Algorithmen und Datenstrukturen

Suchraumbeschneidung, Alpha-Beta-Pruning

Prof. Dr. Ralf Möller

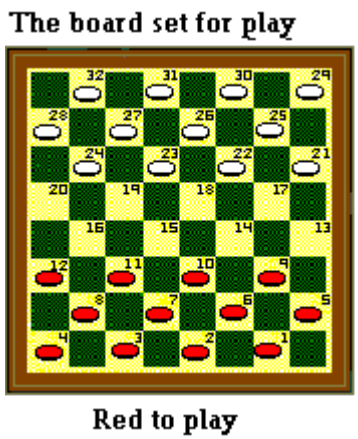
Universität zu Lübeck

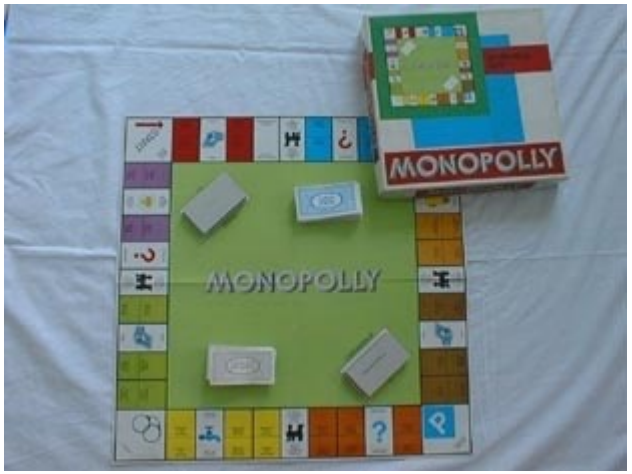
Institut für Informationssysteme

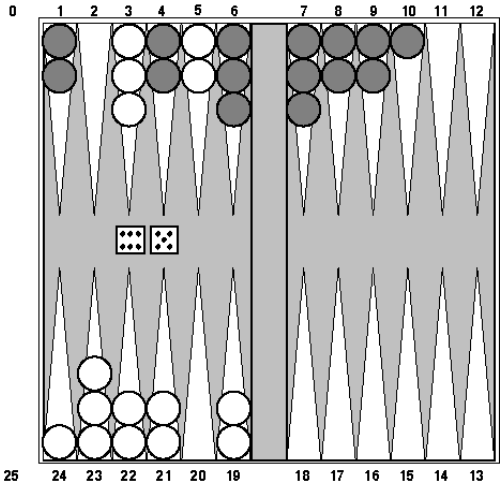
Magnus Bender (Übungen)

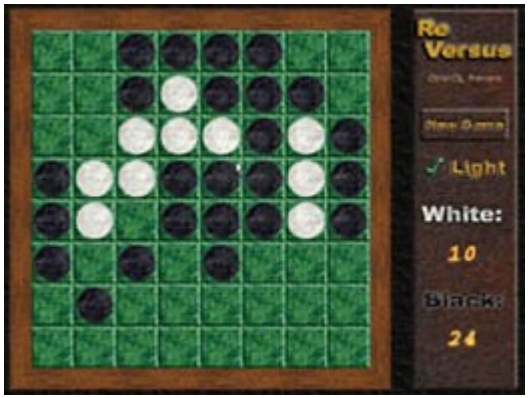
sowie viele Tutoren

Suchgraphen für 2-Personen-Nullsummenspiele

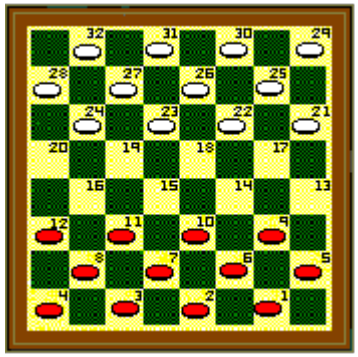


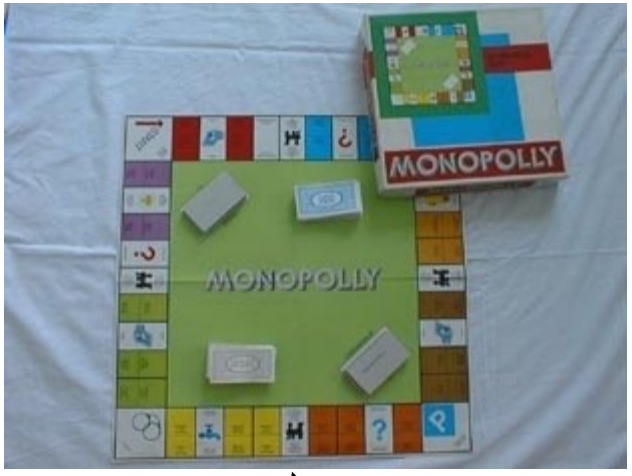


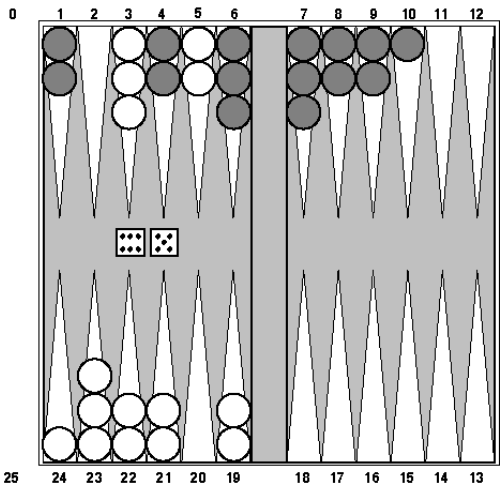




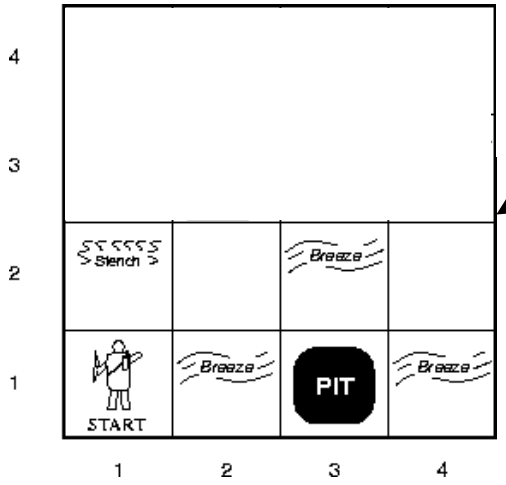
Typen von Spielen







	deterministisch	zufällig
Perfekte Information	Schach, Dame, Go, Othello	Backgammon, Monopoly
Unvollständige Information	Wumpus	Bridge, Poker, Scrabble



Zweipersonen-Spiele

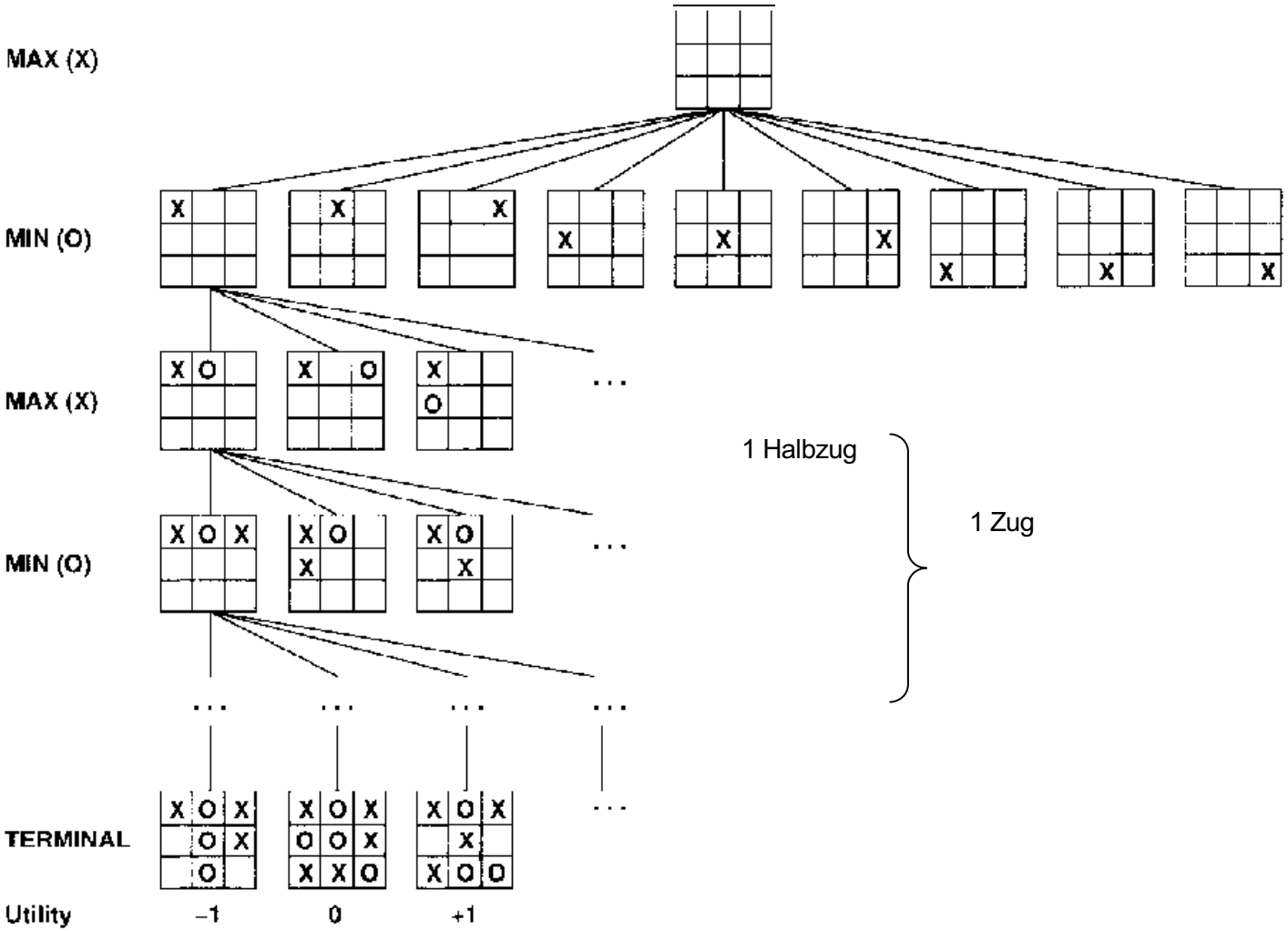
- Ein Spiel als Suchproblem (z.B. Matt in drei Zügen):
  - Anfangszustand: Brettposition und erster Spieler
  - Operatoren (Züge): In Brettposition legale Züge
  - Endzustand: Bedingungen für Spielende
  - Nützlichkeitsfunktion: Num. Wert für Ausgang des Spiels
    -1, 0, 1
    für verloren, unentschieden, gewonnen
    (Payoff- oder Utility-Funktion)

Entwurfsmuster Suchraumbeschneidung

- Unser Problem: Bestimme besten Zug
- Entscheidung des Problems über Suche in einem Graphen mit der Idee, den…
- ...Suchraum systematisch zu beschneiden…
- ohne die richtige Lösung zu verlieren

- Später:
  Suchraumbeschneidung als Approximation
  aber mit praktikablem Laufzeitverhalten

Beispiel: Tic-Tac-Toe



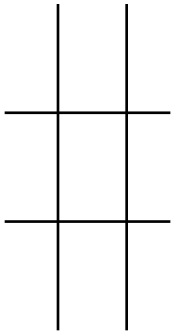
Minimax-Algorithmus

- Optimales Spiel für deterministische Umgebungen und perfekte Info
- **Basisidee:** Wähle Zug mit höchstem Nützlichkeitswert in Relation zum besten Spiel des Gegners

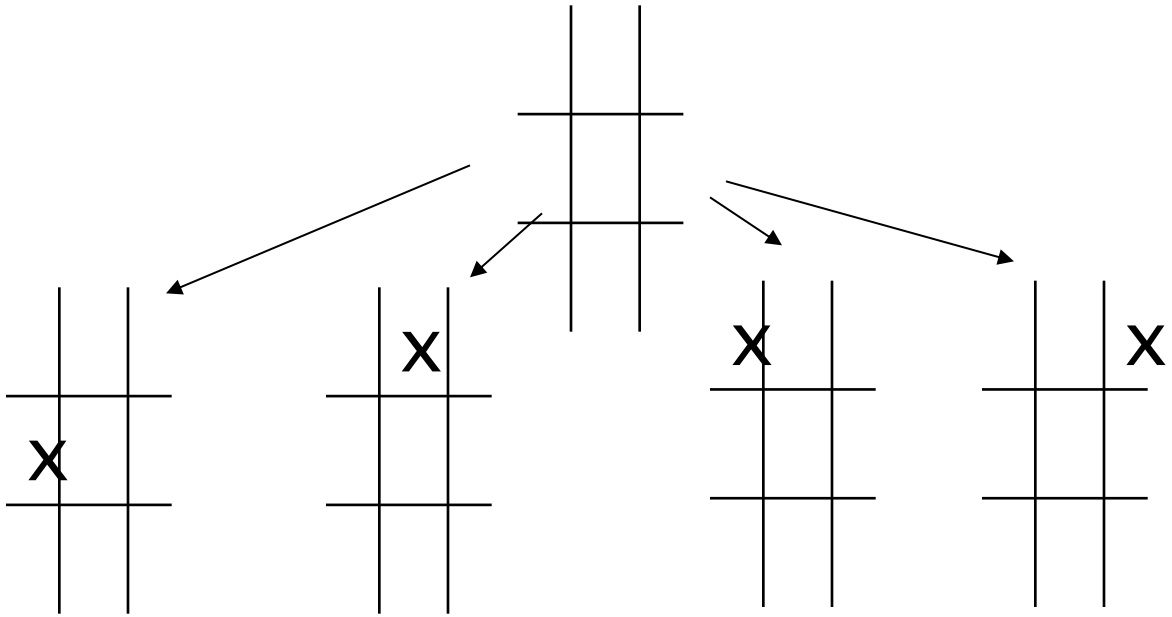
- **Algorithmus:**
  1. Generiere Spielbaum vollständig
  2. Bestimme Nützlichkeit der Endzustände
  3. Propagiere Nützlichkeitswerte im Baum nach oben durch Anwendung der Operatoren MIN und MAX auf die Knoten in der jeweiligen Ebene
  4. An der Wurzel wähle den Zug mit maximalem Nützlichkeitswert

- Schritte 2 und 3 nehmen an, dass der Gegner perfekt spielt.

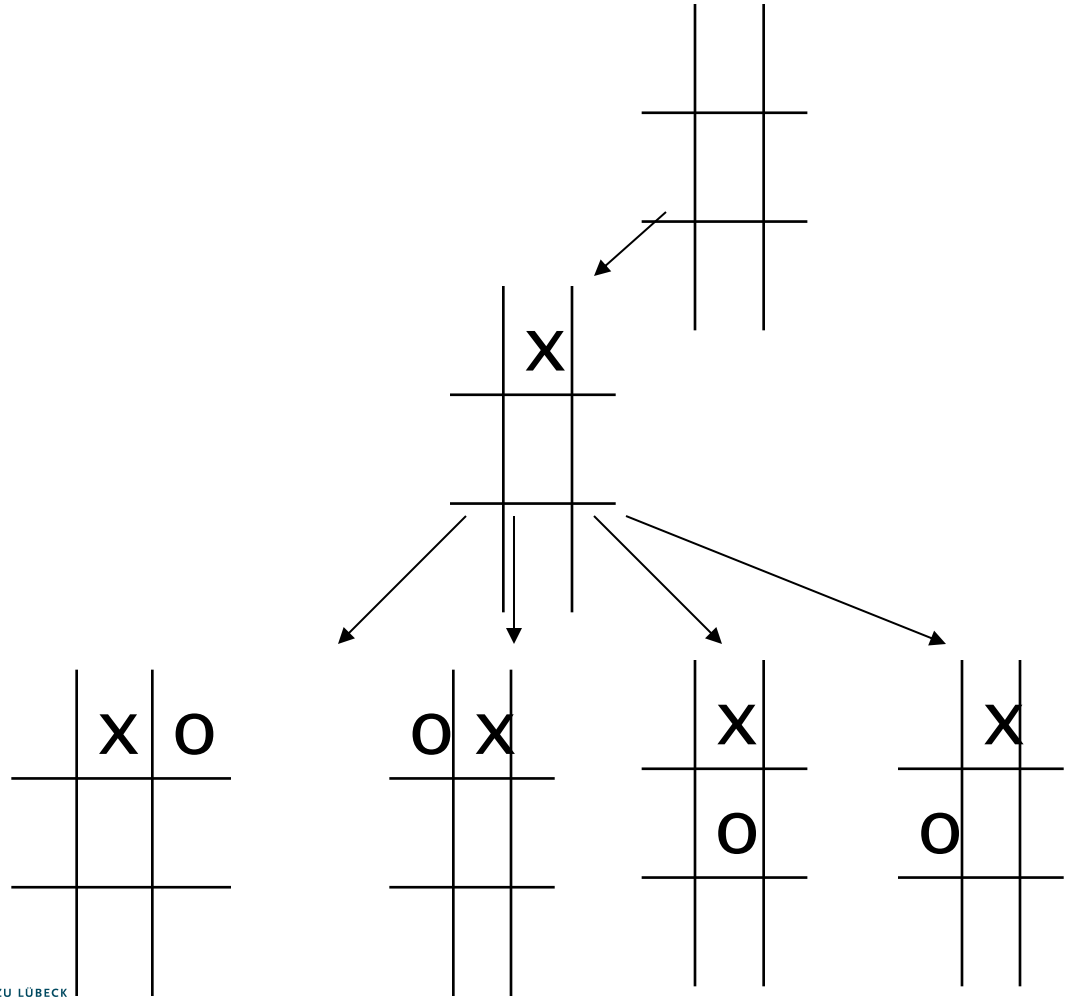
Erzeuge Spielbaum



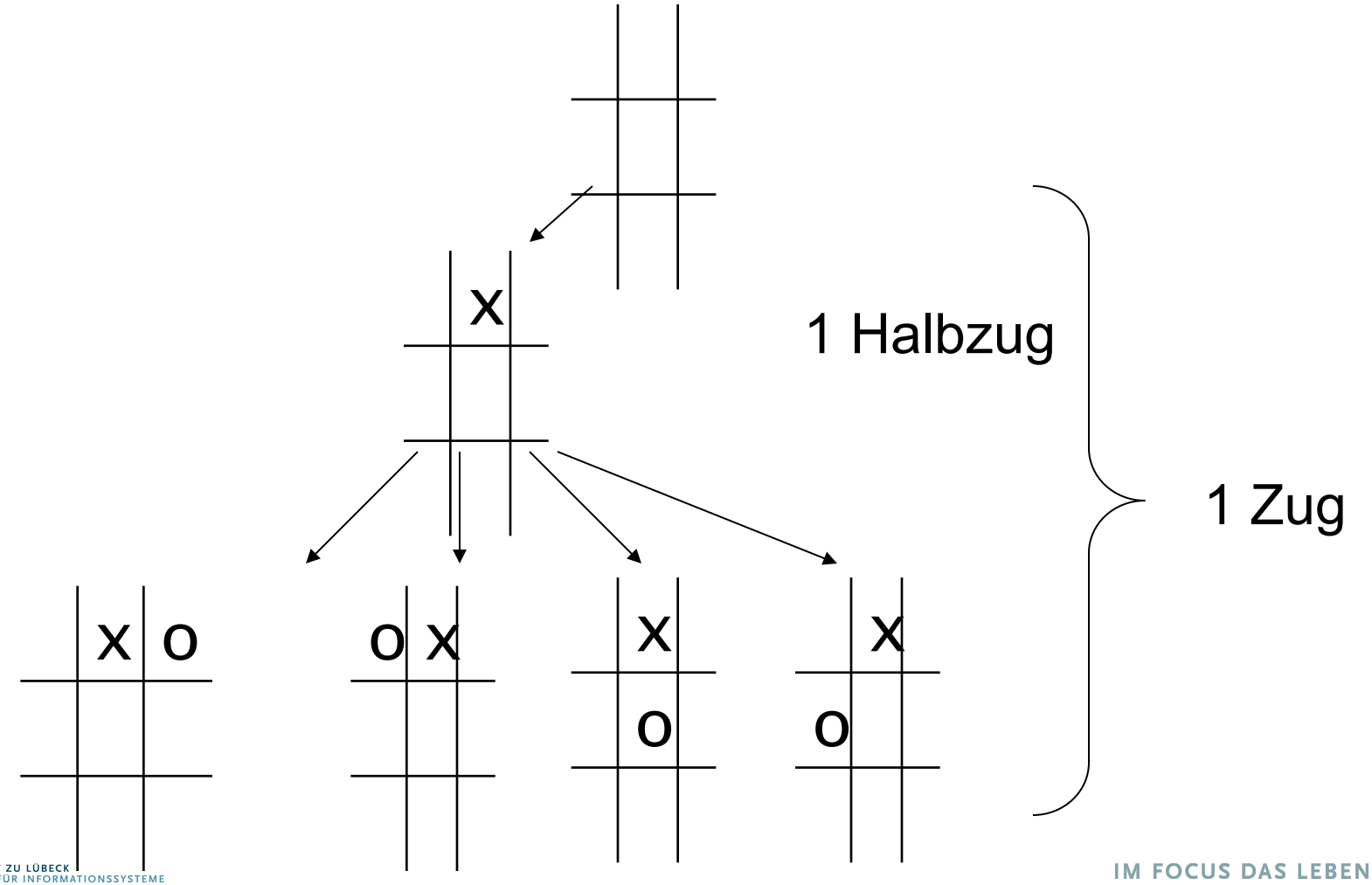
Erzeuge Spielbaum



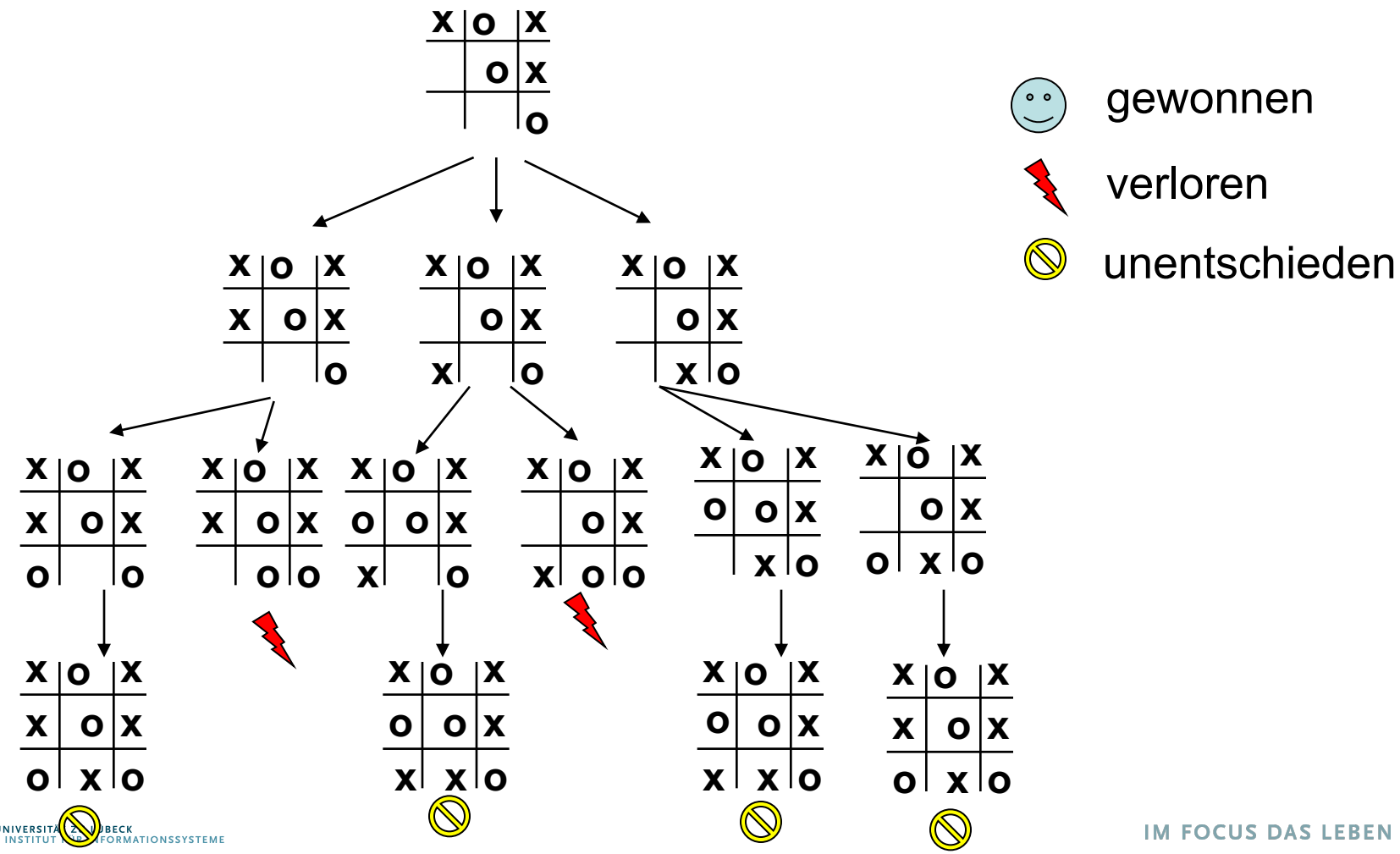
Erzeuge Spielbaum



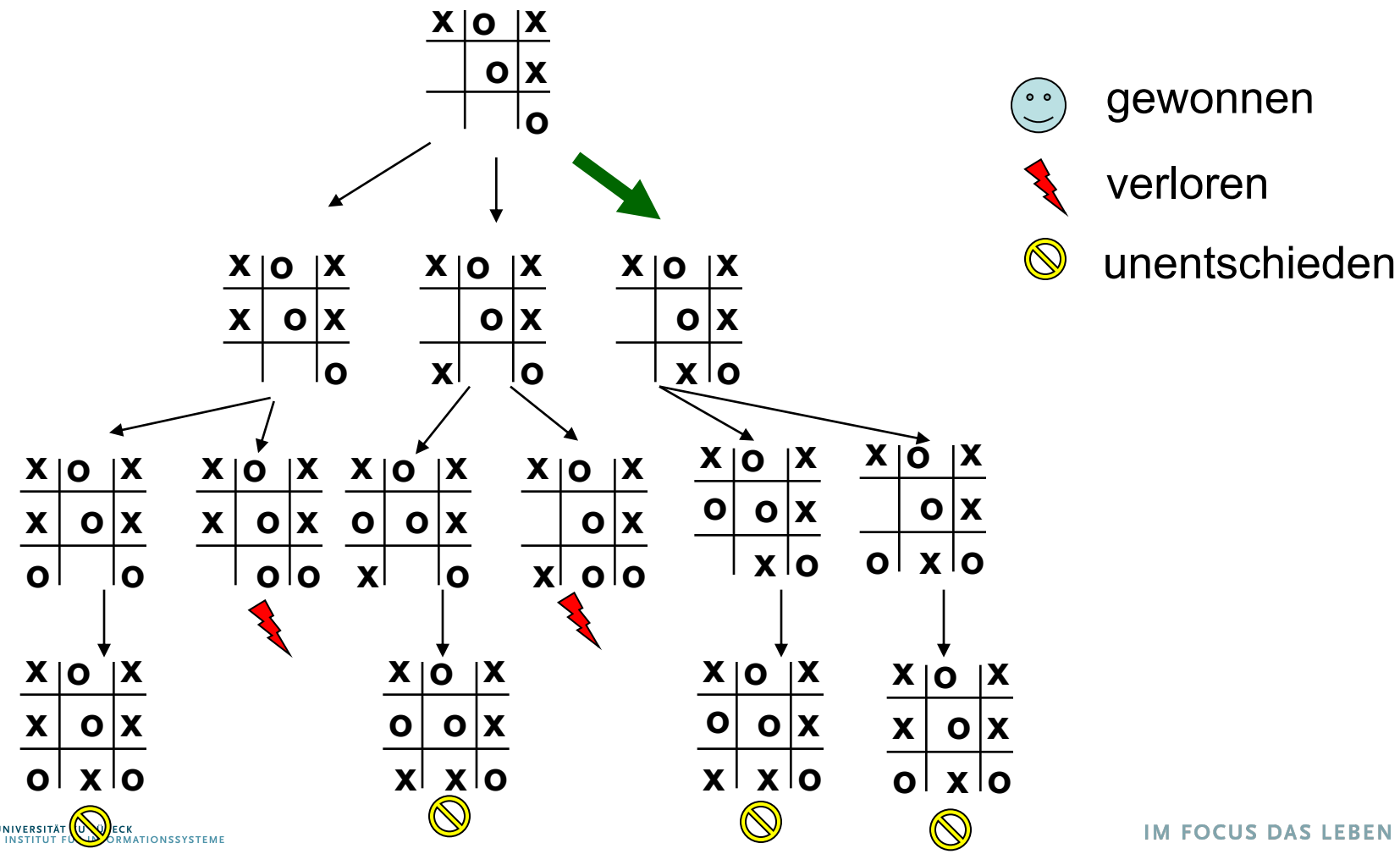
Erzeuge Spielbaum



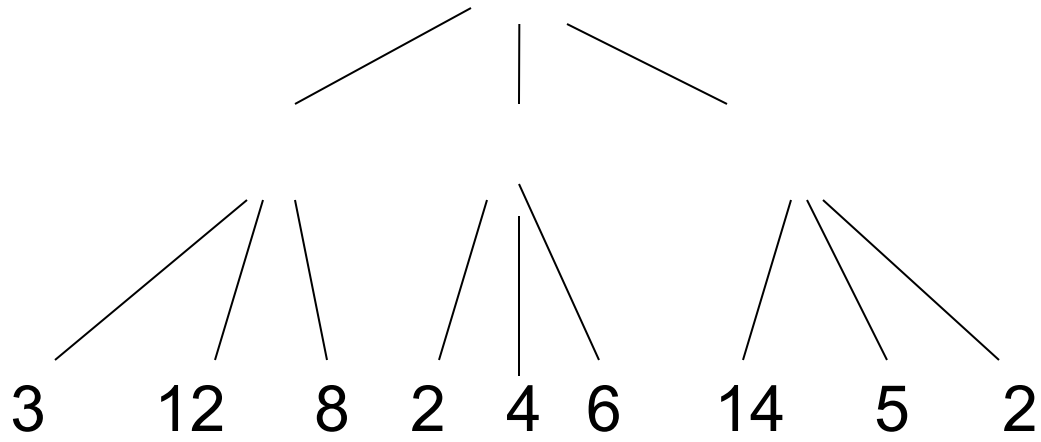
Ein Teilbaum



Was ist ein guter Zug?

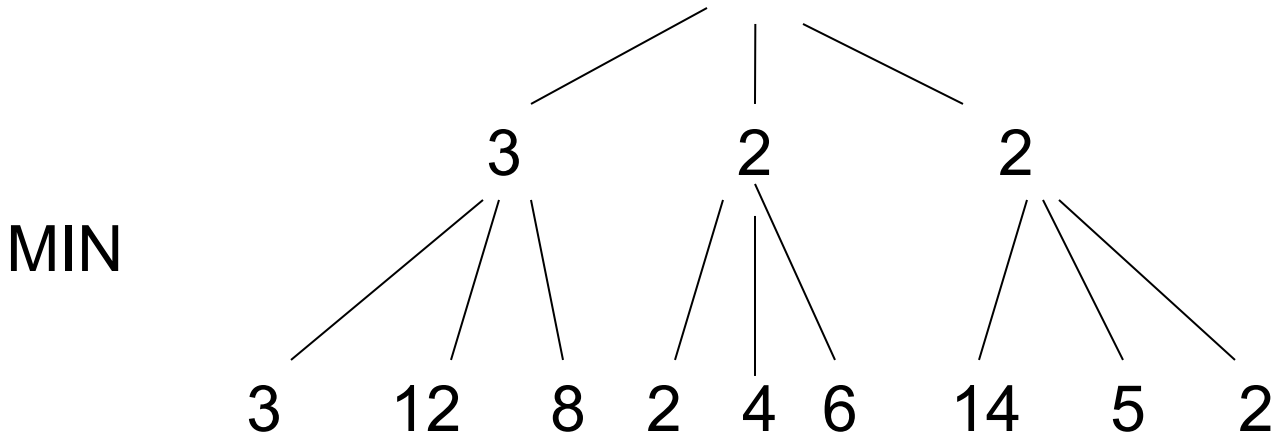


Minimax



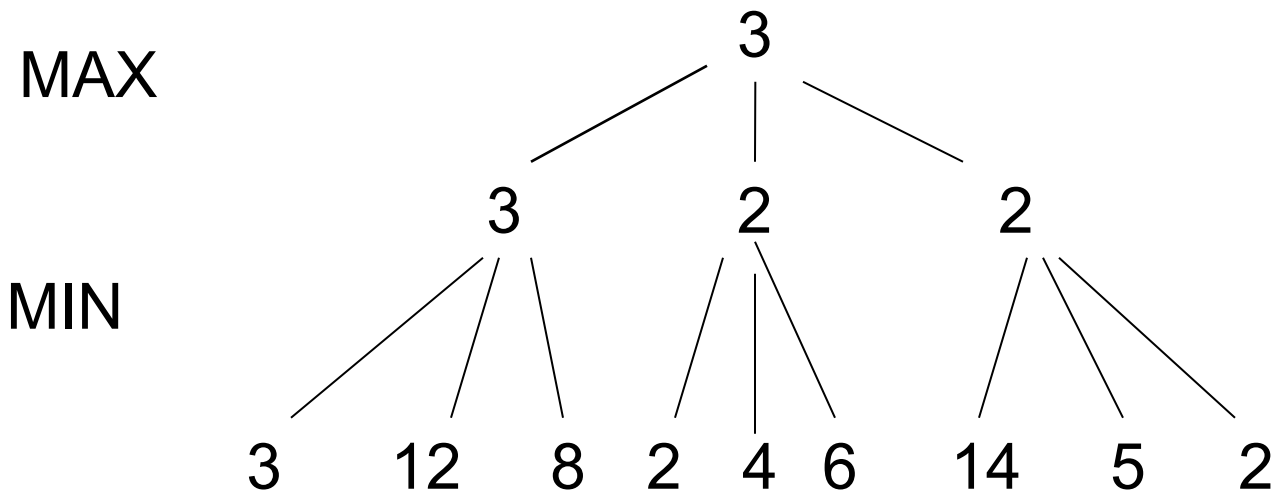
- Minimiere Gewinnmöglichkeiten für den Gegner
- Maximiere eigene Gewinnmöglichkeiten

Minimax



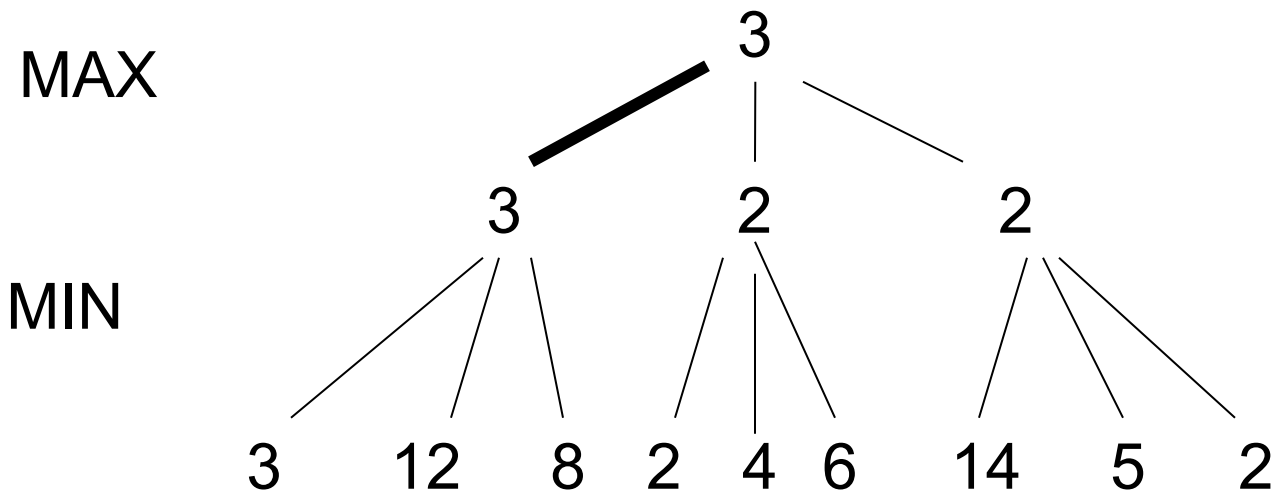
- Minimiere Gewinnmöglichkeiten für den Gegner
- Maximiere eigene Gewinnmöglichkeiten

Minimax



- Minimiere Gewinnmöglichkeiten für den Gegner
- Maximiere eigene Gewinnmöglichkeiten

Minimax



- Minimiere Gewinnmöglichkeiten für den Gegner
- Maximiere eigene Gewinnmöglichkeiten

Minimax: Rekursive Implemen

Vom aktuellen Zustand durch eine Aktion erreichbare Zustände

```
function minmax_decision(t)
  max_value(t.root)    # Berechne alle Werte
                       # Bestimme ”besten” nachfolgenden Zustand
  return findmax((s_state) -> s_state.v, t.root.subseq_s)
end
```

```
function min_value(state)
  if is_terminal(state)
    return value(state)
  end
  v = typemax(Int)
  for s_state in state.subseq_s
    v = minimum((v,
          max_value(s_state)))
  end
  state.v = v
  return v
end
```

```
function max_value(state)
  if is_terminal(state)
    return value(state)
  end
  v = typemin(Int)
  for s_state in state.subseq_s
    v = maximum((v,
          min_value(s_state)))
  end
  state.v = v
  return v
end
```

Vollständig: ?
Optimal: ?

Zeitkomplexität: ?
Platzkomplexität: ?

Minimax: Rekursive Implementation

```
function minmax_decision(t)
  max_value(t.root)    # Berechne alle Werte
                       # Bestimme ”besten” nachfolgenden Zustand
  return findmax((s_state) -> s_state.v, t.root.subseq_s)
end
```

```
function min_value(state)
  if is_terminal(state)
    return value(state)
  end
  v = typemax(Int)
  for s_state in state.subseq_s
    v = minimum((v,
          max_value(s_state)))
  end
  state.v = v
  return v
end
```

```
function max_value(state)
  if is_terminal(state)
    return value(state)
  end
  v = typemin(Int)
  for s_state in state.subseq_s
    v = maximum((v,
          min_value(s_state)))
  end
  state.v = v
  return v
end
```

Vollständig: Ja, für endl. Zust.raum
Optimal: Ja

Zeitkomplexität: $O(b^m)$
Platzkomplexität: $O(bm)$ (= DFS)

m = Suchtiefe bis Endzustände erreicht
b = Verzweigungsfaktor (braching)

Spielen als naive Suche?

- **Komplexität:** Viele Spiele haben einen großen Suchraum
  - **Schach:** $b = 35, m = 100$ **#*Knoten*** $= 35^{100}$
    Falls Betrachtung eines Knotens 1 ns benötigt,
    braucht jeder Zug ***10^{50}* Jahrhunderte**
    zur Berechnung

- Endzustände können in vertretbarer Zeit
  nicht alle generiert werden

Algorithmen für perfektes Spiel: John von Neumann, **1944**
Endlicher Horizont, approximative Zustandsbewertung: Zuse **1945** , Shannon **1950** , Samuel **1952-57**
Suchbaumabschneidungen zur Einsparung von Zeit: McCarthy **1956**

Lösungsansätze

Reduktion des Ressourcenproblems (Zeit, Speicher):

1. **Suchraumbeschneidung (Pruning):** macht Suche schneller durch Entfernen von Teilen des Suchbaums, in denen beweisbar keine bessere als die aktuell beste Lösung gefunden werden kann

2. **Bewertungsfunktion:** Heuristik zur Bewertung der Nützlichkeit eines Spielzustands (Knoten) ohne vollständige Suche

1. α-β-Pruning

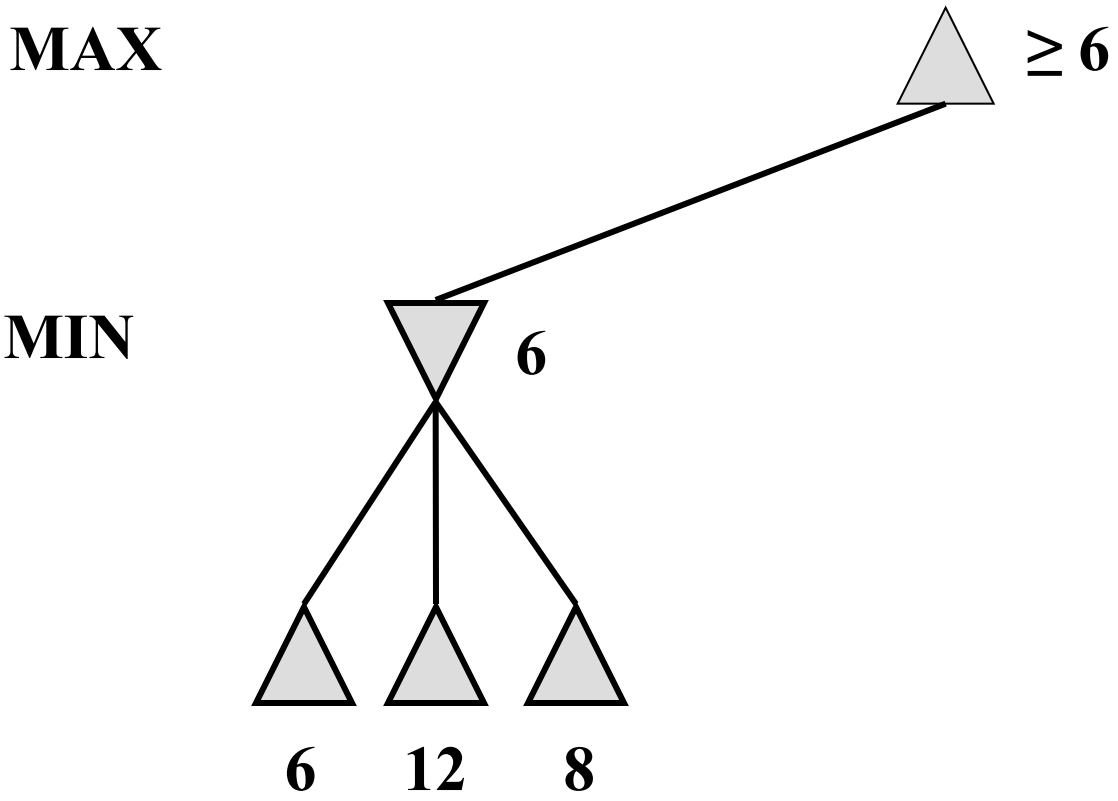
- **Pruning:** Elimination eines Zweigs des Suchbaums, ohne vollständige Untersuchung jedes Knotens darunter (vgl. auch A*)

- **α-β-Pruning:** beschneide Teile des Suchbaums, die den Nützlichkeitswerte eines Max- oder Min-Knotens nicht verbessern können

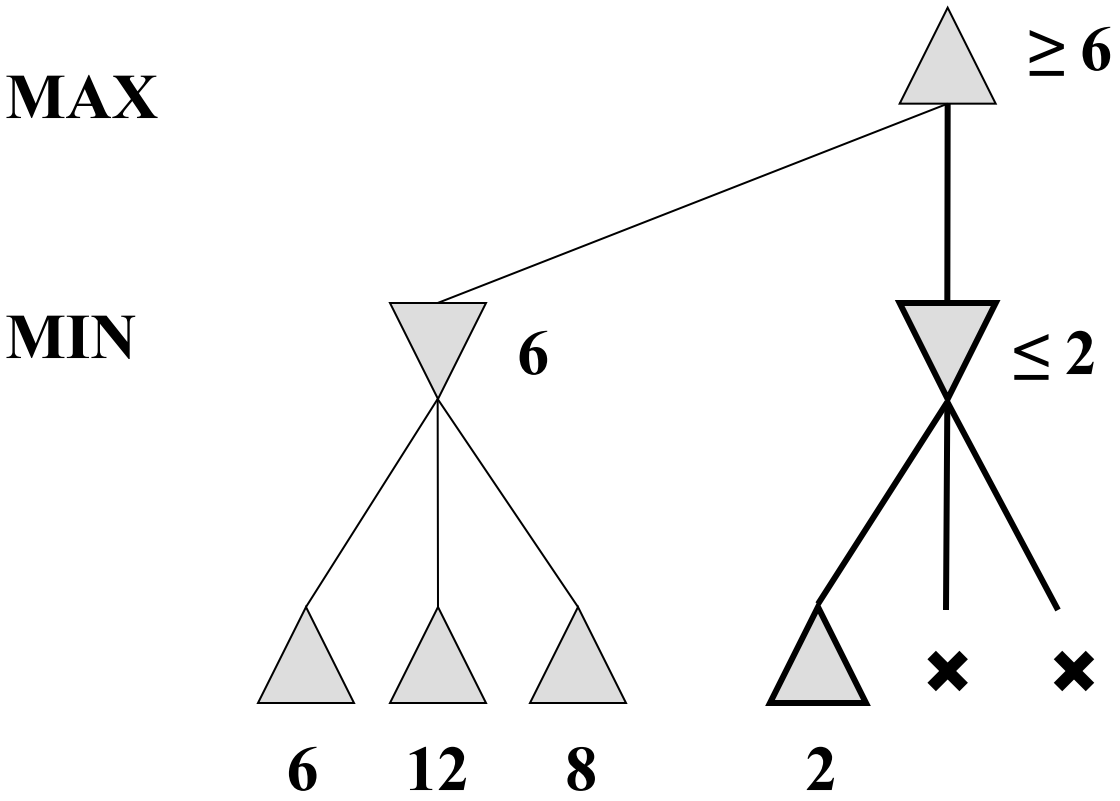
  (wobei nur bisher betrachtete Knotennützlichkeitswerte eine Rolle spielen)

- Geht das? Ja (s.u.).
  - Der Verzweigungsfaktor wird in etwa von b auf $\sqrt{b}$ reduziert
  - Die Suchtiefe wird gegenüber Minimax ca. verdoppelt

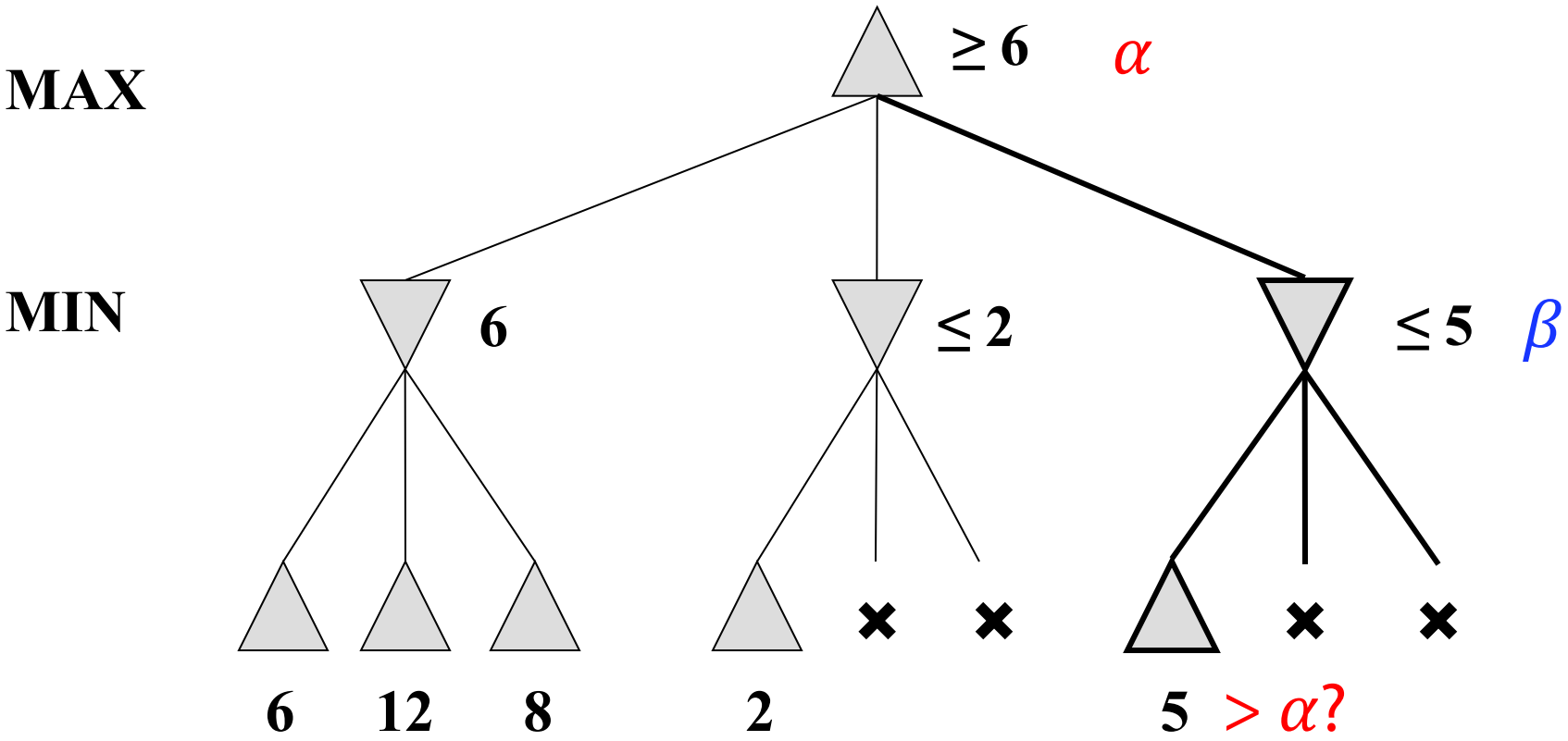
Pruning: Beispiel



Pruning: Beispiel



α-β-Pruning



MINIMAX(root) = max(min(6,12,8),min(2,a,b),min(5,b,d))
= max(6,z,y) wobei z=min(2,a,b)≤ 2 und y=min(5,b,d) ≤ 5
= 6

α-β-Pruning: Algorithmus

- Weil Minimax Tiefensuche betreibt, betrachten wir die Knoten auf einem gegebene Pfad im Baum
- Für jeden Pfad, speichern wir:
  - α: Bewertung der bislang besten Wahl für MAX
  - β: Bewertung der bislang besten Wahl für MIN

Von mehreren Forschern **um 1960** erfunden.

Suche mit Pfadbeschneidung

```
function alpha_beta_search(t)
  alpha = typemin(Int)
  beta = typemax(Int)

  # Berechne alle Werte (mit Pruning
  best = max_value(t.root, alpha, beta)
  # Bestimme ”besten” nachfolgenden Zustand
  return findmax((s) -> s.v, t.root.subseq_s)
end
```

Von mehreren Forschern **um 1960** entwickelt.

MAX-VALUE und MIN-VALUE mit α-β-Pruning

```
function min_value(state, a, b)
  if is_terminal(state)
    return value(state)
  end

  v = typemax(Int)
  for s in state.subseq_s
    v = minimum((
          v,
          max_value(s, a, b)
        ))
    if v <= a
      break
    end
    b = minimum((b, v))
  end
  state.alpha = a
  state.beta = b
  state.v = v
  return v
end
```

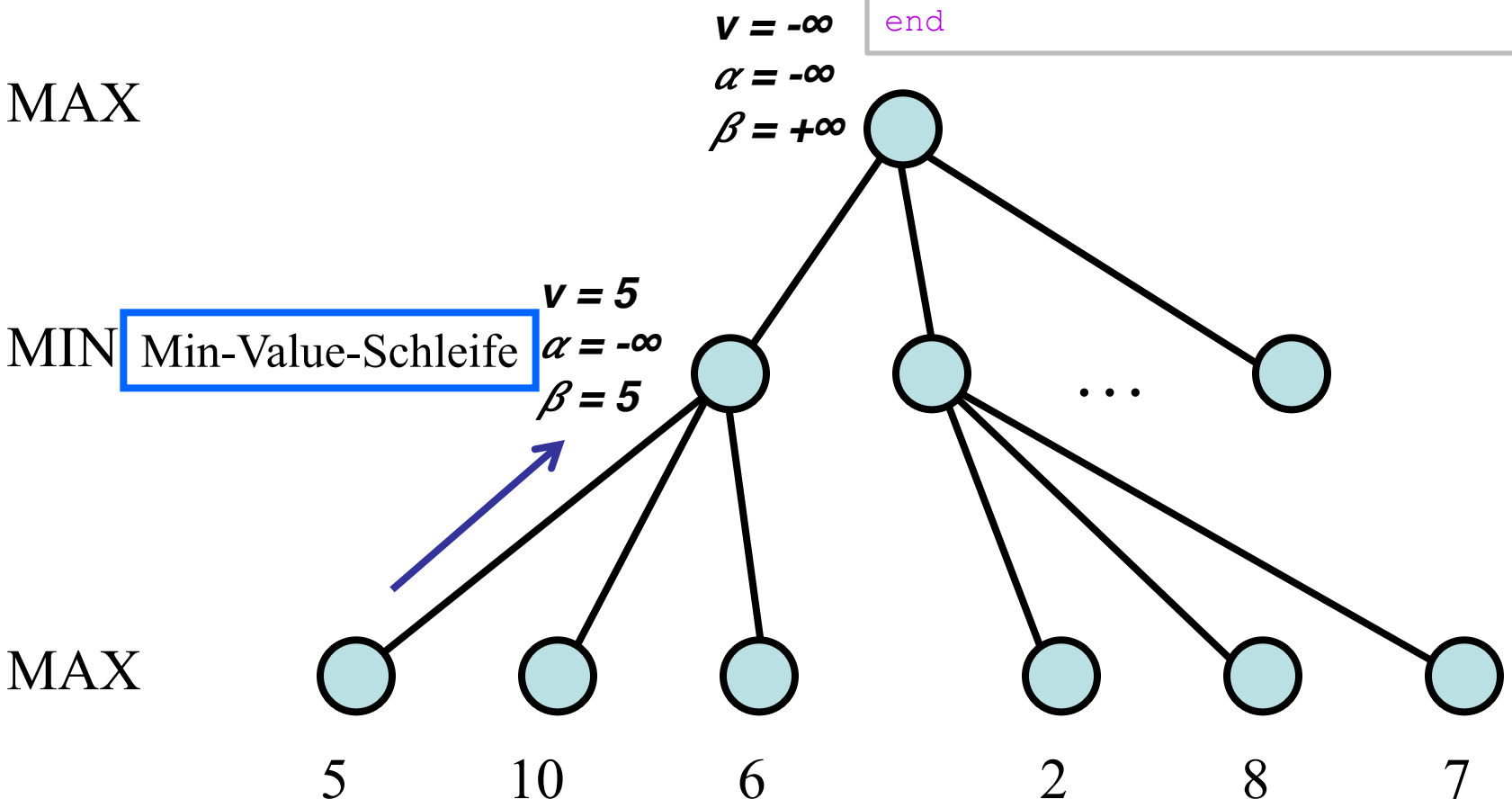
```
function max_value(state, a, b)
  if is_terminal(state)
    return value(state)
  end

  v = typemin(Int)
  for s in state.subseq_s
    v = maximum((
          v,
          min_value(s, a, b)
        ))
    if v >= b
      break
    end
    a = maximum((a, v))
  end
  state.alpha = a
  state.beta = b
  state.v = v
  return v
end
```

α-β-Suchalgorithmus

In Min-Value:

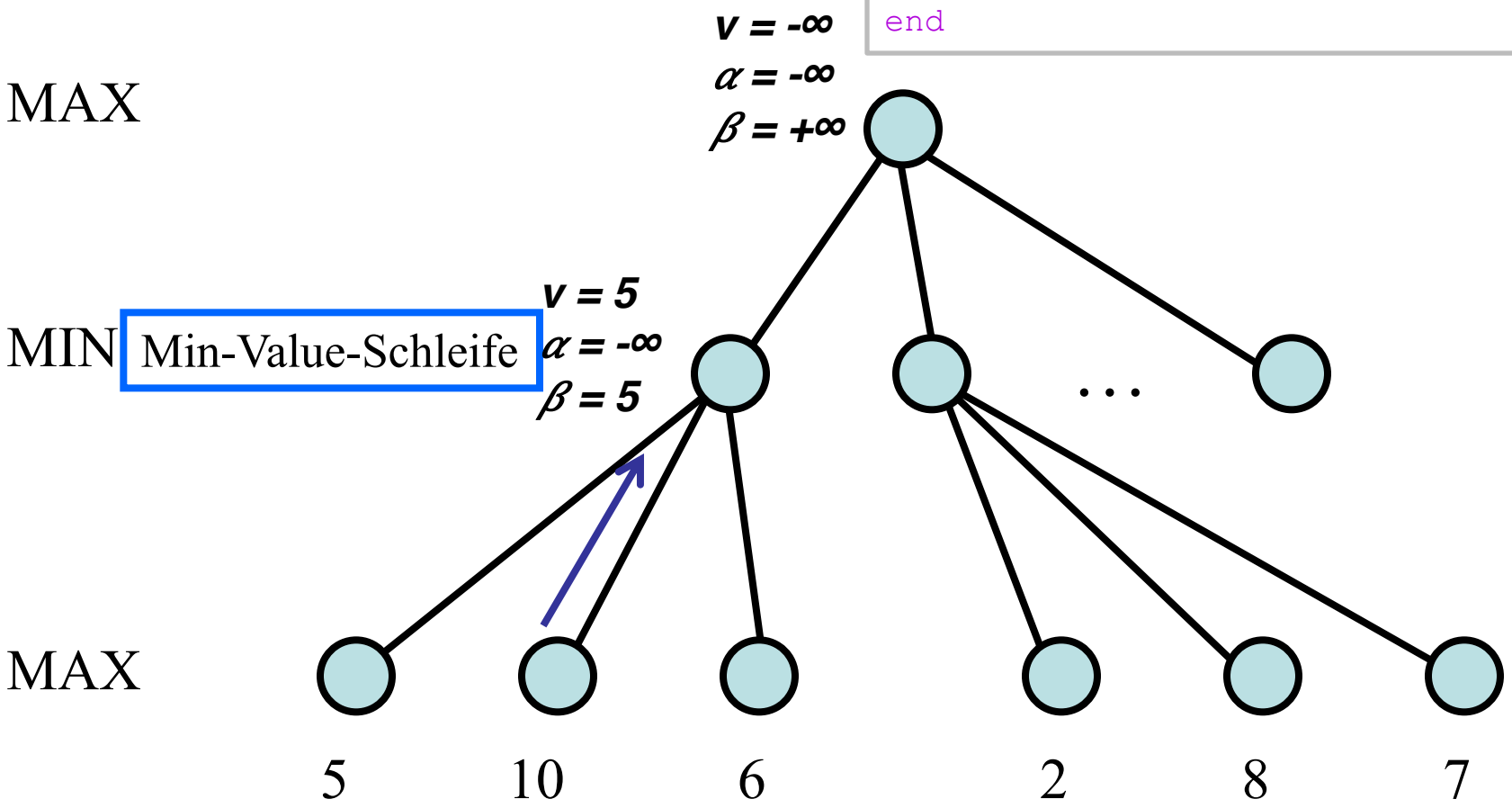
```
v = typemax(Int)
for s in state.subseq_s
  v = minimum(( v, max_value(s, a, b)))
  if v <= a   break end
  b = minimum((b, v))
end
```



α-β-Suchalgorithmus

In Min-Value:

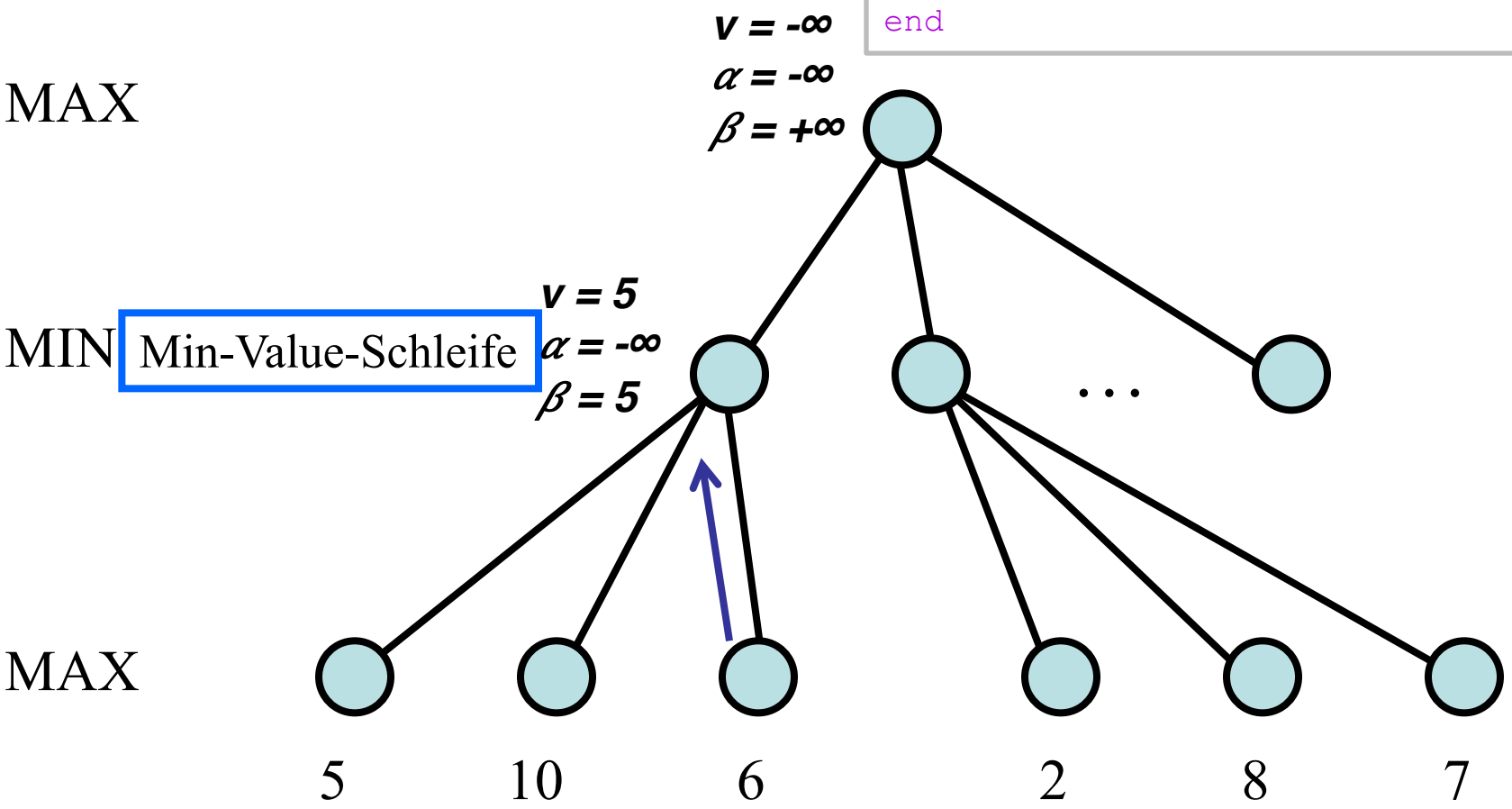
```
v = typemax(Int)
for s in state.subseq_s
  v = minimum(( v, max_value(s, a, b)))
  if v <= a   break end
  b = minimum((b, v))
end
```



α-β-Suchalgorithmus

In Min-Value:

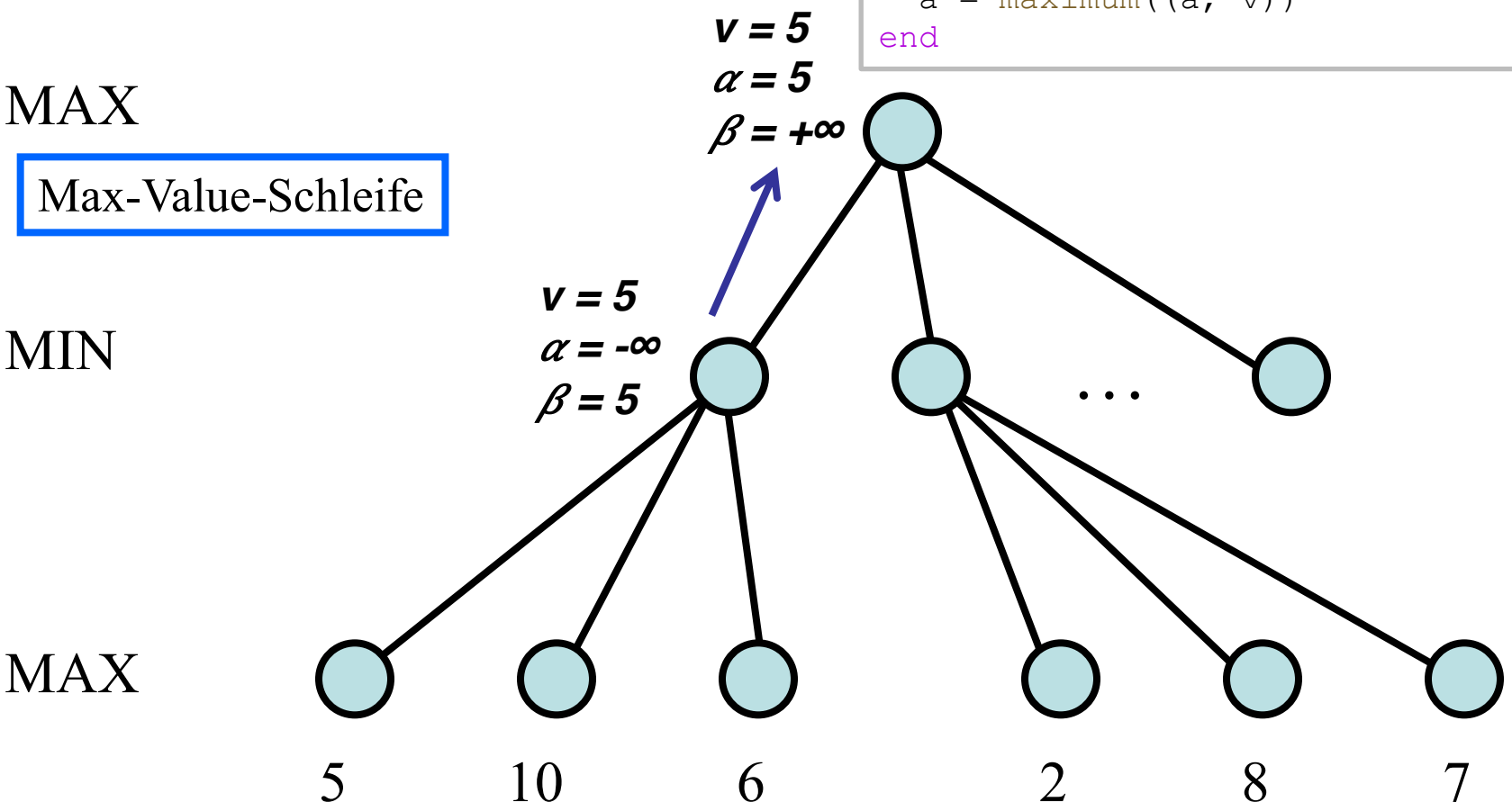
```
v = typemax(Int)
for s in state.subseq_s
  v = minimum(( v, max_value(s, a, b)))
  if v <= a   break end
  b = minimum((b, v))
end
```



α-β-Suchalgorithmus

In Max-Value:

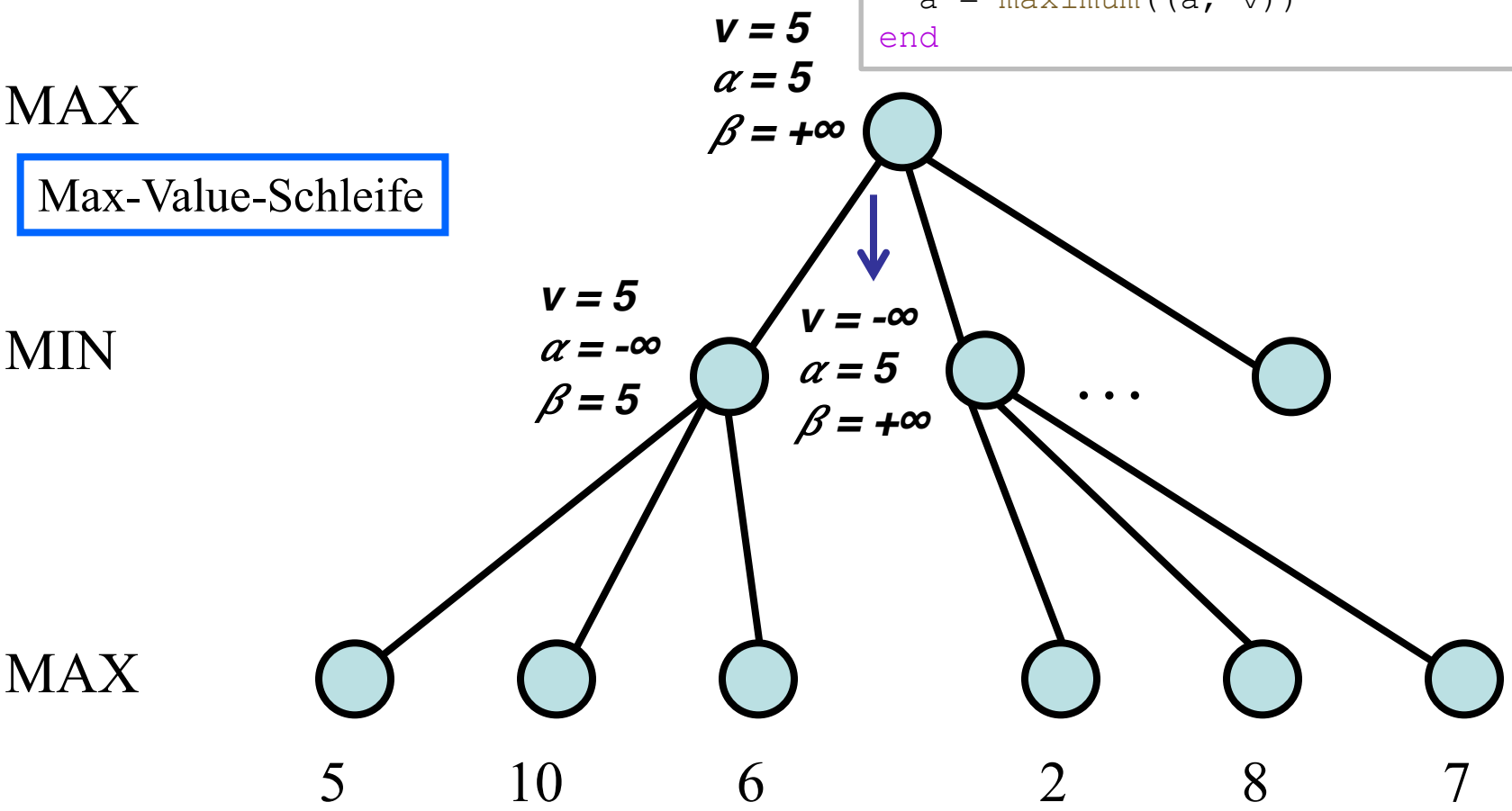
```
v = typemin(Int)
for s in state.subseq_s
  v = maximum(( v, min_value(s, a, b)))
  if v >= b   break end
  a = maximum((a, v))
end
```



α-β-Suchalgorithmus

In Max-Value:

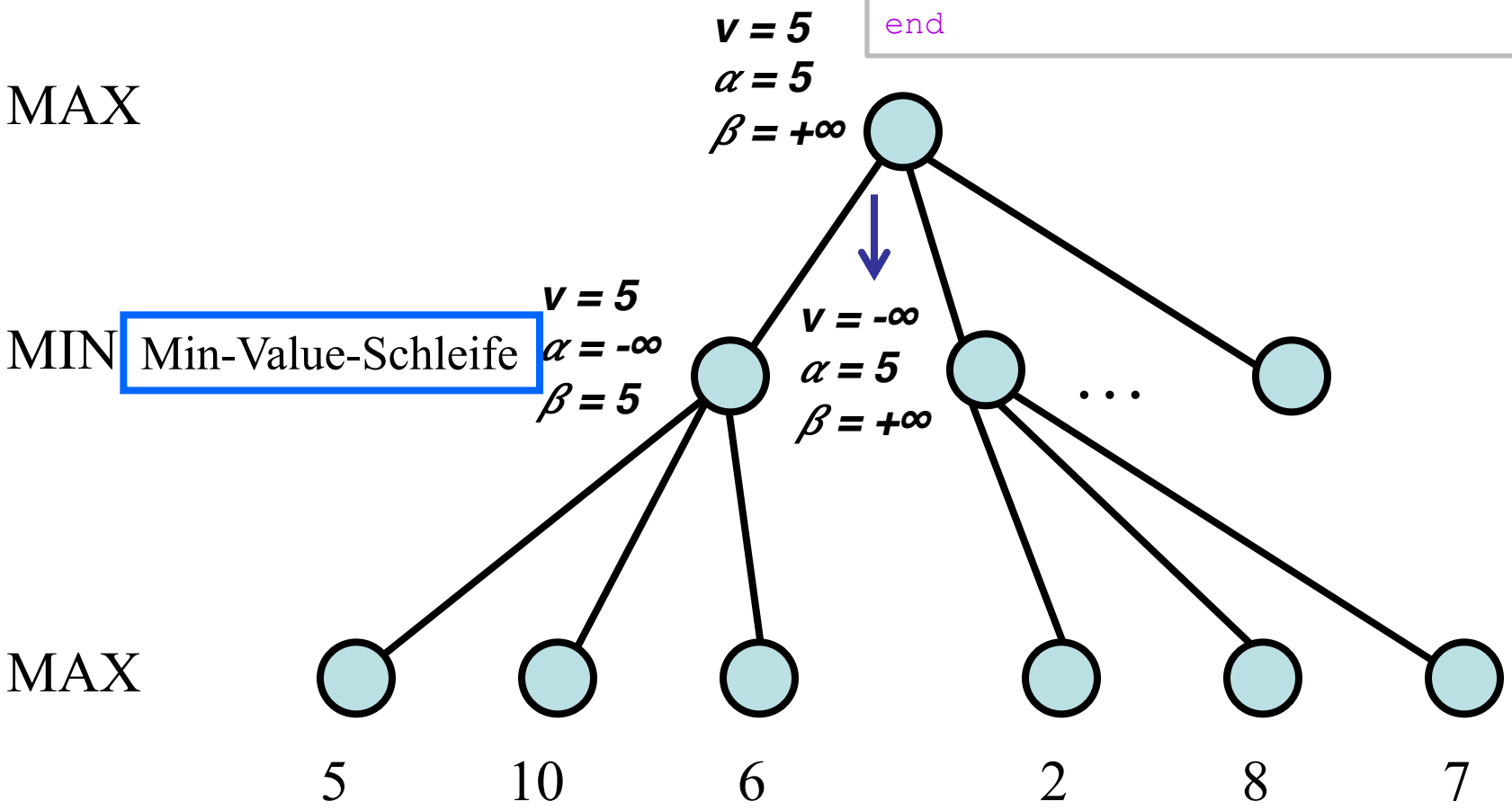
```
v = typemin(Int)
for s in state.subseq_s
  v = maximum(( v, min_value(s, a, b)))
  if v >= b   break end
  a = maximum((a, v))
end
```



α-β-Suchalgorithmus

In Min-Value:

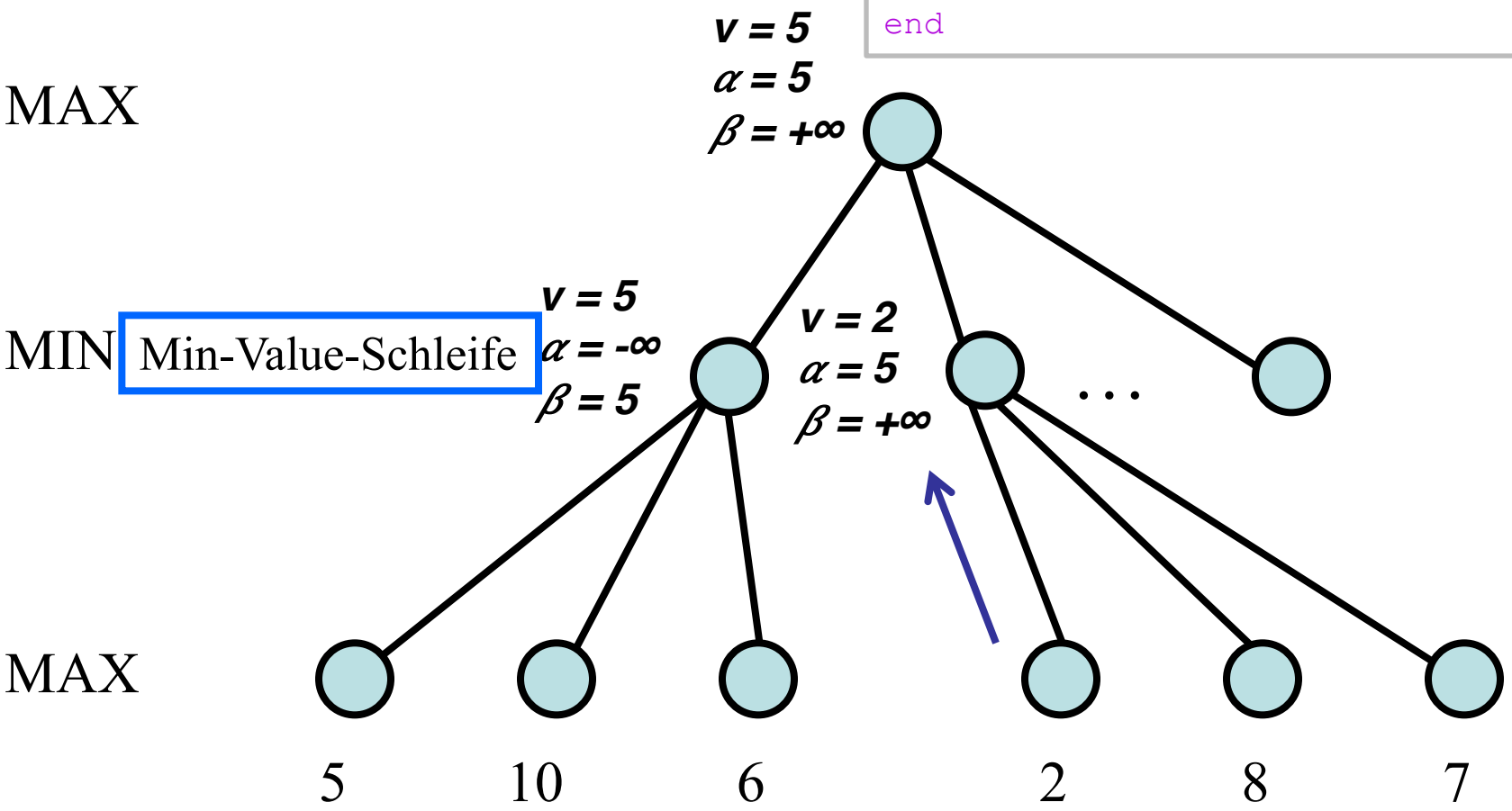
```
v = typemax(Int)
for s in state.subseq_s
  v = minimum(( v, max_value(s, a, b)))
  if v <= a   break end
  b = minimum((b, v))
end
```



α-β-Suchalgorithmus

In Min-Value:

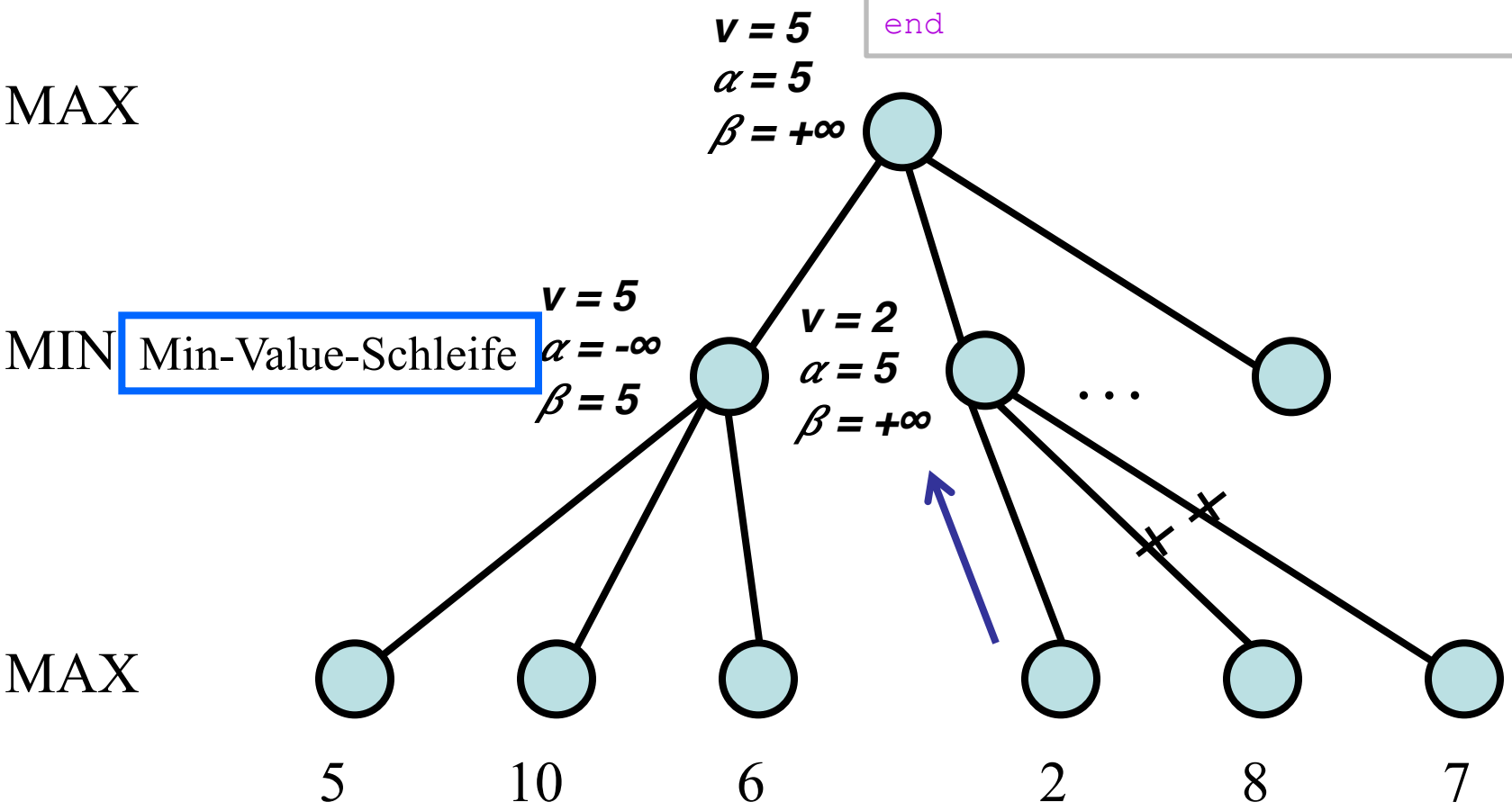
```
v = typemax(Int)
for s in state.subseq_s
  v = minimum(( v, max_value(s, a, b)))
  if v <= a   break end
  b = minimum((b, v))
end
```



α-β-Suchalgorithmus

In Min-Value:

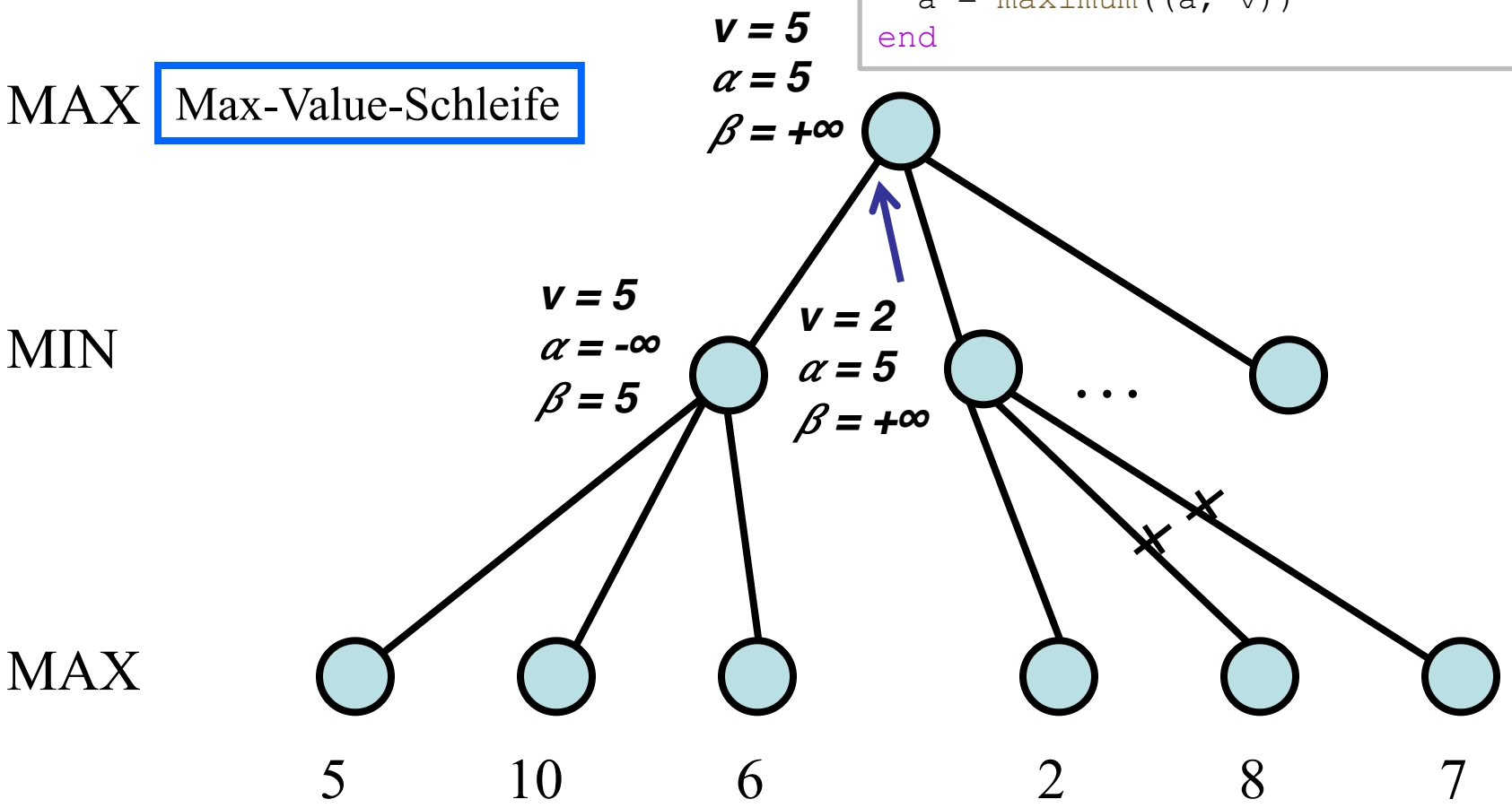
```
v = typemax(Int)
for s in state.subseq_s
  v = minimum(( v, max_value(s, a, b)))
  if v <= a   break end
  b = minimum((b, v))
end
```



α-β-Suchalgorithmus

In Max-Value:

```
v = typemin(Int)
for s in state.subseq_s
  v = maximum(( v, min_value(s, a, b)))
  if v >= b   break end
  a = maximum((a, v))
end
```



α-β-Suchalgorithmus: Eigenschaften

- Pruning hat keinen Einfluss auf das Endergebnis!!!
- Eine gute Reihenfolge der Betrachtung möglicher Züge erhöht die Effektivität vom Pruning
- Mit *perfekter Ordnung,* Zeitkomplexität = $O(b^{m/2})$
  - Empirisch ermittelt
  - Verdopplung der Suchtiefe
  - Gute Heuristik zur Ordnung nötig
  - Tiefe 8 erreichbar => guter Schachspieler

2. Zugbewertung ohne erschöpfende Suche

- Der Minimax-Algorithmus generiert den vollständigen Spielsuchraum, während der α-β–Algorithmus große Teile davon abschneidet (ohne die beste Lösung zu verlieren)
- Trotzdem: Vollständige Suche meist zu aufwendig
- Idee: Propagierung von unten nach oben durch Anwendung einer Bewertungsfunktion ersetzen
- **Bewertungsfunktion:** Evaluiert den Wert von Zuständen durch Heuristiken und beschneidet dadurch auch den Suchraum

- **New MINIMAX:**
  - CUTOFF-TEST: Ersetzt die Terminierungsbedingung
  - EVAL: Bewertungsfunktion als Ersatz für die Nützlichkeitsfunktion

Bewertungsfunktion: Beispiel

- Merkmalsberechnungen (z.B. Anzahl der Bauern, Türme, ...)
- Es ergeben sich Kategorien mit Gewinn, Verlust, Unentschieden
- Für jede Merkmalskombination werden die Gewinnchancen abgeschätzt
- Beispiel für eine Merkmalskombination:
  72% Gewinn (+1), 20% Verlust (-1), 8% Unentschieden (0)
- Erwarteter Nutzen:
  $(0{,}72 \cdot (+1)) + (0{,}20 \cdot (-1)) + (0{,}08 \cdot 0) = 0{,}52$

Bewertungsfunktion: Beispiel

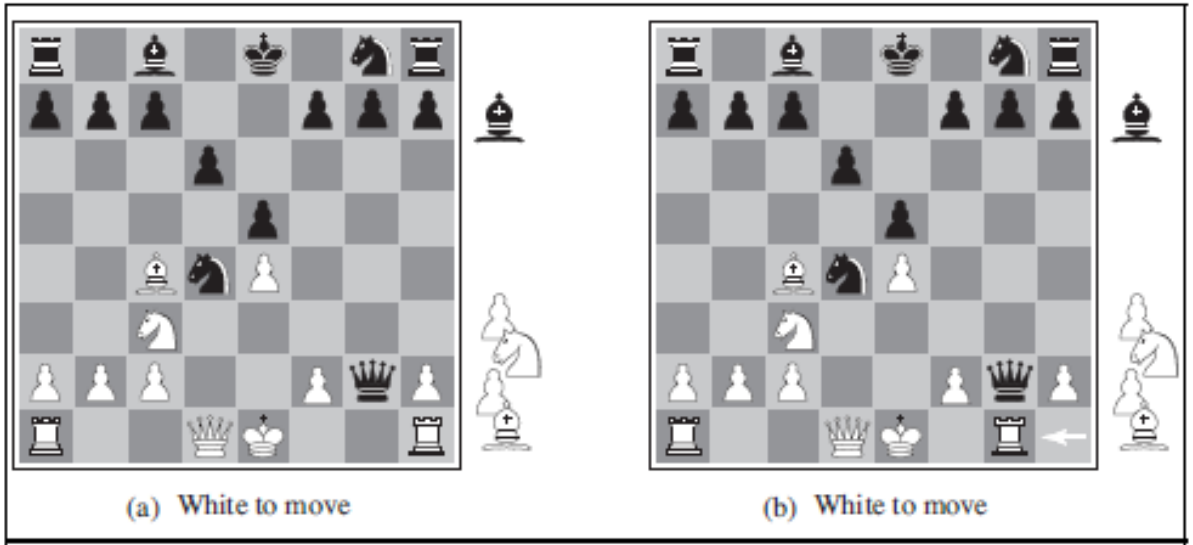


Figure 5.8 **FILES: figures/chess-evaluation3.eps (Tue Nov 3 16:22:33 2009).** Two chess positions that differ only in the position of the rook at lower right. In (a), Black has an advantage of a knight and two pawns, which should be enough to win the game. In (b), White will capture the queen, giving it an advantage that should be strong enough to win.

- **Gewichtete Linearkombination:** Kombination von mehreren Heuristiken

$$f = w_1 f_1 + w_2 f_2 + \ldots + w_n f_n$$

- Beispiel: f_1= Bewertung #Bauern, f_2 = Bewertung #Türme, …
  w_1 = Gewicht #Bauern, w_2 = Gewicht #Türme
  (Gewichte können von der Suchtiefe abhängen)

Max-Value mit CUTOFF und EVAL

```
function max_value(state, alpha, beta, depth)
  if cutoff_test(state, depth)
    return eval(state)
  end

  v = typemin(Int)
  for s in state.subseq_s
    v = maximum((v,
          min_value(s, alpha, beta, depth+1)))
    if v >= beta
      break
    end
    alpha = maximum((alpha, v))
  end
  state.alpha = alpha
  state.beta = beta
  state.v = v
  return v
end
```

Minimax mit CUTOFF: Brauchbarer Algorithmus?

MinimaxCUTOFF is identisch zu MinimaxVALUE außer

1. IS-TERMINAL wird ersetzt durch CUTOFF-TEST
2. VALUE wird ersetzt durch EVAL

Funktioniert das in der Praxis?

$b^m = 10^6$, $b = 35$ ➔ $m = 4$

Annahme: 100 Sekunden Rechenzeit werden pro Zug verwendet und wir können 10^4 Knoten/s bewerten; dann können wir 10^6 Knoten/Zug durchrechnen

4 Halbzüge Vorausschau: Anfängerniveau

8 Halbzüge Vorausschau: meisterhaft

12 Halbzüge Vorausschau: großmeisterhaft (~DeepBlue)

Meister durch Computer geschlagen im Jahr…

- Dame: 1994
- Schach: 1997
- Go: 2016

Bemerkung zur Eingabe bei Graphproblemen

- Wir haben z.B. erkannt, dass für einen Graphen $G=(V, E)$ mit $n = |V|$ und $m = |E|$ gilt:
  - $T_{Tiefensuche} \in O(n+m)$
  - $T_{Dijkstra} \in O(n \log n + m)$ mit Fibonacci-Heaps
  - Folgerung: Kürzeste-Wege-Optimierungsprobleme sind linear bzw. linear-logarithmisch lösbar (pseudolinear)
- Bei Spielsuchverfahren (oder auch A*) können wir den Graphen nicht sinnvoll vorher "erzeugen" und als Eingabe verwenden
  - Eingabe ist nur der Startknoten (Startzustand) plus Funktion zur Erzeugung von Knotennachfolgern (nächste Zustände)
    - Vgl. A*: edges_out muss Kanten dynamisch berechnen → n steigt ggf. exponentiell
  - Wir haben Verzweigungen im Suchraum: Probleme sind mit exponentiellem Aufwand lösbar
  - Folgerung: Grenzen des Einsatzes von Computern erkennbar