
Algorithmen und Datenstrukturen

Prof. Dr. Ralf Möller

Universität zu Lübeck

Institut für Informationssysteme

Felix Kuhr (Übungen)

sowie viele Tutoren



Hm... NP-schwere Probleme sind trickreich

- Was machen wir, wenn Heuristiken und Pruning nicht greifen und unserer Algorithmus sich im Backtracking verirrt?
- Approximation der Lösung?
 - Vielleicht in nebenläufiger Berechnung?
 - Wenn die Bestimmung der optimalen Lösung zu lange dauert, nimm approximative Lösung, sofern sie bereitsteht
- Wir haben allerdings gesehen, dass Approximation manchmal beliebig schlecht sein kann (unbegrenztes Rucksackproblem)
- Können wir bei Approximation Garantien für die Güte geben?

Approximationsalgorithmen

Frage: Ich will ein NP-schweres Problem lösen. Was muss ich tun?

Antwort: Polynomialzeitalgorithmus dafür wohl nicht möglich.

Annahme:

Entwurfsmuster zur Aufwandsreduktion (siehe SAT) aufwendig bzw. Reduktion auf SAT (o.ä.) nicht offensichtlich,

Eine der drei Eigenschaften muss aufgegeben werden:

- Löse das Problem **optimal**.
- Löse das Problem in **polynomieller** Zeit
- Löse **beliebige** Instanzen des Problems

ρ -Approximationsalgorithmus:

- Läuft in polynomieller Zeit.
- Löst beliebige Instanzen des Problems.
- Findet eine Lösung, die höchstens Faktor ρ weg von Optimum ist.

Herausforderung: Lösung sollte möglichst nah an Optimum sein.

Anwendungsproblem: Lastbalancierung

Eingabe: m identische Maschinen, n Jobs. Job i hat Laufzeit t_i .

Einschränkungen:

- Ein einmal ausgeführter Job muss bis zum Ende auf derselben Maschine ausgeführt werden.
- Jede Maschine kann höchstens einen Job gleichzeitig bearbeiten.

Definition: Sei $J(i)$ die Teilmenge der Jobs, die Maschine i zugewiesen werden. Dann ist $L_i = \sum_{j \in J(i)} t_j$ die Last der Maschine i .

Definition: Der Makespan L ist die maximale Last aller Maschinen, d.h. $L = \max_i L_i$

Lastbalancierung: finde Zuweisung, die Makespan minimiert

Lastbalancierung: List Scheduling

List-Scheduling Algorithmus:

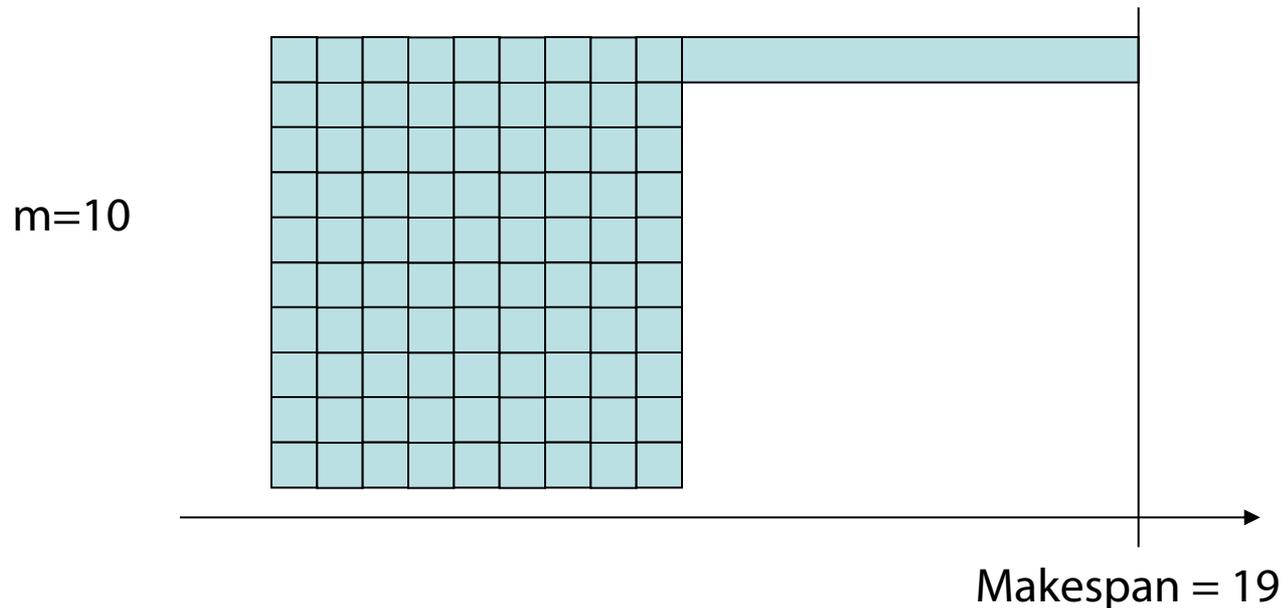
- Betrachte n Jobs in einer festen Reihenfolge und m Maschinen
- Weise Job j der Maschine mit z.Zt. geringster Last zu

```
function List-Scheduling( $m, n, (t_1, \dots, t_n)$ )  
  for  $i:=1$  to  $m$  do  
     $L_i := 0; J(i):=\{\}$   
  for  $j:=1$  to  $n$  do  
     $i:=\operatorname{argmin}_{k \in [1..m]} L_k$   
     $J(i):=J(i) \cup \{j\}$   
     $L_i:=L_i + t_j$   
  return  $(J(1), \dots, J(m))$ 
```

Da $n \gg m$ Laufzeit: $O(n \log m)$ unter Verwendung einer Priority Queue zum Lösen des argmin -Problems

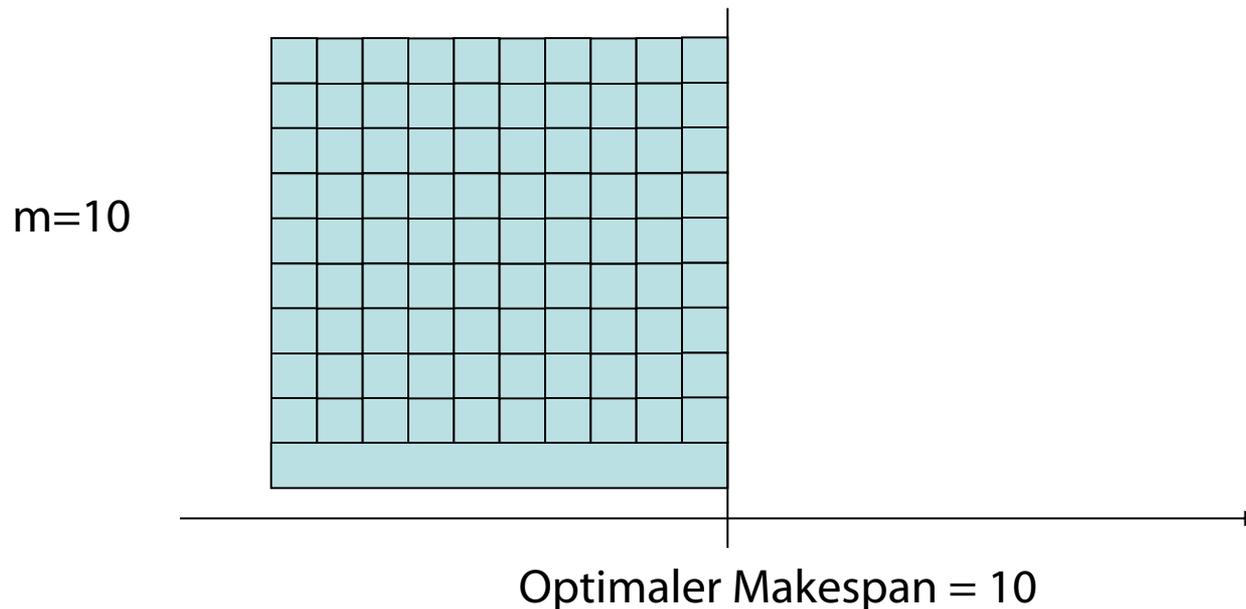
Lastbalancierung: List Scheduling

Beispiel: m Maschinen, $m(m-1)$ Jobs der Länge 1, ein Job der Länge m



Lastbalancierung: List Scheduling

Beispiel: m Maschinen, $m(m-1)$ Jobs der Länge 1, ein Job der Länge m



Lastbalancierung: List Scheduling

Theorem (Graham): Der Greedy Algorithmus ist 2-approximativ.

Ohne Beweis

Zusammenfassung

- P und NP
- Gierige Algorithmen zur Approximation
 - Güte der Approximation sollte abschätzbar sein
- Anwendungsbeispiel: Lastbalancierungsproblem

Danksagung

Viele Präsentationen wurden mit ausdrücklicher Erlaubnis des Autors mit Änderungen übernommen aus: „Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen“ von Prof. Dr. Christian Scheideler
<http://www14.in.tum.de/lehre/2008WS/ea/index.html.de>