Algorithmen und Datenstrukturen

Prof. Dr. Ralf Möller

Universität zu Lübeck

Institut für Informationssysteme

Magnus Bender und Malte Luttermann
(Übungen)

sowie viele Tutoren

Allgemeine Lernziele Vorlesung

Einem Vortragenden zuhören zu lernen,

… der über ein nicht ganz triviales Thema referiert

Dem Vortragenden beim Vortrag gedanklich folgen

Vorbereitung für das Erarbeiten der Inhalte

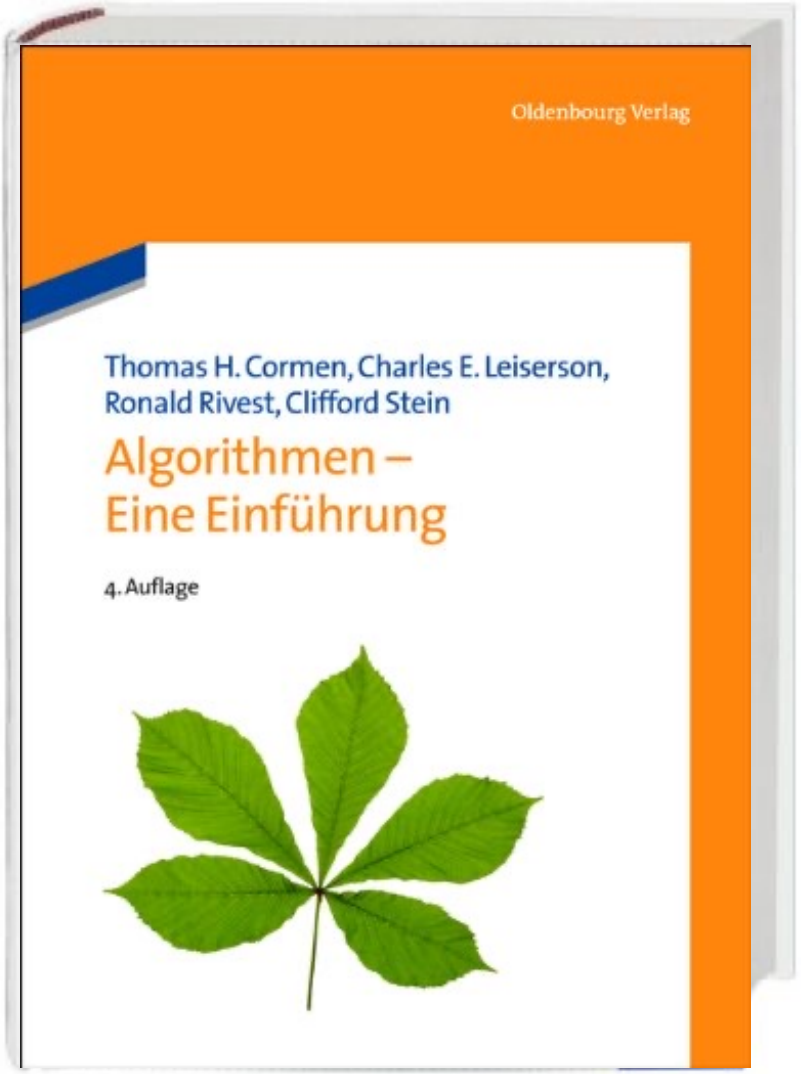
Erarbeitung durch

- Nacharbeitung der Präsentationen
- Lösen von Übungsaufgaben
- Diskussion in Übungsgruppe

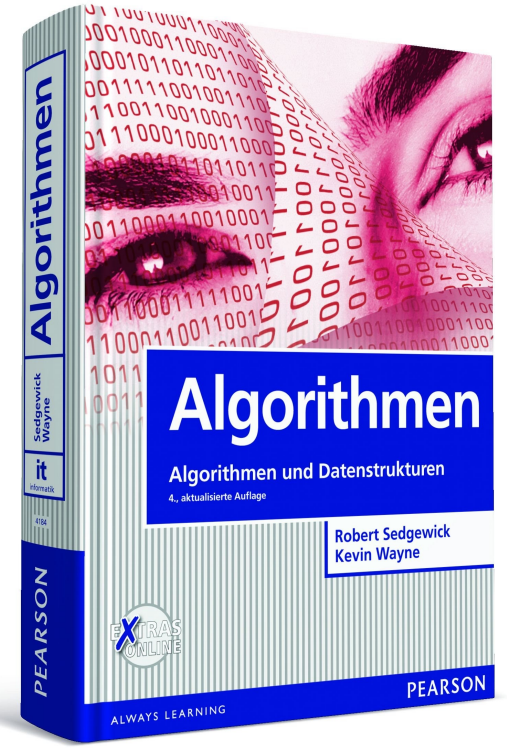
Organisatorisches: Übungen

- **Start**: Siehe Moodle
- **Übungen**: Verschiedene Gruppen, Anmeldung über Moodle
- **Übungsaufgaben** stehen jeweils kurz nach der Vorlesung am Freitag über Moodle bereit
- Aufgaben sollen in einer **2-er Gruppe** bearbeitet werden
- **Abgabe der Lösungen** erfolgt bis Donnerstag in der jeweils folgenden Woche nach Ausgabe bis 18 Uhr über Moodle
- Bei Programmieraufgaben: C++, Java oder Julia
- Bitte unbedingt Namen und Übungsgruppennummern auf Abgaben vermerken

Das „Skript“


Oldenbourg Verlag
Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson,
Ronald Rivest, Clifford Stein
Algorithmen –
Eine Einführung
4. Auflage

Zusätzlich empfohlene Literatur



Teilnehmerkreis und Voraussetzungen

Studiengänge

- Bachelor **Informatik**
- Bachelor **IT-Sicherheit**
- Bachelor **Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften**
- Bachelor **Medieninformatik**
- Bachelor **Medizinische Informatik**
- Bachelor **Medizinische Ingenieurwissenschaft**
- Bachelor **Robotik und Autonome Systeme**

Vorausgesetzte Kenntnisse

- Einführung in die Programmierung

Spezielle Lernziele in diesem Kurs

- Weg **vom Problem zum Algorithmus** gehen können
  - **Auswahl** eines Algorithmus aus Alternativen unter Bezugnahme auf vorliegende Daten und deren Struktur
  - **Entwicklung** eines Algorithmus mitsamt geeigneter Datenstrukturen (Terminierung, Korrektheit, ...)
- **Analyse von Algorithmen** durchführen
  - Anwachsen der Laufzeit bei Vergrößerung der Eingabe
- Erste Schritte in Bezug auf die **Analyse von Problemen** gehen können
  - Ja, Probleme sind etwas anderes als Algorithmen!
  - Probleme können in gewisser Weise „schwer“ sein
  - Prüfung, ob Algorithmus optimal

Beispielproblem: Summe der Elemente eines Feldes A[1..n] bestimmen

- Algorithmus?

- summe(A) = $\sum_{i=1}^{n} A[i]$
- Programm :

```
function summe(A)
   s = 0
   for i = 1:length(A)
      s = s + A[i]
   end
   return s
end
```

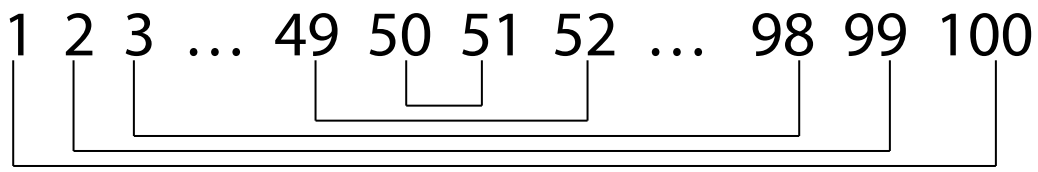
- Aufwand?
- Wenn A n Elemente hat, n Schritte!
- Der Aufwand wird *linear* genannt

Spezialisierung des Problems

- Vorwissen: A[i] = i

- Das Problem wird sehr viel einfacher!

Ausnutzen der Einschränkung



Summe jedes Paares: 101

50 Paare: $101 * 50 = 5050$

- Programm:

```
function summe(A)
   n = length(A)
   return (n+1)*(n/2)
end
```

- Nach Carl Friedrich Gauß (ca. 1786)
- Aufwand?
- Konstant, d.h. hängt (idealisiert!) nicht von n ab
- Entwurfsmuster: Ein-Schritt-Berechnung (konstanter Aufwand)

Programmiersprache julia

- Pseudocode auf den Folien ist in Julia geschrieben
  - Sollte intuitiv verständlich sein
- Algorithmen von den Folien können ausgeführt werden
  - Funktionsweise gut nachzuvollziehen durch schrittweises Ausführen und Debuggen
  - Zip-Datei mit Pseudocode von den Folien im Moodle
- Einführung in Julia am 14.4.22 als Teil der Vorlesung

Algorithmen: Notation durch Programme

- Annahme: Serielle Ausführung
- Julia-Pseudocode
  - Variablen, Felder
  - Zuweisungen
  - Fallunterscheidungen
    - Vergleich und Berechnungen für Bedingungstest
  - Schleifen
    - Vergleich und Berechnungen für Bedingungstest
  - Funktionen

Auf den Folien wird der jeweilige Skopus zusätzlich durch Einrückung ausgedrückt, für Julia zählt das **end.**

```
A = [1, 2, 3]
```

```
A[2] = 4
```

```
if n > 10
   ...
else
   ...
end
```

```
while A[i] < 20
   ...
end
```

```
for i = 1:20
   ...
end
```

```
function beispiel(…)
    … return …
end
```

Prozeduren

```
function beispiel(…)
    …
end
```

Das erste Problem: Summe der Elemente

- **Gegeben: A[1..n] : N**
  - Feld (Array) A von n Zahlen aus N (natürliche Zahlen)
- **Gesucht:**
  - Transformation **S** auf A, so dass gilt:
    - $s = \Sigma_{i \in \{1,...,n\}} A[i]$
  - Also: Gesucht ist ein Verfahren **S**, so dass **{ P } S { Q }** gilt (Notation nach Hoare)
    - Vorbedingung **P**: true (keine Einschränkung)
    - Nachbedingung **Q**: $s = \Sigma_{i \in \{1,...,n\}} A[i]$

C.A.R. Hoare, An axiomatic basis for computer programming. Communications of the ACM, Vol. 12, S. 567 - 583, **1969**

Das zweite Problem: Summe der Elemente

- **Gegeben: A[1..n] : N**
  - Feld (Array) A von n Zahlen aus N (natürliche Zahlen)
- **Gesucht:**
  - Transformation **S** von A, so dass gilt:
    - $s = \Sigma_{i \in \{1,\ldots,n\}} A[i]$
  - Also: Gesucht ist ein Verfahren **S**, so dass **{ P } S { Q }** gilt (Notation nach Hoare)
    - Vorbedingung **P**: $\forall\, i \in \{1 \ldots n\}$: **A[i] = i**
    - Nachbedingung **Q**: $s = \Sigma_{i \in \{1,\ldots,n\}} A[i]$

C.A.R. Hoare, An axiomatic basis for computer programming. Communications of the ACM, Vol. 12, S. 567 - 583, **1969**

Ein neues Problem: In-situ-Sortierproblem

- **Gegeben: A[1..n] : N**
  - Feld (Array) A von n Zahlen aus N (natürliche Zahlen)
- **Gesucht:**
  - Transformation S von A, so dass gilt: $\forall 1 \leq i < j \leq n: A[i] \leq A[j]$
  - Nebenbedingung: Es wird intern kein weiteres Feld gleicher (oder auch nur fast gleicher Größe) verwendet
  - Also: Gesucht ist ein Verfahren **S**, so dass **{ P } S { Q }** gilt (Notation nach Hoare)
    - Vorbedingung **P:** true (keine Einschränkung)
    - Nachbedingung **Q:** $\forall 1 \leq i < j \leq n: A[i] \leq A[j]$
    - Nebenbedingung: nur „konstant“ viel zusätzlicher Speicher (feste Anzahl von Hilfsvariablen), nur Vergleiche erlaubt

C.A.R. Hoare, An axiomatic basis for computer programming. Communications of the ACM, Vol. 12, S. 567 - 583, **1969**

In-situ-Sortieren: Problemanalyse

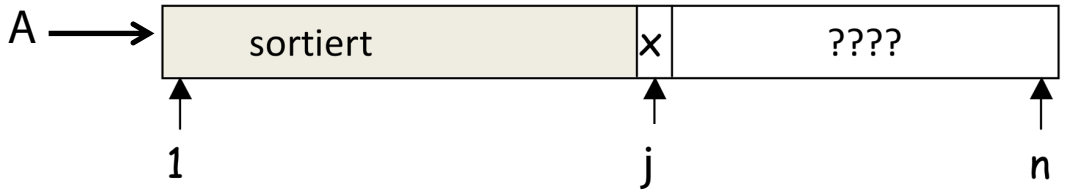
- Felder erlauben **wahlfreien** Zugriff auf Elemente
  - **Zugriffszeit** für ein Feld **konstant**
    (d.h. sie hängt nicht vom Indexwert ab)
  - Idealisierende Annahme (gilt nicht für moderne Computer)
- Es gibt keine Aussage darüber, ob die Feldinhalte schon sortiert sind, eine willkürliche Reihenfolge haben, oder umgekehrt sortiert sind
  - Vielleicht lassen sich solche „**erwarteten Eingaben**“
    aber in der Praxis feststellen
- **Aufwand das Problem zu lösen**: Man kann leicht sehen, dass jedes Element „falsch positioniert“ sein kann
  - **Mindestaufwand** im allgemeinen Fall: n Bewegungen
  - **Maximalaufwand** in Abhängigkeit von n?

Aufwand zur Lösung eines Problems

- Gegeben ein **Problem** (hier: In-situ-Sortierproblem)
  - Damit verbundene Fragen:
    - Wie „langsam“ muss ein Algorithmus sein, damit alle möglichen Probleminstanzen korrekt gelöst werden?
    - Oder: Wenn wir schon einen Algorithmus haben, können wir noch einen „substantiell besseren“ finden? Was müssen wir investieren?
- Jede Eingabe A stellt eine **Probleminstanz** dar
- Notwendiger Aufwand in Abhängigkeit von der Größe der Eingabe heißt **Komplexität eines Problems**
  - Anzahl der notwendigen Verarbeitungsschritte in Abhängigkeit der Größe der Eingabe (hier: Anzahl der Elemente des Feldes A)
  - Komplexität durch jeweils „schlimmste“ Probleminstanz bestimmt
  - Einzelne Probleminstanzen können evtl. weniger Schritte benötigen

Beispiel 2: Sortierung

- Gegeben: A = [4, 7, 3, 5, 9, 1]
- Gesucht: In-situ-Sortierverfahren (aufsteigend)
- Aufgabe: Entwickle "Idee"




```
function insertion_sort(A)
  for j = 2:length(A)
    key = A[j]
    # insert A[j] into the sorted sequence A[1..j - 1]
    i = j - 1
    while i > 0 && A[i] > key
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
    end
    A[i + 1] = key
  end
end
```

Entwurfsmuster / Entwurfsverfahren

- Schrittweise Berechnung
  - Beispiel: Bestimmung der Summe eines Feldes durch Aufsummierung von Feldelementen
- Ein-Schritt-Berechnng
  - Beispiel: Bestimmung der Summe eines Feldes ohne die Feldelemente selbst zu betrachten (geht nur unter Annahmen)
- Verkleinerungsprinzip
  - Beispiel: Sortierung eines Feldes
    - Unsortierter Teil wird immer kleiner, letztlich leer
    - Umgekehrt: Sortierter Teil wird immer größer, umfasst am Ende alles → Sortierung erreicht

Laufzeitanalyse

- Laufzeit als **Funktion der Eingabegröße**
- Verbrauch an Ressourcen: **Zeit**, **Speicher**, Bandbreite, Prozessoranzahl, ...
- Laufzeit bezogen auf serielle Maschinen mit wahlfreiem Speicherzugriff
  - **von Neumann-Architektur ...**
  - ... und Speicherzugriffszeit als konstant angenommen
- Laufzeit kann von der Art der Eingabe abhängen (**bester Fall, typischer Fall, schlechtester Fall**)
- Meistens: schlechtester Fall betrachtet

Aufwand für Zuweisung, Berechnung, Vergleich?

```
    function insertion_sort(A)
1:    for j = 2:length(A)
2:      key = A[j]
3:      # insert A[j] in A[1..j - 1]
4:      i = j - 1
5:      while i > 0 && A[i] > key
6:        A[i + 1] = A[i]
7:        i = i - 1
        end
8:      A[i + 1] = key
      end
    end
```

Zeit	Wie oft?
c_1	n
c_2	$n-1$
c_4	$n-1$
c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
c_6	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
c_7	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
c_8	$n-1$

t_j = Anzahl der Durchläufe der *while*-Schleife im j-ten Durchgang.

$c_1 - c_8$ = unspezifizierte Konstanten.

$$T(n) = c_1 n + (c_2 + c_4 + c_8)(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$$

Bester Fall: Feld ist aufsteigend sortiert

Ist das Array bereits aufsteigend sortiert, so wird die *while*-Schleife jeweils nur einmal durchlaufen: $t_j = 1$

$$T(n) = c_1 n + (c_2 + c_4 + c_8)(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$$

$$T(n) = (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8)$$

Also ist $T(n)$ eine lineare Funktion der Eingabegröße n.

Schlechtester Fall: Feld ist absteigend sortiert

Ist das Array bereits absteigend sortiert, so wird die *while*-Schleife maximal oft durchlaufen: $t_j = j$

$$T(n) = c_1 n + (c_2 + c_4 + c_8)(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$$

$$\sum_{j=2}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \qquad \sum_{j=2}^{n} (j-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \sum_{j=2}^{n} j - \sum_{j=2}^{n} 1 = (n(n+1)/2 - 1) - (n-1)$$

$$= n(n+1)/2 - n = n^2/2 + n/2 - n$$

$$= n^2/2 - n/2 = n(n-1)/2$$

Schlechtester Fall: Feld ist absteigend sortiert

Ist das Array bereits absteigend sortiert, so wird die *while*-Schleife maximal oft durchlaufen: $t_j = j$

$$T(n) = c_1 n + (c_2 + c_4 + c_8)(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$$

$$\sum_{j=2}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \qquad \sum_{j=2}^{n} (j-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$T(n) = c_1 n + (c_2 + c_4 + c_8)(n-1) + c_5 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) + (c_6 + c_7)\frac{n(n-1)}{2}$$

Also ist $T(n)$ eine quadratische Funktion der Eingabegröße n.

$$T(n) = c_0\, n^2 + \ldots$$

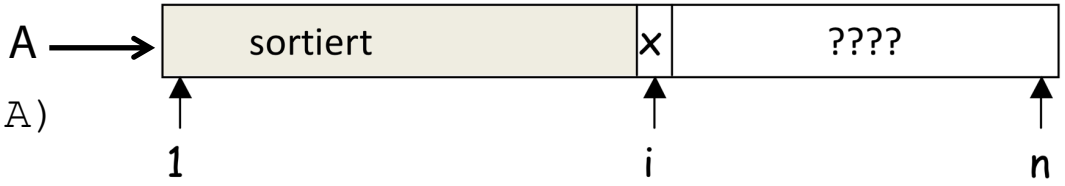
Schlimmster vs. typischer Fall

Meistens geht man bei der Analyse von Algorithmen vom (*worst case*) aus.

- *worst case* Analyse liefert obere Schranken
- In vielen Fällen ist der *worst case* die Regel
- Der aussagekräftigere (gewichtete) Mittelwert der Laufzeit über alle Eingaben einer festen Länge (*average case*) ist oft bis auf eine multiplikative Konstante nicht besser als der *worst case*.
- Belastbare Annahmen über die mittlere Verteilung von Eingaben sind oft nicht verfügbar.

Eine andere "Idee" für Sortieren

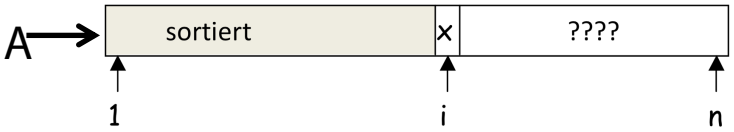
- Gegeben: a = [4, 7, 3, 5, 9, 1]
- Gesucht: In-situ-Sortierverfahren




```
function selection_sort(A)
  for i = 1:length(A)
    min = i
    for j = (i + 1):length(A)
      if A[j] < A[min] # find the minimum in the unsorted part
        min = j
      end
    end
    x = A[i]          # swap the found minimum into sorted part
    A[i] = A[min]
    A[min] = x
  end
end
```

Sortieren durch Auswählen (Selection-Sort)

- Gleiches **Entwurfsmuster: Verkleinerungsprinzip**
- Aufwand im **schlechtesten Fall**?
  - $T(n) = c_1 n^2 + \ldots$
- Aufwand im **besten Fall**?
  - $T(n) = c_2 n^2 + \ldots$



- Sortieren durch Auswählen scheint also noch schlechter zu sein als Sortieren durch Einfügen !
- Kann sich jemand eine Situation vorstellen, in der man trotzdem zu Sortieren durch Auswählen greift?
  - Was passiert, wenn die Elemente sehr groß sind?
  - Verschiebungen sind aufwendig

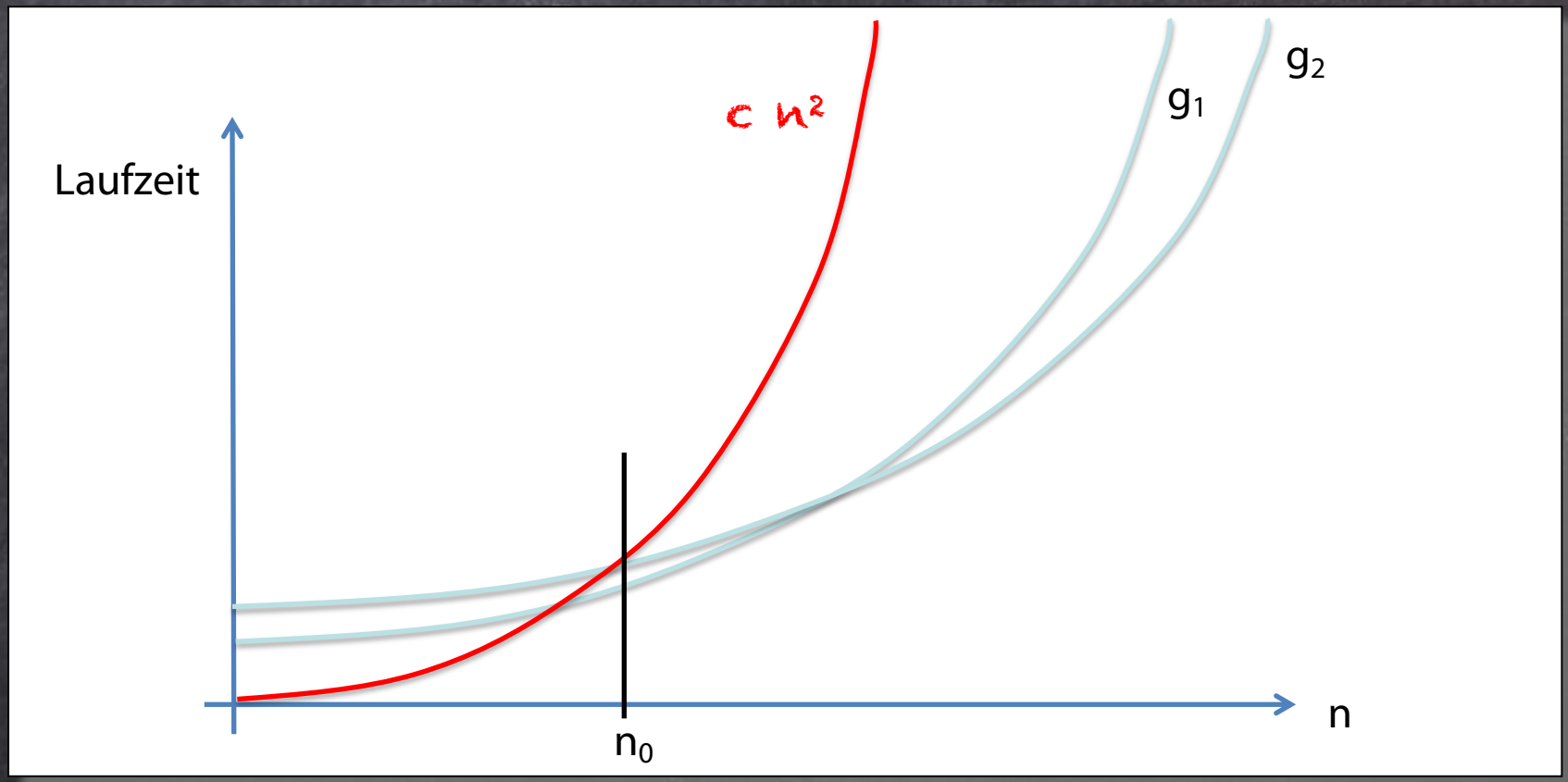
Vergleich der beiden Algorithmen

- Anzahl Vergleiche?
- Anzahl Zuweisungen?
- Berechnungen?

- Was passiert, wenn die Eingabe immer weiter wächst?
  - $n \longmapsto \infty$
- Asymptotische Komplexität eines Algorithmus
- Die Konstanten c_i sind nicht dominierend
- Lohnt es sich, die Konstanten zu bestimmen?
- Sind die beiden Algorithmen substantiell verschieden?

Quadratischer Aufwand

- Algorithmus 1: $g_1(n) = b_1 + c_1 * n^2$
- Algorithmus 2: $g_2(n) = b_2 + c_2 * n^2$



Oberer „Deckel“: O-Notation

- Charakterisierung von Algorithmen durch Menge von Funktionen

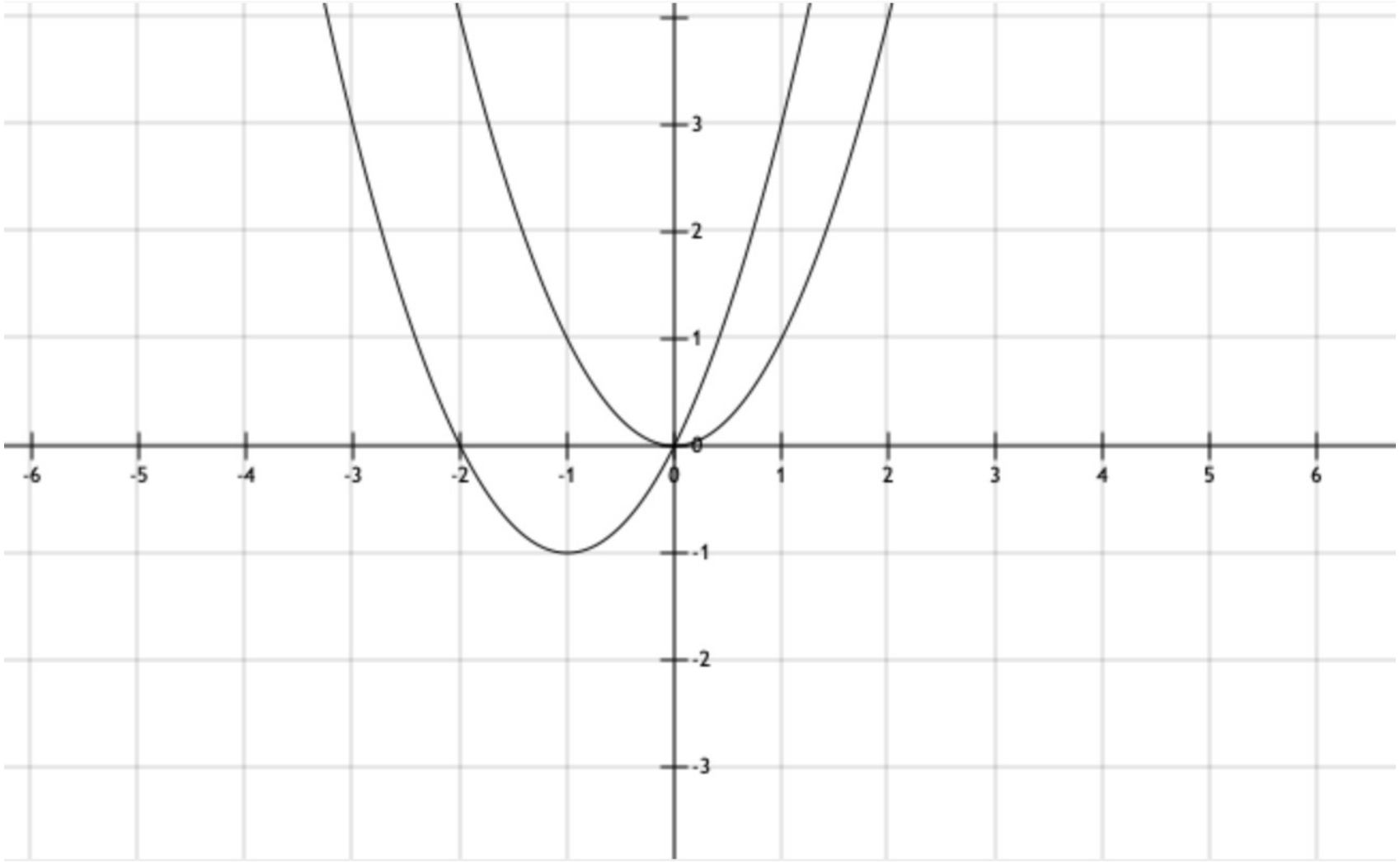
$$O(f(n)) = \{ g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists n_0 > 0 \wedge \exists c > 0, \text{ so dass } \forall n \geq n_0: g(n) \leq c * f(n) \}$$

- Sei $f(n) = n^2$
- $g_1 \in O(n^2)$
- $g_2 \in O(n^2)$
- g_1 und g_2 sind „von der gleichen Art“
- O(f(n)) definiert „Klasse“ von Funktionen

Erstmals vom deutschen Zahlentheoretiker Paul Bachmann in der **1894** erschienenen zweiten Auflage seines Buchs Analytische Zahlentheorie verwendet. Verwendet auch vom deutschen Zahlentheoretiker Edmund Landauer, daher auch Landau-Notation genannt (**1909**) [Wikipedia 2015]

In der Informatik populär gemacht durch Donald Knuth, In: The Art of Computer Programming: Fundamental Algorithms, Addison-Wesley, **1968**

O-Notation: $O(n^2) = O(n^2 + 2n)$

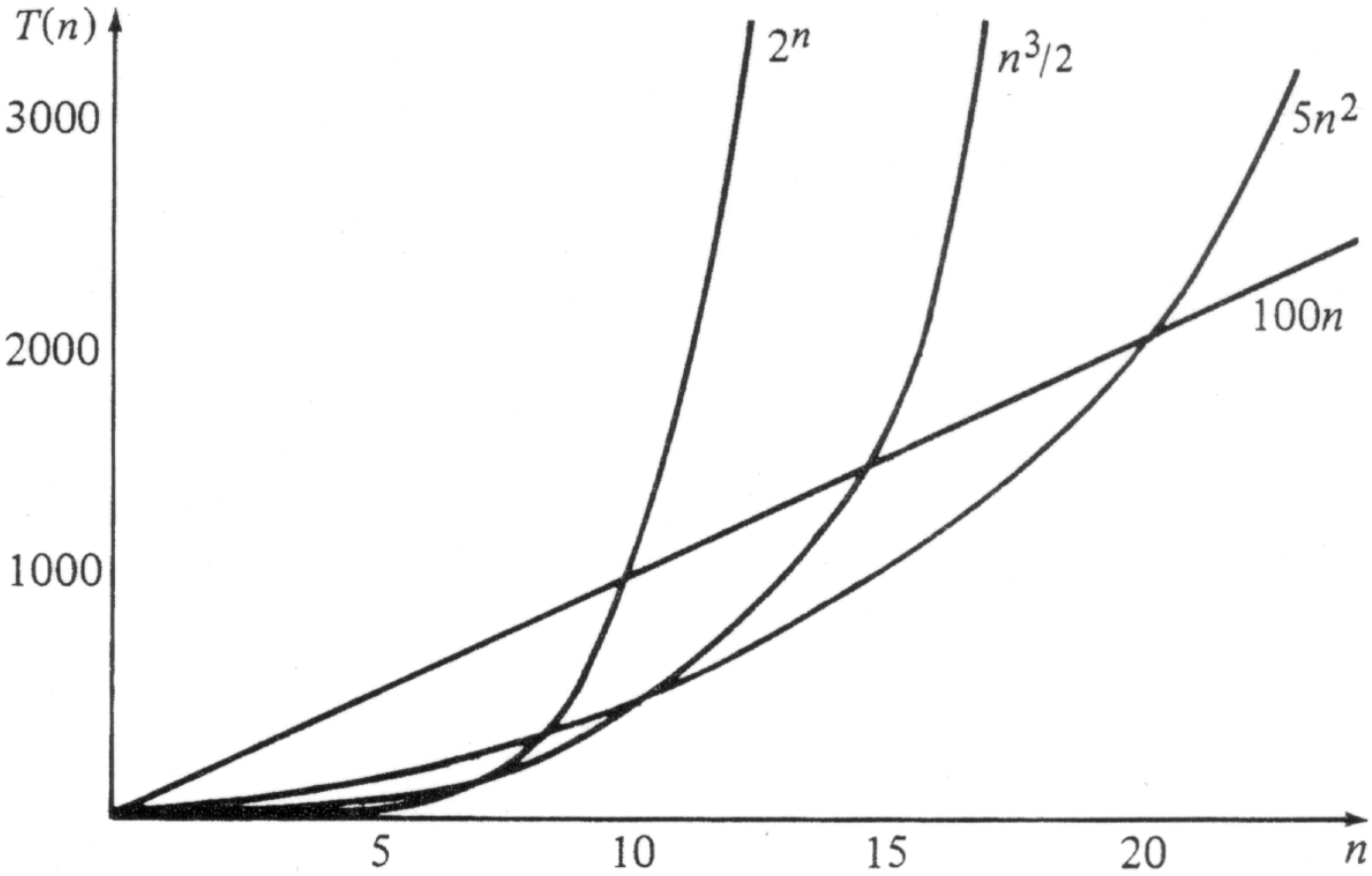


O-Notation

$$O(f(n)) = \{ g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists n_0 > 0 \wedge \exists c > 0, \text{ so dass } \forall n \geq n_0: g(n) \leq c * f(n) \}$$

- Quadratischer Aufwand: $O(n^2)$
- Linearer Aufwand: $O(n)$
- Konstanter Aufwand: $O(1)$

Laufzeiten



Zusammenfassung: Entwurfsmuster

- In dieser Vorlesungseinheit:
  - Schrittweise Berechnung
  - Ein-Schritt-Berechnung
  - Verkleinerungsprinzip
- Analyse der Laufzeit: O-Notation
- Nächste Vorlesung
  - Entwurfsmuster Teile und Herrsche