log^* n} 1$$

$$\in O(n \log^* n)$$

i=class	-1	0	1	2	3		4		5
a_i	-1 ,	0 ,	1 ,	2 ,	4 ,		16 ,		65536
rank		0	1	2	3,4	5,6,7,…16		…	

Nach n Umlenkungen bei find: $\Phi(T) \in O(n \log^* n) / n \cdot O(1) = O(\log^* n)$

NB: log* n ist nicht asymptotisch eng (ist nur eine “lose” Abschätzung)

Zusammenfassung: Disjunkte Mengen

- find ∈ O(log* n) amort., union ∈ O(1)
  - Die find-Abschätzung kann tatsächlich noch deutlich verbessert werden[1]: O(α(n)) amort.,
    wobei α die Umkehrfunktion der Ackermannfunktion ist, also SEHR SEHR langsam wächst
- Können wir find auf O(1) bringen?
  - Nur wenn union nicht mehr in O(1)
  - Man kann nicht gleichzeitig
    find und union in O(1) bringen[2]

[1] Robert E. Tarjan, Jan van Leeuwen. Worst-case analysis of set union algorithms, Journal of the ACM 31 (2), S. 245–281, **1984**

[2] M. Fredman, M. Saks. The cell probe complexity of dynamic data structures, In: Proceedings of the Twenty-First Annual ACM Symposium on Theory of Computing., S. 345–354, **1989**