Algorithmen und Datenstrukturen

Algorithmik zur Lösung schwerer Probleme

Prof. Dr. Ralf Möller

Universität zu Lübeck

Institut für Informationssysteme

Magnus Bender (Übungen)

sowie viele Tutoren

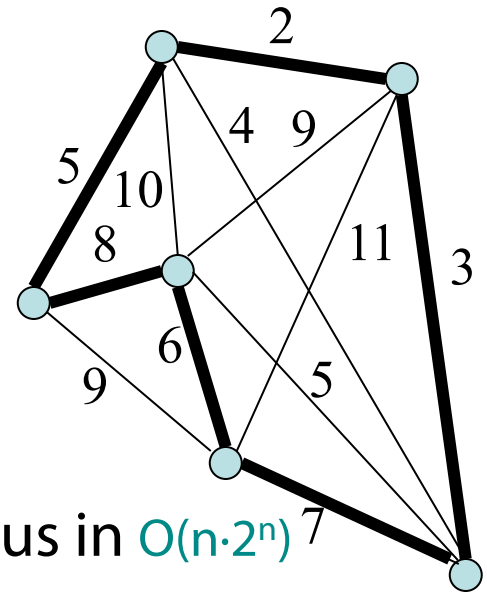
Bisher betrachtet...

- Algorithmen für verschiedene Probleme
  - Sortierung, kürzeste Wege, maximale Flüsse usw.
  - Laufzeiten $O(n^2)$, $O(n \log n)$, $O(n)$ etc., $O(n^2) \supseteq O(n \log n) \supseteq O(n)$ also polynomiell bzw. linear zur Größe der Eingabe.
- Probleme, für die Algorithmen existieren mit Zeitfunktion in $O(n^k)$, mit $k \geq 0$, heißen traktabel
- Können wir alle (oder die meisten) Probleme in polynomieller Zeit lösen? Denke an Packprobleme (0-1-Rucksack)
- Nein. Es gibt intraktable oder schwere Probleme
  - Es gibt „schwere Probleme“, die sich bisher nicht in Polynomialzeit lösen lassen.
  - Gibt es „schwere Probleme“, die sich sicher nicht in Polynomialzeit lösen lassen?

Ja

TSP: Beispiel für ein schweres Problem

- Problem des Handlungsreisenden (Traveling Salesman Problem, TSP)
  - Eingabe: Ungerichteter Graph mit Längen als Beschriftungen für Kanten
  - Ausgabe: Kürzeste Tour, auf der alle Knoten genau einmal vorkommen



- Entscheidungsproblem k-TSP: Gibt es Tour mit Kantenkosten ≤k?
- Bester bekannter vollständiger Algorithmus in $O(n \cdot 2^n)$
- Das Problem muss z.Zt. als intraktabel klassifiziert werden
- Interessant: Geg. Lösung (Tour ≤k) polynomiell verifzierbar!
- Also: Raten und polynomiell verifizieren
- Von k-TSP zu TSP? Finde größtes k für k-TSP. Maximales k?

Kantengewichte = 1: Hamilton-Kreis

Probleme und deren Lösung

- Ein Problem ist eine Menge von Tupeln jeweils mit der Struktur (*Eingabe*, *Ausgabe*)
  - Beispiele:
    - Add = { ((1, 1), 2), ... ((11, 2), 13) ... }
    - 42-TSP = { (G_1, ja), (G_2, ja), ... (G_{100011}, ja), ... }

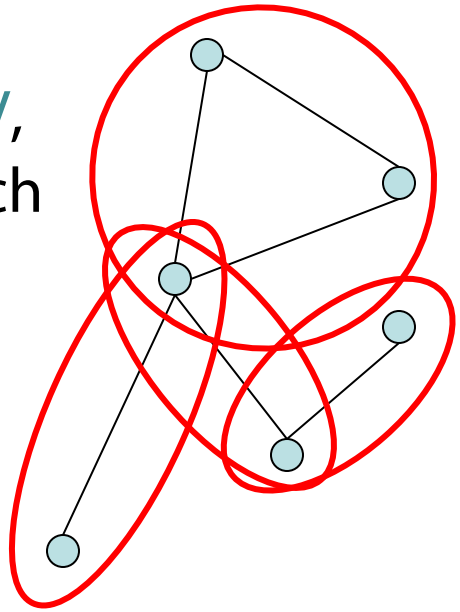
- Ein Problem kann auf verschiedene Weise (endlich) beschrieben/spezifiziert sein
- Lösung zu einem Problem geg. durch Menge von Probleminstanzen
- Problem lösen: Menge M durch Algorithmus „berechnen“
  - Entscheidungsproblem: Algorithmus realisiert Element-Test in M
  - Berechnungsproblem:
    Algorithmus sucht in M Tupel mit Schlüssel „Eingabe“ (first)
- Wir können Probleme (oder deren Spezifikation) in Mengen zusammenfassen (sog. Problemklassen)

Nichtdeterminismus? Wozu dient das?

- Betrachte: Entscheidungsprobleme
  - Antwort: Ja oder Nein
- Sei **P** die Menge der Probleme (Problemklasse), die in polynomieller Zeit berechenbar sind
- **NP** (nichtdeterministisch polynomielle Zeit) ist die Menge von Problemen, die durch einen nichtdeterministischen Computer in Polynomialzeit gelöst werden können
  - Vorstellung: Wenn eine Lösung in einem Suchraum existiert, kann sie geraten werden
  - Validierung einer vorgeschlagenen Lösung polynomiell

Ein weiteres schweres Problem

- (Maximales-)Cliquen-Problem (Clique)
  - Eingabe: Ungerichteter Graph G=(V,E)
  - Ausgabe: Größte Untermengen C von V, so dass jedes Paar von Knoten in C durch eine Kante aus E verbunden ist
  - Eine solche Menge heißt Clique
  - Bester bekannter Algorithmus für dieses Problem ist in $O(n \cdot 2^n)$



- Entscheidungsproblem (k-Clique): Gibt es Clique $C \subseteq V$ mit $|C| \geq k$?
- Allgemein: Finde maximales k (Clique)

P und NP

P = Menge der Probleme, die in polynomieller Zeit zu lösen sind

NP = Menge der Probleme für die ”geratene” Lösungen in polynomieller Zeit verifiziert werden können

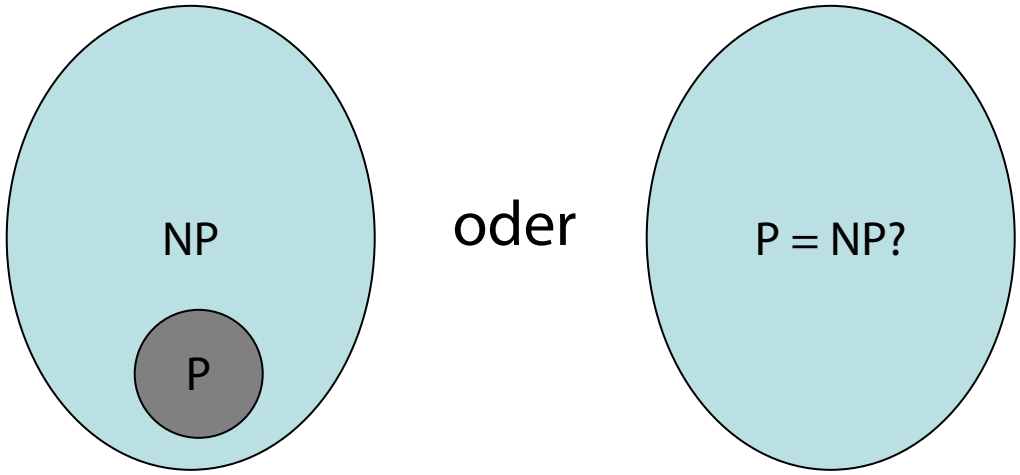
- K-Clique-Problem ist in NP (und damit Clique):
- K-TSP-Problem ist in NP (und damit TSP)
- Ist Sortierung in NP?
  - Kein Entscheidungsproblem
- Also vielleicht: Sortiertheit in NP?
  - Ja, leicht zu verifizieren, man braucht gar nicht zu raten
  - Sortiertheit ist sogar in P
- **P ⊆ NP**

Schwere bzw. intraktable Probleme: NP

- Besseren Algorithmus suchen?
  - Haben viele schlaue Leute schon >60 Jahre lang versucht
- Beweisen, dass es keinen polynomiellen Algorithmus geben kann
  - Haben viele schlaue Leute schon >60 Jahre lang versucht
- Zeigen, dass alle schweren Probleme in gewisser Weise äquivalent sind, d.h., kann man eins in $O(n^k)$ (k fix) lösen, kann man alle anderen auch in $O(n^{k'})$ für fixes k' lösen
  - Hat schon jemand erreicht (Karp 1972)
  - Funktioniert für mindestens 10.000 schwere Probleme

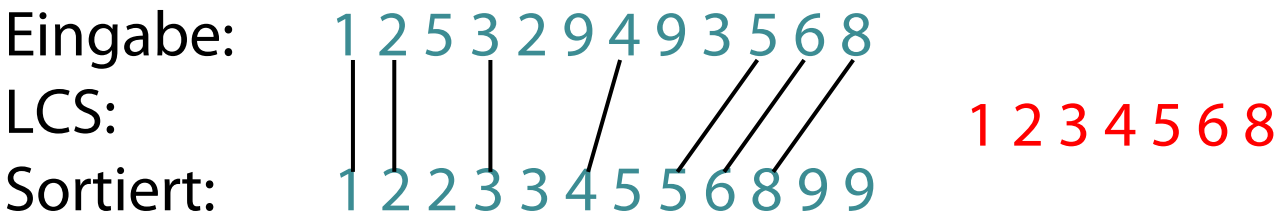
P und NP

- Ist **P = NP?**
  - Eines der großen offenen Probleme in der Informatik
  - Es wird angenommen, dass das nicht gilt
  - Das Clay Mathematics Institute [claymath.org] bietet $1 Million für den ersten Beweis (viele Versuche gescheitert, wegen Fehler im Beweis)



Recap: Longest-Increasing-Subsequence-Problem

- Gegeben sei eine Liste von Zahlen
  1 2 5 3 2 9 4 9 3 5 6 8
- Finde ***längste*** Teilsequenz, in der keine Zahl kleiner ist als die vorige
  - Beispiel: 1 2 5 9 (Teilsequenz, aber nicht maximal lang)
  - Teilsequenz der originalen Liste
  - Die Lösung ist Teilsequenz der sortierten Liste



Reduktion von Problemen aufeinander

- Beispiel: Reduktion von LIS auf LCS ist in $O(n \log n)$
  - (Warum $O(n \log n)$?)

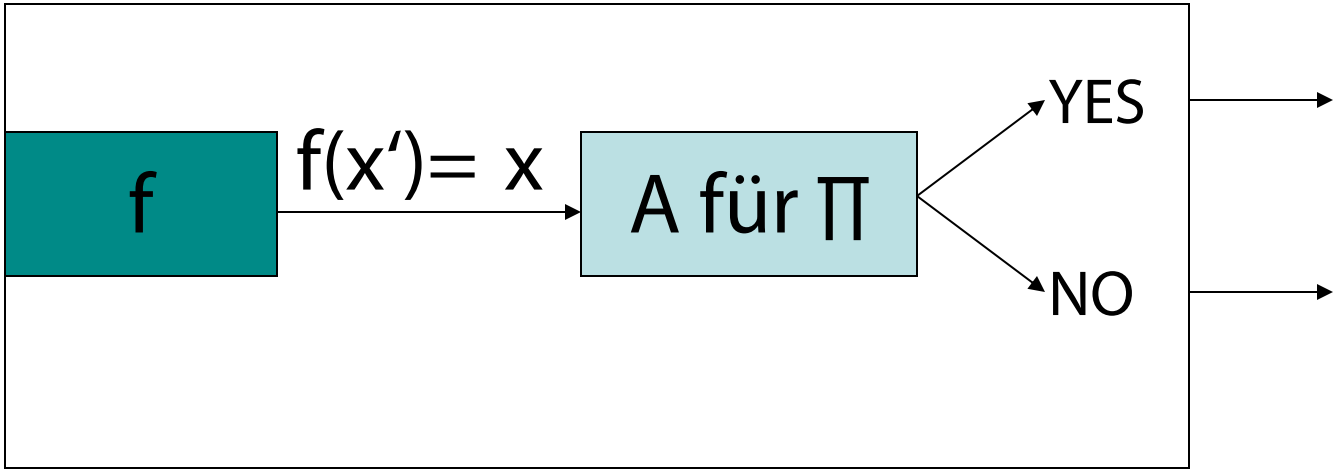
- Reduktion von Π' auf Π in Polynomialzeit, also mit einem Verfahren in $O(n^k)$, wobei k fix ist

- Π kann nicht einfacher sein als Π' !
  - LCS kann nicht einfacher sein als LIS

- Übertragbar auch für intraktable Probleme (Probleme in NP)

Reduktionen: Π’ nach Π

Reduktionen: Π’ nach Π



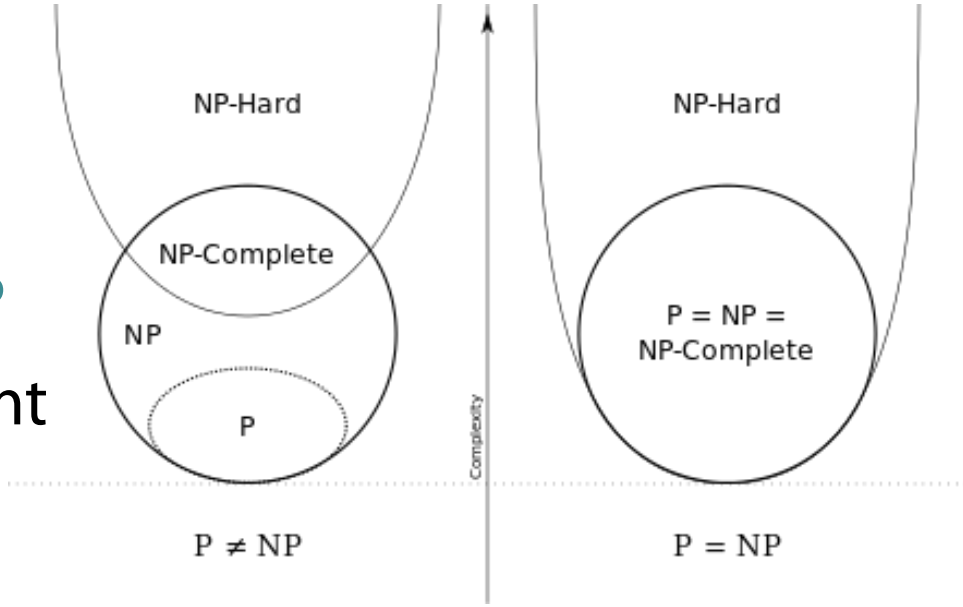
NP-Schwere (NP hardness)

- Wenn gezeigt werden kann, dass *alle* Probleme Π' in NP in Polynomialzeit auf ein gegebenes Problem Π reduziert werden kann, dann heißt Π NP-schwer
  - Π kann natürlich noch schwerer sein (z.B. definitiv nur mit exponentiellem Aufwand lösbar sein – kein Raten möglich)
  - Manche sagen auch NP-schwierig
  - Vielfach findet man auch NP-hart als direkte Übersetzung aus dem Englischen (NP hard)
- Wenn Π in NP, dann ist Π gewissermaßen eines der schwersten Probleme in NP
- NP-schwere Probleme, die in NP sind, heißen NP-vollständig

P = NP?

- Wenn eines der schwersten Probleme in NP in Polynomialzeit gelöst werden kann, dann jedes in NP (P = NP)
- Also unser Plan: Löse ein NP-vollständiges Problem z.B. in $O(n^{100})$ und du hast gezeigt, dass P=NP

→ Setz dich reich und berühmt zur Ruhe



Reduktion: Beispiel

- Gegeben: Aussagenlogische Formel wie z.B.

$$\underbrace{(q \vee \neg r \vee s)}_{\text{Klausel}} \wedge \underbrace{(\neg q)}_{\text{Klausel}} \wedge \underbrace{(\neg r \vee \neg s)}_{\text{Klausel}}$$

- Wiederholung:
  - Jede Formel φ kann in konjunktive Normalform (KNF) transformiert werden, ohne dass sich der Wahrheitswert ändert
  - KNF ist Konjunktion von Klauseln, wobei eine Klausel eine Disjunktion von Literalen ist
    - Ein Literal ist eine boolesche Variable oder ihre Negation
  - Z.B. $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg D)$ ist in KNF
    $(A \vee B) \vee (\neg A \wedge C \vee D)$ ist nicht in KNF

Reduktion: Beispiel

- Gegeben: Aussagenlogische Formel wie z.B.

$$\underbrace{(q \vee \neg r \vee s)}_{\text{Klausel}} \wedge \underbrace{(\neg q)}_{\text{Klausel}} \wedge \underbrace{(\neg r \vee \neg s)}_{\text{Klausel}}$$

- Transformation auf lineares Gleichungssystem mit Variablen aus dem Bereich Integer
  - Integer-Variablen x_p für alle booleschen Variablen p
  - Gleichungsystem:

    $0 \leq x_p \leq 1$ für alle booleschen Variablen p

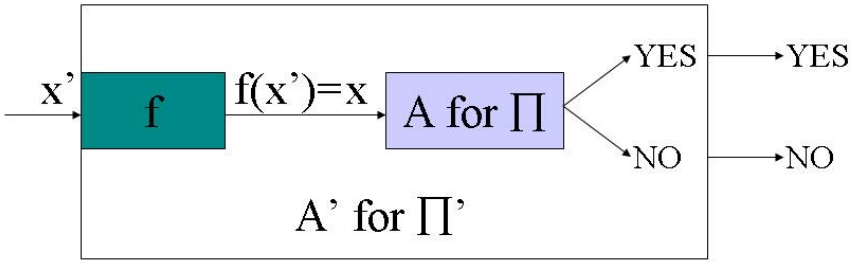
    $x_q + (1 - x_r) + x_s \geq 1$

    $(1 - x_q) \geq 1$

    $(1 - x_r) + (1 - x_s) \geq 1$

Transformations-funktion f in O(n)

Reduktionen



- Π' ist Polynomialzeit-reduzierbar auf Π ($\Pi' \leq_p \Pi$) genau dann, wenn es eine polynomielle Funktion f zur Abbildung von Eingaben x' für Π' in Eingaben x für Π, so dass für jedes x' gilt, dass

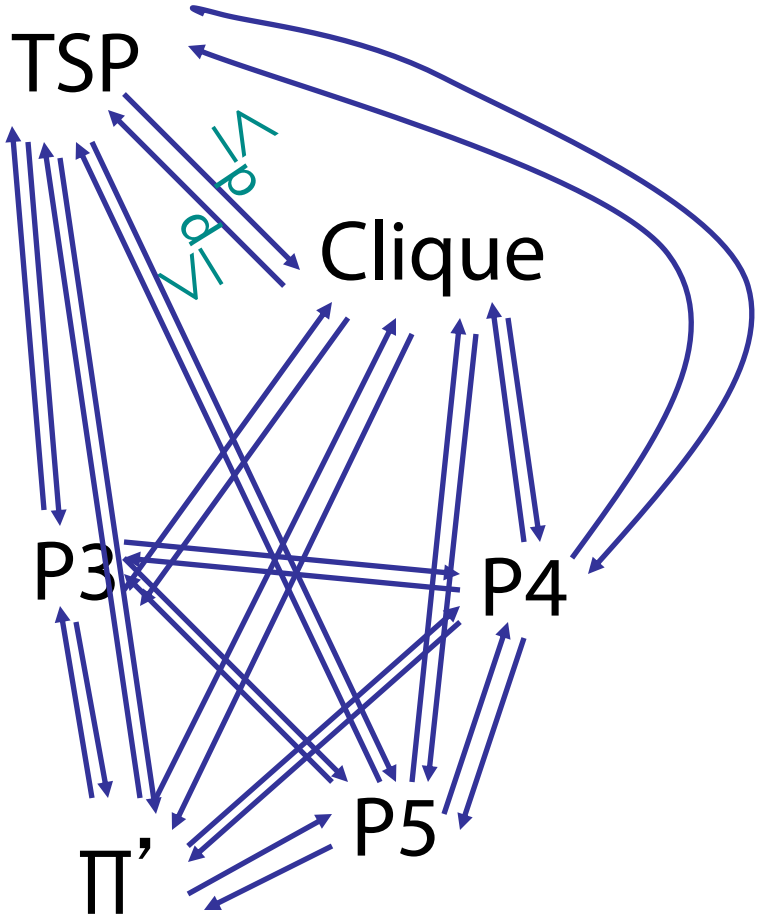
$$\Pi'(x') = \Pi(f(x'))$$

- Falls $\Pi \in P$ und $\Pi' \leq_p \Pi$ dann $\Pi' \in P$ (Warum?)
- Falls $\Pi \in NP$ und $\Pi' \leq_p \Pi$ dann $\Pi' \in NP$ (Warum?)
- Falls $\Pi'' \leq_p \Pi'$ und $\Pi' \leq_p \Pi$ dann $\Pi'' \leq_p \Pi$ (Warum?) (Transitivität)

Äquivalenz zwischen schweren Problemen

Optionen

- Zeige Reduktionen zwischen allen Paaren von Problemen

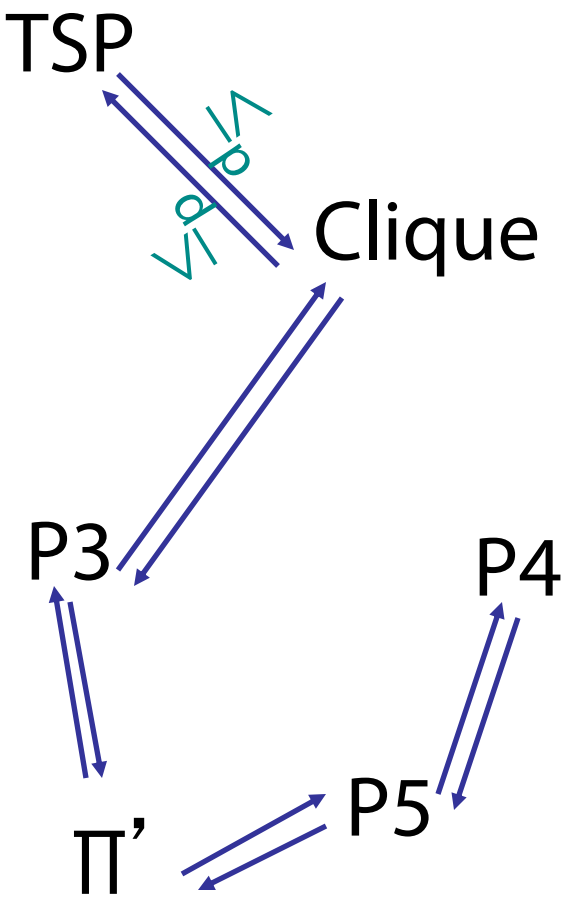


Äquivalenz zwischen schweren Problemen

Optionen

- Zeige Reduktionen zwischen allen Paaren von Problemen
- Reduziere die Anzahl von Reduktionen durch Verwendung der Transitivität von $\leq_p$

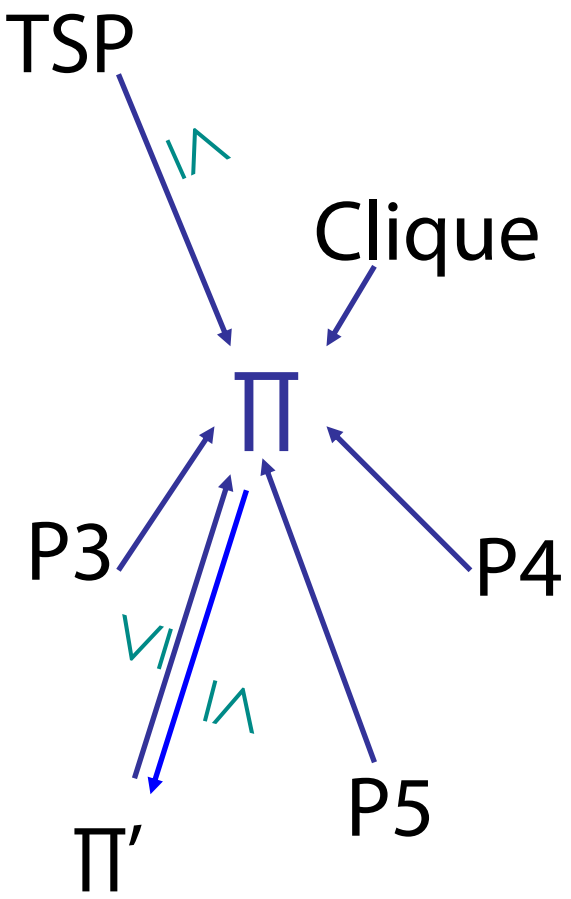
Minimaler Spannbaum reicht



Äquivalenz zwischen schweren Problemen

Optionen

- Zeige Reduktionen zwischen allen Paaren von Problemen
- Reduziere die Anzahl von Reduktionen durch Verwendung der Transitivität von $\leq_p$
- Zeige Reduzierbarkeit aller Probleme in NP auf festes Π in NP
- Um zu zeigen, dass ein Problem Π in NP ist, argumentieren wir direkt oder wir zeigen, dass $\Pi \leq_p \Pi'$ für ein bekanntes Problem Π', von dem wir schon wissen, dass es in NP liegt

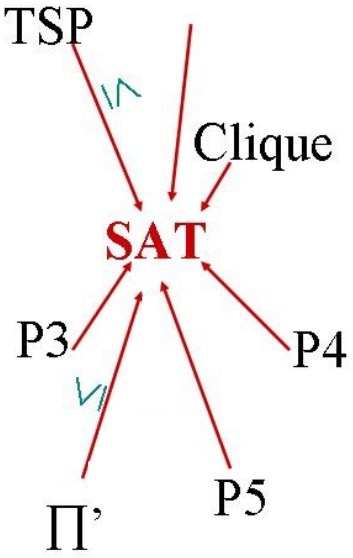


Karp, Richard M. "Reducibility Among Combinatorial Problems". In Raymond E. Miller and James W. Thatcher (editors). Complexity of Computer Computations, New York: Plenum. pp. 85–103, **1972**

Das zentrale Problem ∏ heißt SAT

- Boolesche Erfüllbarkeit für aussagenlogische Formeln (SAT):
  - Eingabe: Eine Formel φ mit m Klauseln über n Variablen
    Ausgabe: Ja, falls es eine Zuweisung TRUE/FALSE auf die Variablen gibt, so dass die Formel φ erfüllt ist

SAT



- Theorem [Cook'71]: Für jedes $\Pi' \in NP$, gilt $\Pi' \leq_p SAT$ (hier ohne Beweis)
  - SAT ist NP-schwer
- $SAT \in NP$ (leicht zu sehen)
  - SAT ist NP-vollständig

Cook, Stephen. The complexity of theorem proving procedures. Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing. pp. 151–158. **1971**

Karps 21 NP-vollständige Probleme (1972)

SATISFIABILITY: das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik für Formeln in Konjunktiver Normalform

CLIQUE: Cliquenproblem

SET PACKING: Mengenpackungsproblem

VERTEX COVER: Knotenüberdeckungsproblem

- SET COVERING: Mengenüberdeckungsproblem
- FEEDBACK ARC SET: Feedback Arc Set
- FEEDBACK NODE SET: Feedback Vertex Set
- DIRECTED HAMILTONIAN CIRCUIT: siehe Hamiltonkreisproblem
  - UNDIRECTED HAMILTONIAN CIRCUIT: siehe Hamiltonkreisproblem

0-1 INTEGER PROGRAMMING: siehe Integer Linear Programming

3-SAT: siehe 3-SAT

CHROMATIC NUMBER: graph coloring problem

- CLIQUE COVER: Cliquenproblem
- EXACT COVER: Problem der exakten Überdeckung
  - 3-dimensional MATCHING: 3-dimensional matching (Stable Marriage mit drei Geschlechtern)
  - STEINER TREE: Steinerbaumproblem
  - HITTING SET: Hitting-Set-Problem
  - KNAPSACK: 0-1-Rucksackproblem
    - JOB SEQUENCING: Job sequencing
    - PARTITION: Partitionsproblem

MAX-CUT: Maximaler Schnitt

Maximaler, nicht minimaler Schnitt

Seit 1972 wurden mehr als 10000 Probleme als NP-vollständig charakteristiert

Wie mit harten Problemen umgehen?

- Average-Case-Complexity
- Brute Force
- Parametrisierte Komplexität
- Approximation

SAT

- Referenzproblem
- Algorithmische Lösungen für spezielle Eingaben von SAT sind auch für die Lösung anderer Probleme sehr interessant
- Neue Entwurfsmuster für Algorithmen erweitern Ihren Erfahrungsschatz

DPLL-Prozedur: Hauptidee

$$\{\, p \vee q, \neg w \vee \neg q, q \vee \neg r \vee s,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r \vee \neg s, p, \neg w \vee \neg s \,\}$$

⇩ **Pure Literal?**

$$\{\, p \vee q,\ q \vee \neg r \vee s,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r \vee \neg s,\ p \,\}$$

Entwurfsmuster:

- Identifiziere „leichte“ Teile der Eingabe
- Löse die leichten Teile zur Verkleinerung der Eingabe

Davis, Martin; Putnam, Hilary. A Computing Procedure for Quantification Theory. Journal of the ACM 7 (3): 201–215, **1960**

Davis, Martin; Logemann, George; Loveland, Donald. A Machine Program for Theorem Proving. Communications of the ACM 5 (7): 394–397, **1962**

DPLL-Prozedur: Hauptidee

$$\{\ p \vee q,\ q \vee \neg r \vee s,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r \vee \neg s,\ p\ \}$$

Propagierung ⇩ **Zuweisung**: $p = \mathbf{T}$

$$\{\ q \vee \neg r \vee s,\ \neg q,\ \neg r \vee \neg s\ \}$$

Entwurfsmuster:

- Identifiziere Teile der Eingabe ohne Wahlpunkte
- Propagiere Folgerungen
  zur Verkleinerung der Eingabe

DPLL-Prozedur: Hauptidee

$$\{\ p \vee q,\ q \vee \neg r \vee s,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r \vee \neg s,\ p\ \}$$

Propagierung ⇓ **Zuweisung**: $p = \mathbf{T}$

$$\{\ q \vee \neg r \vee s,\ \neg q,\ \neg r \vee \neg s\ \}$$

⇓ **Zuweisung**: $q = \mathbf{F}$

$$\{\ \neg r \vee s,\ \neg r \vee \neg s\ \}$$

DPLL-Prozedur: Hauptidee

$$\{\ p \vee q,\ q \vee \neg r \vee s,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r \vee \neg s,\ p\ \}$$

Propagierung ⇩ **Zuweisung**: $p = \mathbf{T}$

$$\{\ q \vee \neg r \vee s,\ \neg q,\ \neg r \vee \neg s\ \}$$

⇩ **Zuweisung**: $q = \mathbf{F}$

$$\{\ \neg r \vee s,\ \neg r \vee \neg s\ \}$$

⇩ **Rate**: $r = \mathbf{T}$

$$\{\ s,\ \neg s\ \}$$

Eigentlich:
Pure Literal

DPLL-Prozedur: Hauptidee

$$\{\ p \vee q,\ q \vee \neg r \vee s,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r \vee \neg s,\ p\ \}$$

Propagierung ⇩ **Zuweisung**: $p = \mathbf{T}$

$$\{\ q \vee \neg r \vee s,\ \neg q,\ \neg r \vee \neg s\ \}$$

⇩ **Zuweisung**: $q = \mathbf{F}$

$$\{\ \neg r \vee s,\ \neg r \vee \neg s\ \}$$

⇩ **Rate**: $r = \mathbf{T}$

$$\{\ s,\ \neg s\ \}$$

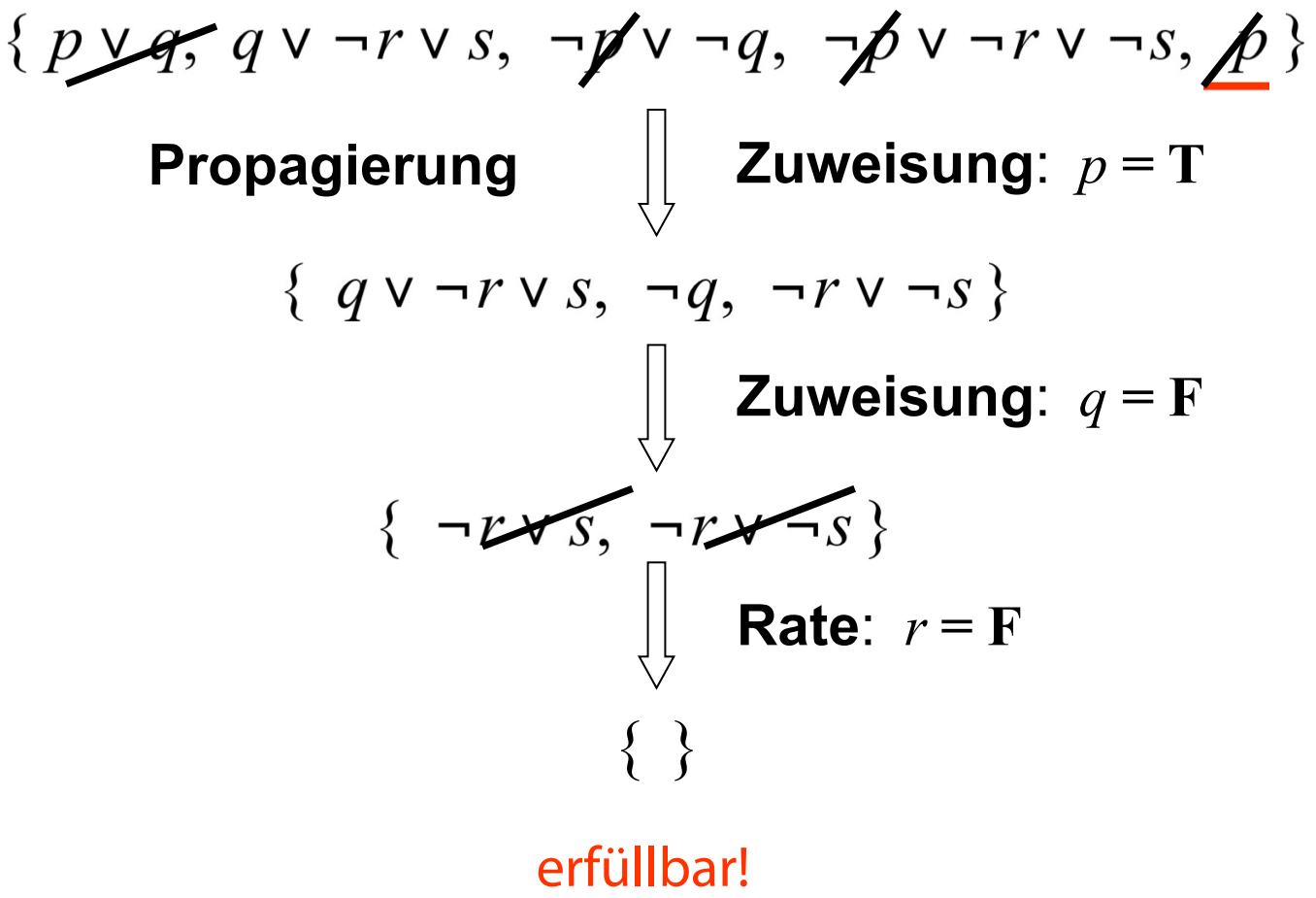
⇩

Widerspruch!

Entwurfsmuster:

- Backtracking

DPLL-Prozedur: Hauptidee



DPLL-Prozedur: Vermeidung von Widersprüchen

$$\{\ p \vee q,\ q \vee \neg r \vee s,\ \neg p \vee \neg q,\ \neg p \vee \neg r \vee \neg s,\ p\ \}$$

Propagierung ⇓ **Zuweisung**: $p = \mathbf{T}$

$$\{\ q \vee \neg r \vee s,\ \neg q,\ \neg r \vee \neg s\ \}$$

⇓ **Zuweisung**: $q = \mathbf{F}$

$$\{\ \neg r \vee s,\ \neg r \vee \neg s\ \}$$

⇓ **Rate**: $r = \mathbf{T}$

$$\{\ s,\ \neg s\ \}$$

⇓

Widerspruch!

Entwurfsmuster:

- Backtracking vermeiden

Clause Learning

- During backtrack search, for each conflict learn new clause, which explains and prevents repetition of the same conflict

$$\varphi = (\ a\ \vee b) \wedge (\neg b \vee\ \ c\ \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee\ \ f\ ) \ldots$$

Clause Learning

- During backtrack search, for each conflict learn new clause, which explains and prevents repetition of the same conflict

$$\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee f) \ldots$$

  - Assume decisions $c = \mathit{False}$ and $f = \mathit{False}$
  - Assign $a = \mathit{False}$ and imply assignments

Clause Learning

- During backtrack search, for each conflict learn new clause, which explains and prevents repetition of the same conflict

$$\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee f) \ldots$$

  - Assume decisions $c = \mathit{False}$ and $f = \mathit{False}$
  - Assign $a = \mathit{False}$ and imply assignments

Clause Learning

- During backtrack search, for each conflict learn new clause, which explains and prevents repetition of the same conflict

$$\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee f) \ldots$$

  - Assume decisions $c = \mathit{False}$ and $f = \mathit{False}$
  - Assign $a = \mathit{False}$ and imply assignments
  - A conflict is reached : $(\neg d \vee \neg e \vee f)$ is unsatisfied

Clause Learning

- During backtrack search, for each conflict learn new clause, which explains and prevents repetition of the same conflict

$$\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee f) \ldots$$

  - Assume decisions $c = \mathit{False}$ and $f = \mathit{False}$
  - Assign $a = \mathit{False}$ and imply assignments
  - A conflict is reached : $(\neg d \vee \neg e \vee f)$ is unsatisfied
  - $\varphi \wedge \neg a \wedge \neg c \wedge \neg f \Rightarrow \bot$

Clause Learning

- During backtrack search, for each conflict learn new clause, which explains and prevents repetition of the same conflict

$$\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee f) \ldots$$

  - Assume decisions $c = \mathit{False}$ and $f = \mathit{False}$
  - Assign $a = \mathit{False}$ and imply assignments
  - A conflict is reached : $(\neg d \vee \neg e \vee f)$ is unsatisfied
  - $\varphi \wedge \neg a \wedge \neg c \wedge \neg f \Rightarrow \bot$
  - $\varphi \Rightarrow a \vee c \vee f$

Clause Learning

- During backtrack search, for each conflict learn new clause, which explains and prevents repetition of the same conflict

$$\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee f) \ldots$$

  - Assume decisions $c = \mathit{False}$ and $f = \mathit{False}$
  - Assign $a = \mathit{False}$ and imply assignments
  - A conflict is reached : $(\neg d \vee \neg e \vee f)$ is unsatisfied
  - $\varphi \wedge \neg a \wedge \neg c \wedge \neg f \Rightarrow \bot$
  - $\varphi \Rightarrow a \vee c \vee f$
  - Learn new clause $(a \vee c \vee f)$

Design Pattern:

- Make insights explicit and avoid recomputation

Non-Chronological Backtracking

- During backtrack search, for each conflict backtrack to one of the causes of the conflict

$$\begin{aligned}\varphi \quad = \quad & (a \vee b) \wedge (\neg b \vee \ c \ \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee \ f \ ) \wedge \\ & (a \vee \ c \ \vee \ f \ ) \wedge (\neg a \vee g) \wedge (\neg g \vee b) \wedge (\neg h \vee j) \wedge (\neg i \vee k)\end{aligned}$$

Non-Chronological Backtracking

- During backtrack search, for each conflict backtrack to one of the causes of the conflict

$$\begin{aligned}\varphi \quad = \quad & (a \vee b) \wedge (\neg b \vee \ c \ \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee \ f \ ) \wedge \\ & (a \vee \ c \ \vee \ f \ ) \wedge (\neg a \vee g) \wedge (\neg g \vee b) \wedge (\neg h \vee j) \wedge (\neg i \vee k)\end{aligned}$$

  - Assume decisions $c = \mathit{False}$, $f = \mathit{False}$, $h = \mathit{False}$ and $i = \mathit{False}$

Non-Chronological Backtracking

- During backtrack search, for each conflict backtrack to one of the causes of the conflict

$$\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee f) \wedge (a \vee c \vee f) \wedge (\neg a \vee g) \wedge (\neg g \vee b) \wedge (\neg h \vee j) \wedge (\neg i \vee k)$$

  - Assume decisions $c = \mathit{False}$, $f = \mathit{False}$, $h = \mathit{False}$ and $i = \mathit{False}$
  - Assignment $a = \mathit{False}$ caused conflict $\Rightarrow$ learnt clause $(a \vee c \vee f)$ implies a Thus, a must be *True*

Non-Chronological Backtracking

- During backtrack search, for each conflict backtrack to one of the causes of the conflict

$$\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee f) \wedge (a \vee c \vee f) \wedge (\neg a \vee g) \wedge (\neg g \vee b) \wedge (\neg h \vee j) \wedge (\neg i \vee k)$$

  - Assume decisions $c = \mathit{False}$, $f = \mathit{False}$, $h = \mathit{False}$ and $i = \mathit{False}$
  - Assignment $a = \mathit{False}$ caused conflict $\Rightarrow$ learnt clause $(a \vee c \vee f)$ implies a Thus, a must be True

Non-Chronological Backtracking

- During backtrack search, for each conflict backtrack to one of the causes of the conflict

$$\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee f) \wedge (a \vee c \vee f) \wedge (\neg a \vee g) \wedge (\neg g \vee b) \wedge (\neg h \vee j) \wedge (\neg i \vee k)$$

  - Assume decisions $c = \mathit{False}$, $f = \mathit{False}$, $h = \mathit{False}$ and $i = \mathit{False}$
  - Assignment $a = \mathit{False}$ caused conflict $\Rightarrow$ learnt clause $(a \vee c \vee f)$ implies a Thus, a must be *True*

Non-Chronological Backtracking

- During backtrack search, for each conflict backtrack to one of the causes of the conflict

$$\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee f) \wedge (a \vee c \vee f) \wedge (\neg a \vee g) \wedge (\neg g \vee b) \wedge (\neg h \vee j) \wedge (\neg i \vee k)$$

  - Assume decisions $c = \mathit{False}$, $f = \mathit{False}$, $h = \mathit{False}$ and $i = \mathit{False}$
  - Assignment $a = \mathit{False}$ caused conflict $\Rightarrow$ learnt clause $(a \vee c \vee f)$ implies a Thus, a must be *True*
  - A conflict is again reached : $(\neg d \vee \neg e \vee f)$ is unsatisfied

Non-Chronological Backtracking

- During backtrack search, for each conflict backtrack to one of the causes of the conflict

$$\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee f) \wedge (a \vee c \vee f) \wedge (\neg a \vee g) \wedge (\neg g \vee b) \wedge (\neg h \vee j) \wedge (\neg i \vee k)$$

  - Assume decisions $c = \mathit{False}$, $f = \mathit{False}$, $h = \mathit{False}$ and $i = \mathit{False}$
  - Assignment $a = \mathit{False}$ caused conflict $\Rightarrow$ learnt clause $(a \vee c \vee f)$ implies a Thus, a must be True
  - A conflict is again reached : $(\neg d \vee \neg e \vee f)$ is unsatisfied
  - $\varphi \wedge \neg c \wedge \neg f \Rightarrow \bot$

Non-Chronological Backtracking

- During backtrack search, for each conflict backtrack to one of the causes of the conflict

$$\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee f) \wedge (a \vee c \vee f) \wedge (\neg a \vee g) \wedge (\neg g \vee b) \wedge (\neg h \vee j) \wedge (\neg i \vee k)$$

  - Assume decisions $c = False$, $f = False$, $h = False$ and $i = False$
  - Assignment $a = False$ caused conflict $\Rightarrow$ learnt clause $(a \vee c \vee f)$ implies a
  - A conflict is again reached : $(\neg d \vee \neg e \vee f)$ is unsatisfied
  - $\varphi \wedge \neg c \wedge \neg f \Rightarrow \bot$
  - $\varphi \Rightarrow c \vee f$

Non-Chronological Backtracking

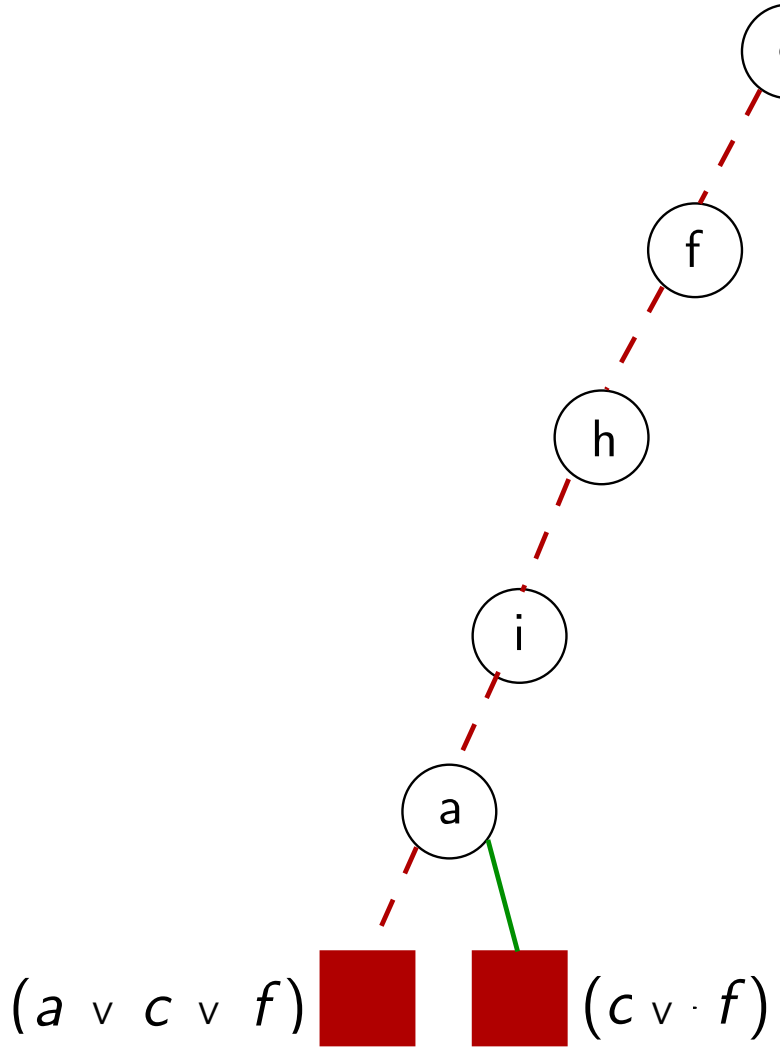
- During backtrack search, for each conflict backtrack to one of the causes of the conflict

$$\varphi = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee e) \wedge (\neg d \vee \neg e \vee f) \wedge (a \vee c \vee f) \wedge (\neg a \vee g) \wedge (\neg g \vee b) \wedge (\neg h \vee j) \wedge (\neg i \vee k)$$

  - Assume decisions $c = False$, $f = False$, $h = False$ and $i = False$
  - Assignment $a = False$ caused conflict $\Rightarrow$ learnt clause $(a \vee c \vee f)$ implies a
  - A conflict is again reached : $(\neg d \vee \neg e \vee f)$ is unsatisfied
  - $\varphi \wedge \neg c \wedge \neg f \Rightarrow \bot$
  - $\varphi \Rightarrow c \vee f$

  - Learn new clause $(c \vee f)$

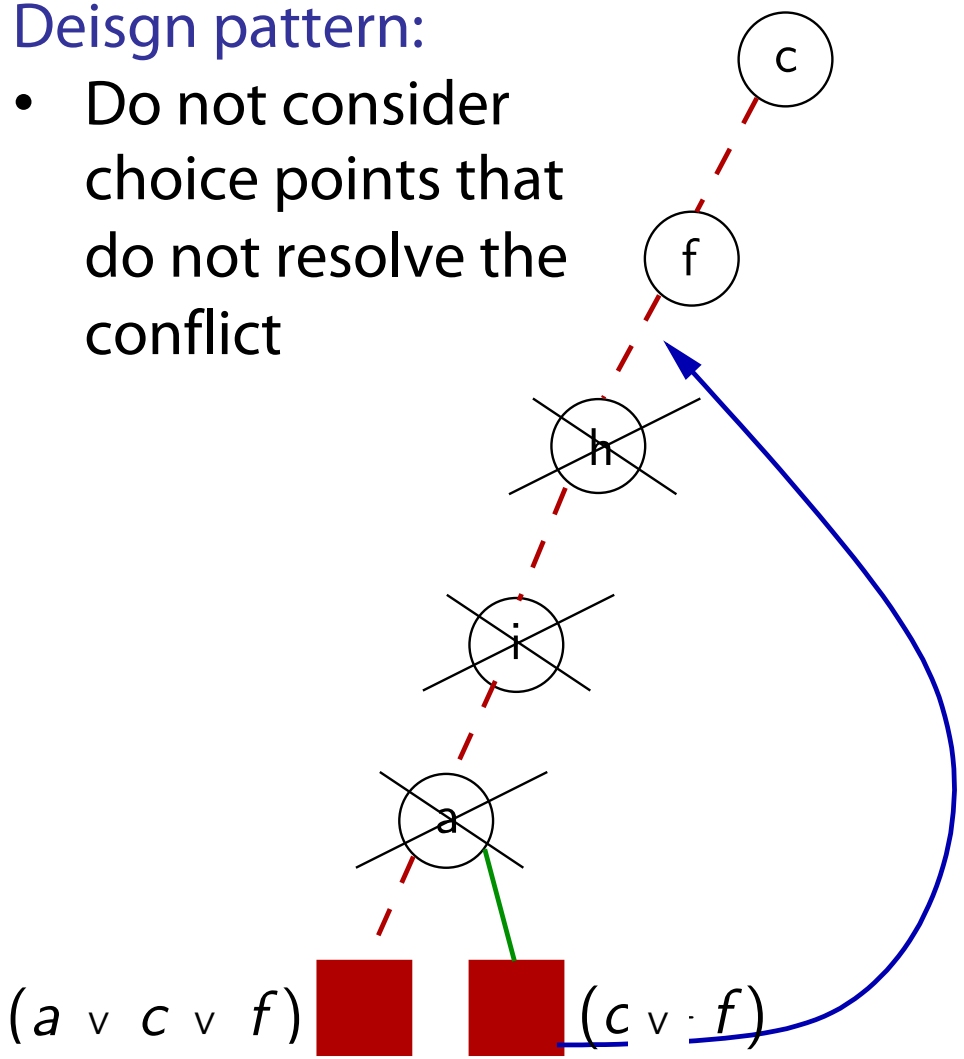
Non-Chronological Backtracking



Non-Chronological Backtracking

Deisgn pattern:

- Do not consider choice points that do not resolve the conflict



- Learnt clause : $(c \vee f)$
- Need to backtrack, given new clause
- Backtrack to most recent decision : $f = False$

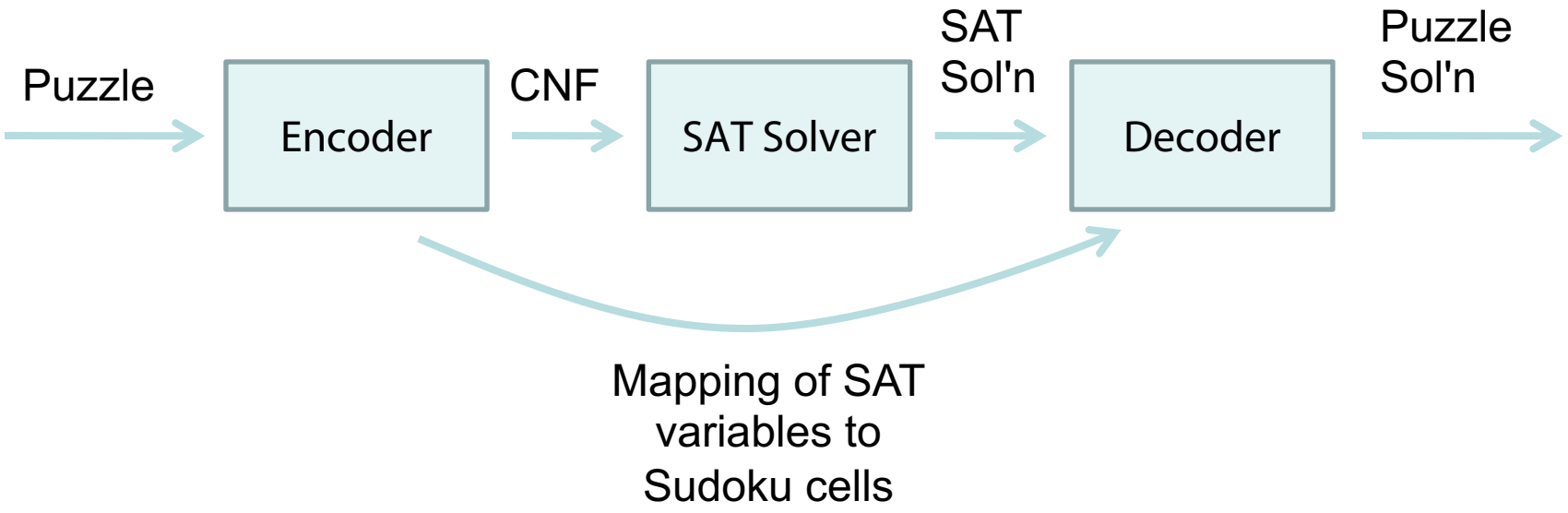
- Clause learning and non-chronological backtracking are hallmarks of modern SAT solvers

SAT In Action: Sudoku

		6	1		2	5		
	3	9				1	4	
				4				
9		2		3		4		1
	8						7	
1		3		6		8		9
				1				
	5	4				9	1	
		7	5		3	2		

- Played on an $n \times n$ board
- A single number from 1 to n must be put in each cell; some cells are pre-filled
- Board is subdivided into $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ blocks
- Each number must appear exactly once in each row, column, and block
- Designed to have a unique solution

Puzzle-Solving Process



Naive Encoding (1a)

- Use n^3 variables, labelled "$x_{0,0,0}$" to "$x_{n,n,n}$"
- Variable $x_{r,c,d}$ represents whether the number d is in the cell at row r, column c

Example of Variable Encoding

3	2	1	4
4	1	2	3
1	4	3	2
2	3	4	1

Variable $x_{r,c,d}$ represents whether the digit *d* is in the cell at row *r* column *c*

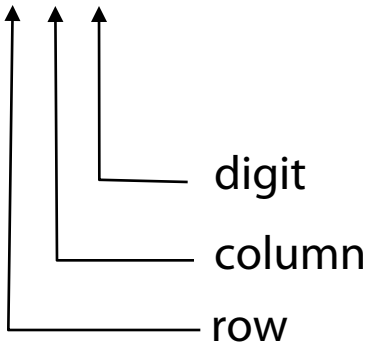
$$x_{1,1,3} = \texttt{true},\ x_{1,2,2} = \texttt{true},\ x_{1,3,1} = \texttt{true},\ x_{1,4,4} = \texttt{true}$$

$$x_{2,1,4} = \texttt{true},\ x_{2,2,1} = \texttt{true},\ x_{2,3,2} = \texttt{true},\ x_{2,4,3} = \texttt{true}$$

$$x_{3,1,1} = \texttt{true},\ x_{3,2,4} = \texttt{true},\ x_{3,3,3} = \texttt{true},\ x_{3,4,2} = \texttt{true}$$

$$x_{4,1,2} = \texttt{true},\ x_{4,2,3} = \texttt{true},\ x_{4,3,4} = \texttt{true},\ x_{4,4,1} = \texttt{true}$$

All others are false.



Naive Encoding (1b)

- Use n^3 variables, labelled "$x_{0,0,0}$" to "$x_{n,n,n}$"
- Variable $x_{r,c,d}$ represents whether the number d is in the cell at row r, column c
- "Number d must occur exactly once in column c"
  $\Rightarrow$ "Exactly one of $\{x_{1,c,d}, x_{2,c,d}, \ldots, x_{n,c,d}\}$ is true"
- How do we encode the constraint that **exactly one** variable in a set is true?

Naive Encoding (2)

- We can encode "**exactly one**" as the conjunction of "**at least one**" and "**at most one**"
- Encoding "**at least one**" is easy: simply take the logical OR of all the propositional variables
- Encoding "**at most one**" is harder in CNF
  Standard method: "no two variables are both true"
- I.e., enumerate every possible pair of variables and require that one variable in the pair is false
  This takes $O(n^2)$ clauses

Naive Encoding (3)

- Example for 3 variables (x_1, x_2, x_3).
- "At least one is true":

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3.$$

- "At most one is true":

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

- "Exactly one is true":

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

Naive Encoding (4)

The following constraints are encoded:

- Exactly one digit appears in each cell
- Each digit appears exactly once in each row
- Each digit appears exactly once in each column
- Each digit appears exactly once in each block

Each application of the above constraints has the form:
"exactly one of a set variables is true"

All of the above constraints are
independent of the prefilled cells

Problem with Naive Encoding

- We need n^3 total variables
  (n rows, n cols, n digits)
- And $O(n^4)$ total clauses
  - To require that the digit "1" appear exactly once in the first row, we need $O(n^2)$ clauses
  - Repeat for each digit and each row
- For some projects, the naive encoding might be OK
- For large n, it might be a problem

Simple Idea: Variable Elimination

- Simple idea: Don't emit variables that are made true or false by prefilled cells
  - Larger grids have larger percentage prefilled.
- Also, don't emit clauses that are made true by the prefilled cells
- This makes encoding and decoding more complicated

Simple Idea: Variable Elimination

Example: Consider the CNF formula

$$(a \vee d) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (c \vee \neg b \vee e).$$

- Suppose the variable *b* is preset to **`true`**
- Then the clause $(a \vee b \vee c)$ is automatically true, so we skip the clause
- Also, the literal $\neg b$ is false, so we leave it out from the 3rd clause.
- Final result: $(a \vee d) \wedge (c \vee e)$

Results

PUZZLE 100x100	NumVars	NumClauses	Sat Time
Var Elim Only	36,415	712,117	1.04 sec

PUZZLE 144x144	NumVars	NumClauses	Sat Time
Var Elim Only	38,521	596,940	0.91 sec

3-SAT

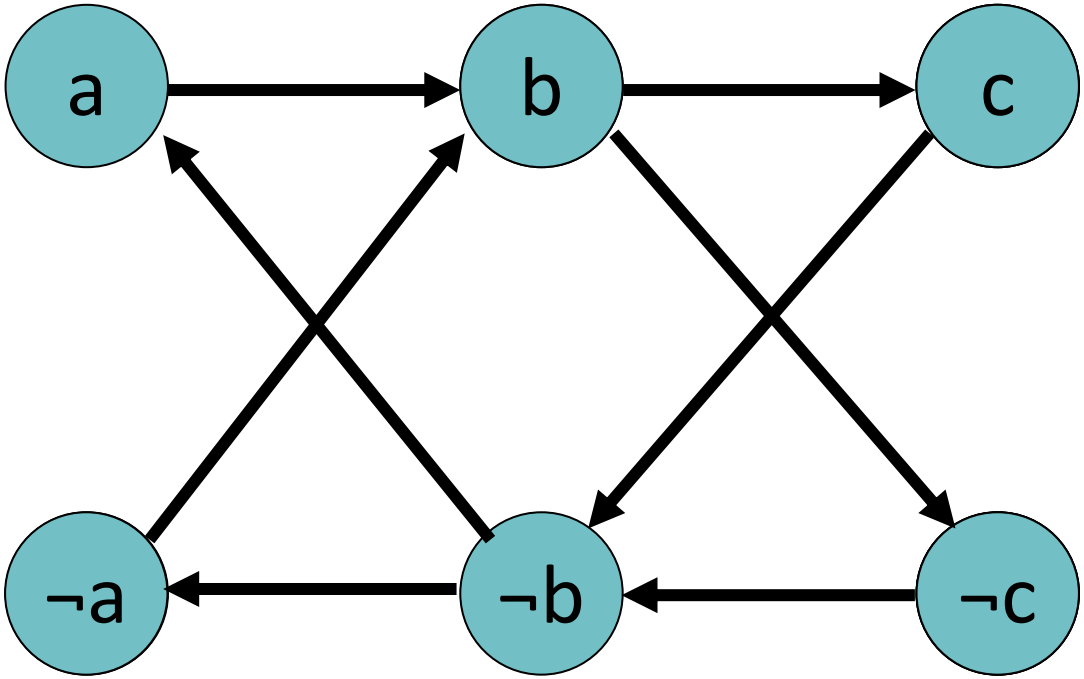
Jedes SAT-Problem kann auf 3-SAT (max. 3 Literale in Klausel) reduziert werden (Übungsaufgabe in der Logik-Vorlesung?)

Was ist mit 2-SAT?

- Nicht jede Formel liegt im 2-SAT-Fragment
- Ist 2-SAT schwerer oder leichter als 3-SAT?
- Finde polynomiellen Algorithmus für 2-SAT

2-SAT Algorithmus $(x1 \vee x2) \equiv (\neg x1 \Rightarrow x2) \equiv (\neg x2 \Rightarrow x1)$

$(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge (c \vee \neg b) \wedge (b \vee a)$



2-SAT Algorithmus

Für jede Variable erzeuge
zwei Knoten: einen mit positivem und
einen mit negativem Literal

Für jede Disjunktion der Eingabe:
Zeichne zwei gerichtete Kanten
gemäß Disjunktionsregel ein:

$$(x1 \vee x2) \equiv (\neg x1 \Rightarrow x2) \equiv (\neg x2 \Rightarrow x1)$$

2-SAT Algorithmus

Eine 2-KNF-Formel ist unerfüllbar

gdw.

im Graphen G_F existiert ein Zyklus der Form $x_i \quad \ldots \quad \neg x_i \quad \ldots \quad x_i$

- Graph konstruieren
  - Laufzeit polynomiell

Aspvall, M. Plass, and R. Tarjan "A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas",
1.Info. Proc. Letters, Vol. 8, Iss. 3, p. 121-123, **1979**.

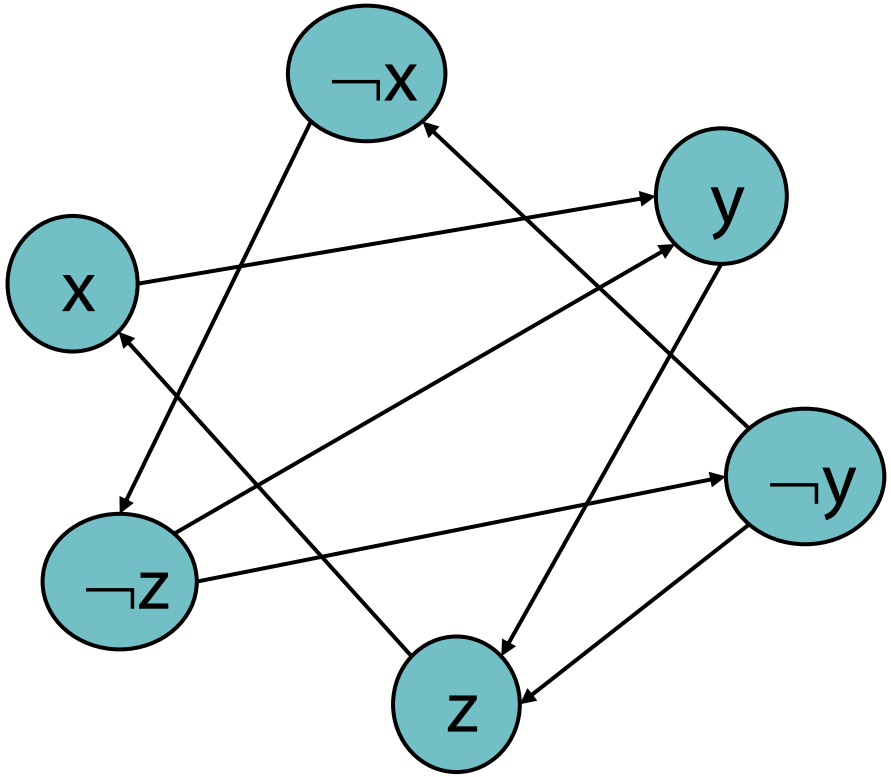
Zyklen mit x und ¬x finden

- Als All-Pairs-Shortest-Paths– Problem
  - mit unendlichen Kosten für nichtvorhandene Kanten
  - für alle Literale α überprüfen:
    $(\alpha, \neg\alpha)$ und $(\neg\alpha, \alpha) < \infty$?
  - Laufzeit polynomiell, effizienter Algorithmus
- Konstruierten Graph in Zusammenhangskomponenten zerlegen, nachschauen ob es eine ZHK mit $\neg\alpha$ und α, wobei α eine boolesche Variable aus der Formel ist
  - mit dem Tiefensuchschema
  - Laufzeit polynomiell, effizienter Algorithmus
- 2-SAT ∈ **P**, wenn Formel unerfüllbar

Aspvall, M. Plass, and R. Tarjan "A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas",
1.Info. Proc. Letters, Vol. 8, Iss. 3, p. 121-123, **1979**.

Belegung konstruieren

$(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg z) \wedge (z \vee y)$



Können wir eine Belegung konstruieren, wenn es keine ZHKs mit $\alpha, \neg\alpha$ gibt?

Bis alle Literale belegt:

- Finde Literal α, so dass nicht $reachable(\alpha, \neg\alpha)$ gilt
- Setze α auf true und $\neg\alpha$ auf false
- Propagiere entlang der Kanten

$reachable \in \boldsymbol{P}$

2-SAT $\in \boldsymbol{P}$

Quiz-Aufgabe – Vorbereitung

1. Bitte jetzt Handy oder Laptop rausholen bzw. Vordruck bereitlegen
2. https://moodle.uni-luebeck.de/mod/quiz/view.php?id=397132
3. Test mittels „Test jetzt durchführen“ bzw. „Test wiederholen“ öffnen
4. Fragen beantworten (nächste Folie)
5. **Anschließend „Versuch abschließen“ und 2x „Abgeben“ klicken**

Quiz-Aufgabe – Fragen

- **Frage 1**

  Welche Aussagen zu Problemen treffen zu?

  - ❑ **A** Alle Probleme können in polynomieller Zeit gelöst werden.
  - ❑ **B** Probleme können *schwer* sein.
  - ❑ **C** Für jedes Problem ist ein effizienter Algorithmus bekannt.
  - ❑ **D** Probleme können *reduziert*, also in andere Probleme "übersetzt", werden.

- **Frage 2**

  Welche Aussagen zu SAT treffen zu?

  - ❑ **A** (3-)SAT ist ein *schweres* Problem.
  - ❑ **B** 2-SAT ist kein *schweres* Problem.
  - ❑ **C** 3-SAT kann mittels ZHKs gelöst werden.
  - ❑ **D** 2-SAT kann mittels ZHKs gelöst werden.

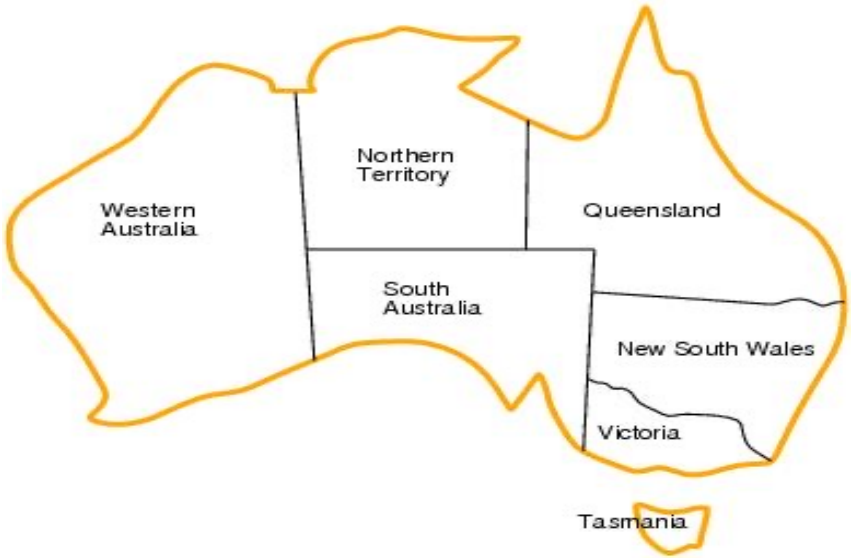
Bedeutung für Anwendungen

- 2-SAT kann effizient gelöst werden

- Formalisierung als 2-SAT versuchen
- Gelungen für:
  - Konfliktfreie Plazierung geometrischer Objekte
  - Clusterung von Daten
  - Anordnungsprobleme (Scheduling)
  - Viele weitere…

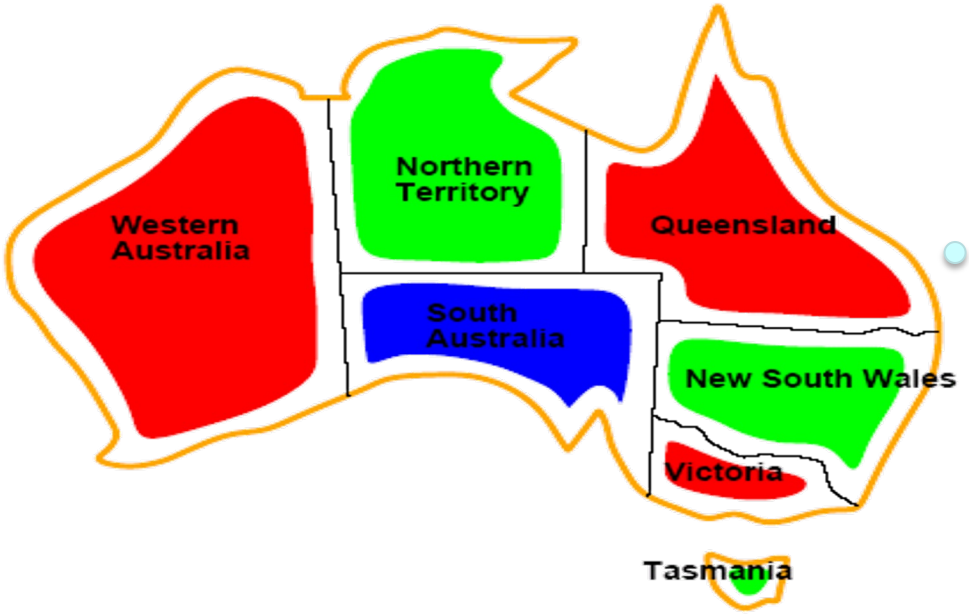
- Nicht immer bietet sich SAT für die Formalisierung von Anwendungsproblemen an

Beispiel: Einfärbung



- Variablen: *WA, NT, Q, NSW, V, SA, T*
- Wertebereich für Variablen: *{rot, grün, blau}*
- Beschränkungen:
  - Benachbarte Regionen müssen verschiedene Farben haben
    - Z.B.: *WA* ≠ *NT*

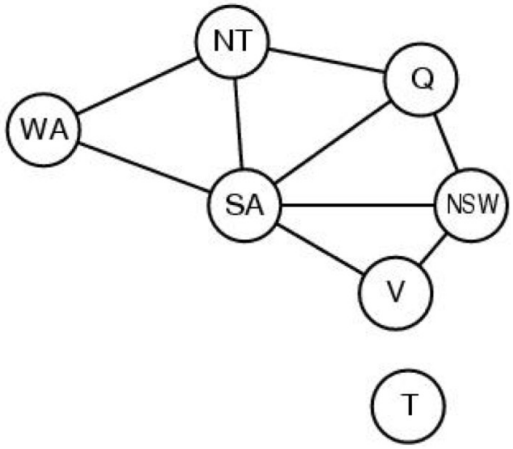
Beispiel: Einfärbung



Darstellbar als planarer Graph

- Lösungen sind Variablenbelegungen, die alle Einschränkungen erfüllen, z.B.:
  - *{WA=rot, NT=grün, Q=rot, NSW=grün, V=rot, SA=blau, T=grün}*

Constraint-Satisfaction-Problem



Kante steht für "ungleich" und stellt Constraint dar

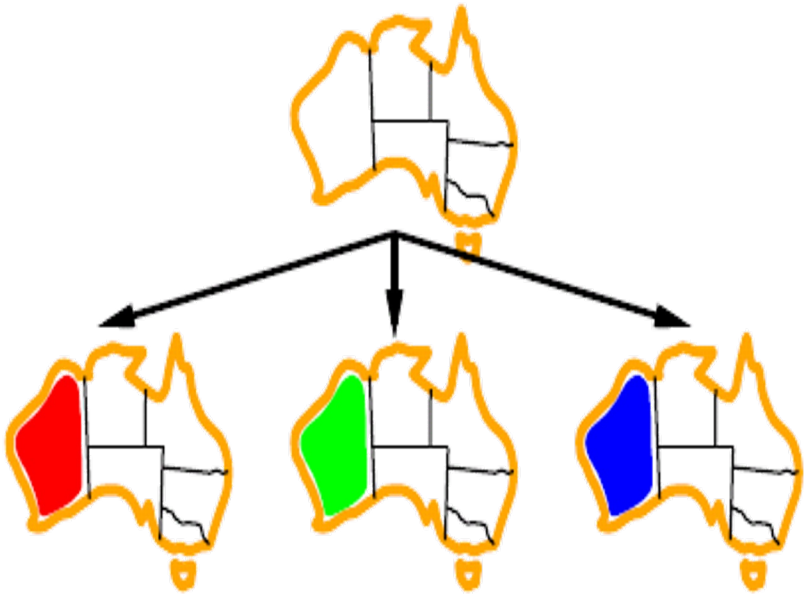
- Lösungen sind Variablenbelegungen, die alle Einschränkungen erfüllen, z.B.:
  - *{WA=rot, NT=grün, Q=rot, NSW=grün, V=rot, SA=blau, T=grün}*

Färbung von Graphen

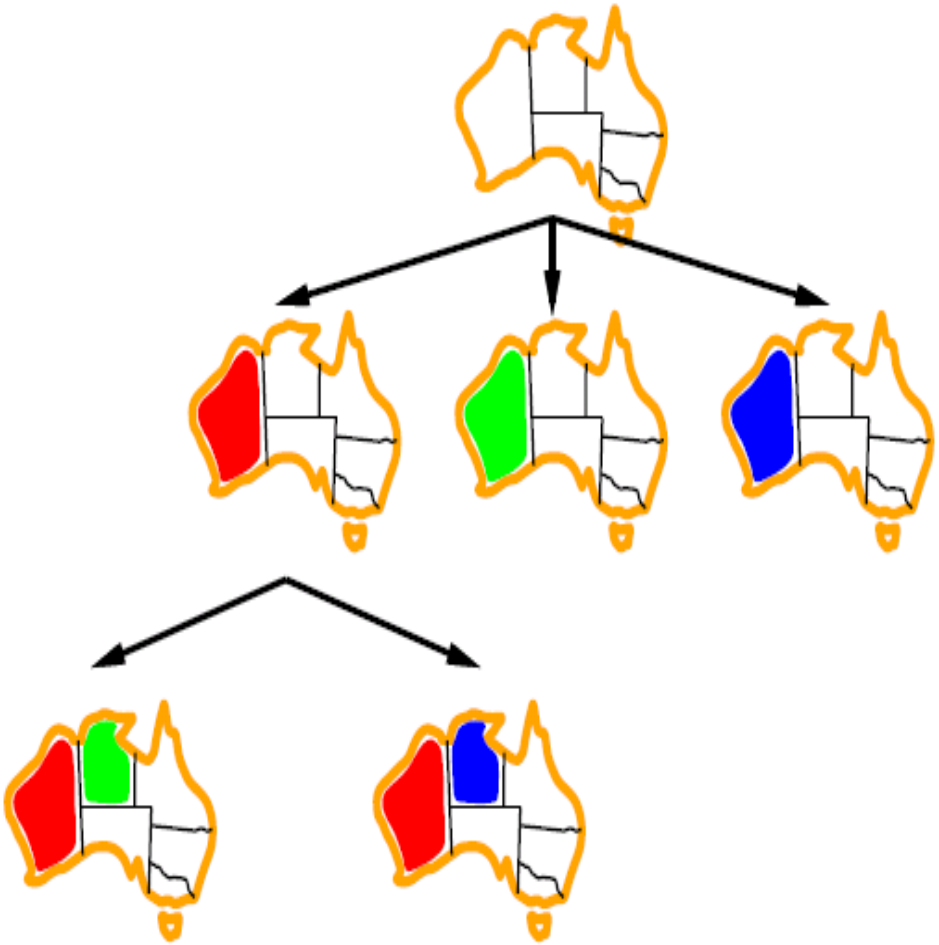
- Gegeben ein planarer Graph
  (keine Kantenüberscheidungen in 2D-Ebene)
- Guthries Vermutung (1852):
  Jeder planare Graph kann mit 4 oder weniger Farben eingefärbt werden (Vier-Farben-Satz)
  - Gezeigt (durch Computer) im Jahre 1977
    (Appel und Haken)
  - Erstes große mathematische Problem,
    das mit Hilfe von Computern gelöst wurde
- Minimale Anzahl = chromatische Zahl
- Bestimmung der chromatischen Zahl ist NP-schwer

Kenneth Appel, Wolfgang Haken (unter Mithilfe von J. Koch),
Every Planar Map is Four-Colorable. In: *Contemporary Mathematics*.
Band 98. American Mathematical Society, Providence, RI **1989**

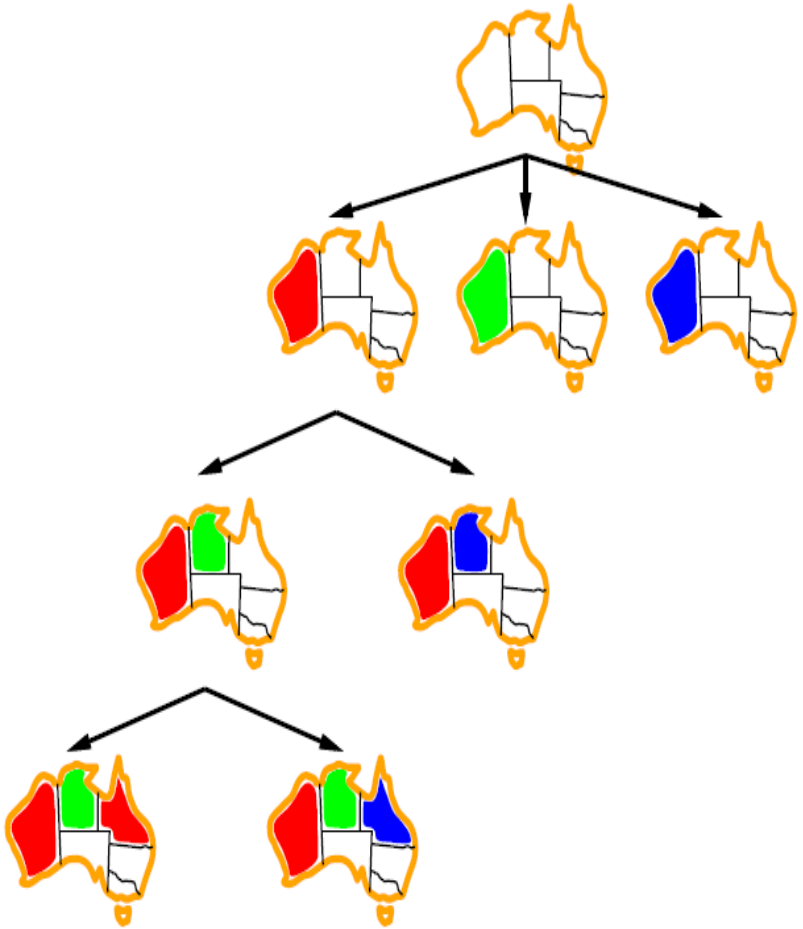
Backtracking um 3 Farben zu probieren



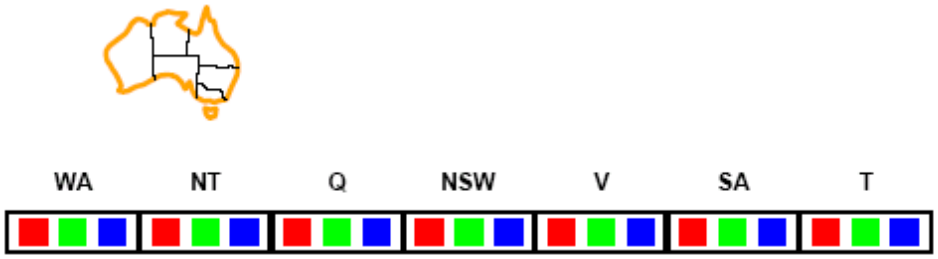
Backtracking?

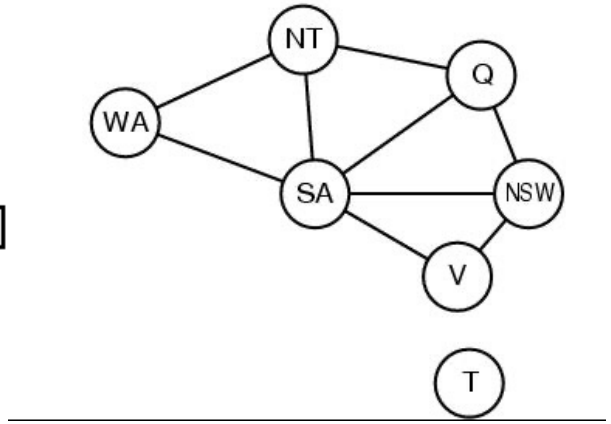


Backtracking?



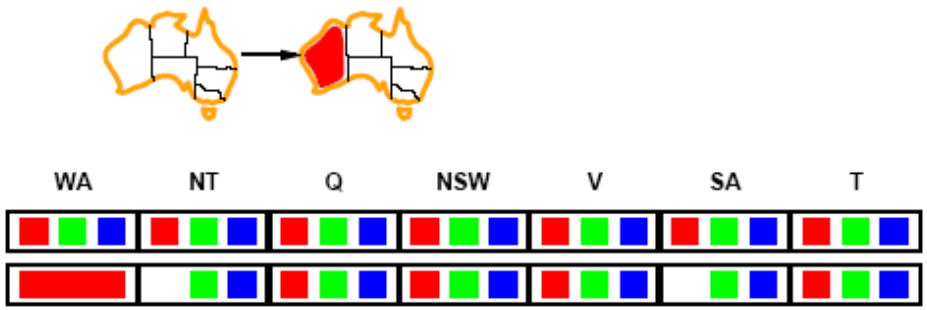
Forward-Checking (Propagierung)

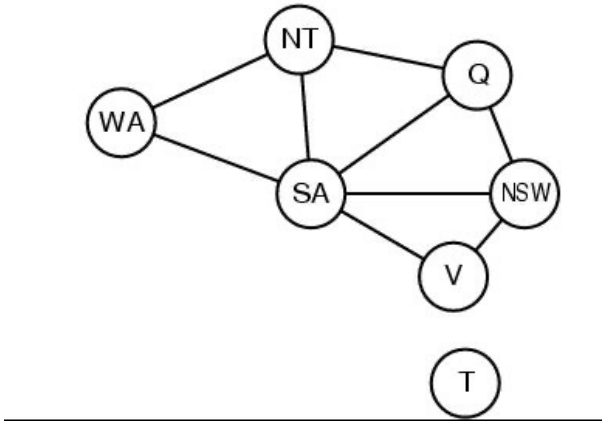




- Können wir Sackgassen früh erkennen?
  - *… und später vermeiden?*
- *Forward-Checking: Führe Verzeichnis von möglichen Werten der Variablen*
- Beende Suchzweig, wenn für eine Variable kein Wert übrigbleibt

Forward-Checking

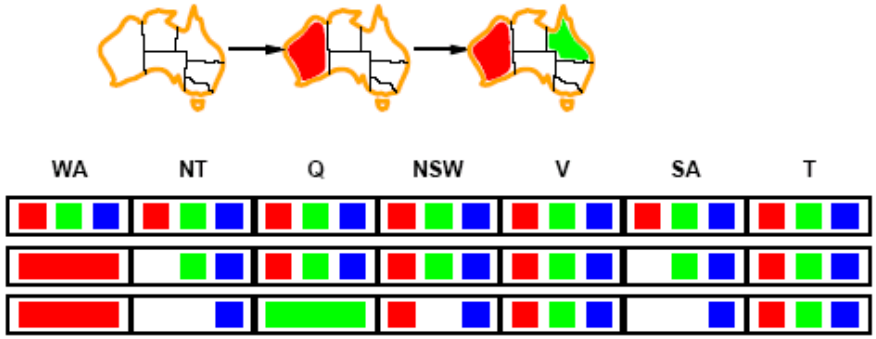


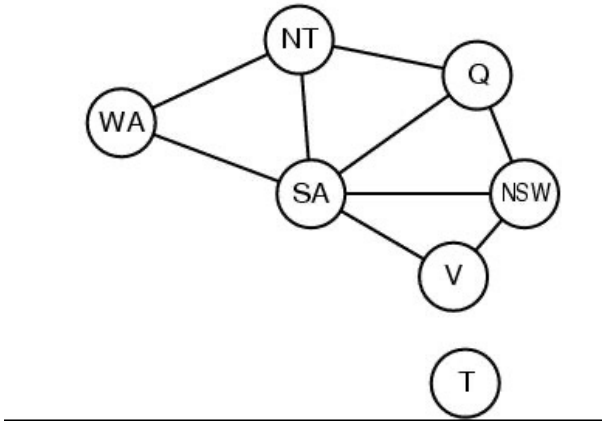


- Wähle *{WA=red}*

- Effekte auf andere Variablen, die mit WA verbunden sind
  - *NT kann nicht mehr rot sein*
  - *SA kann nicht mehr rot sein*

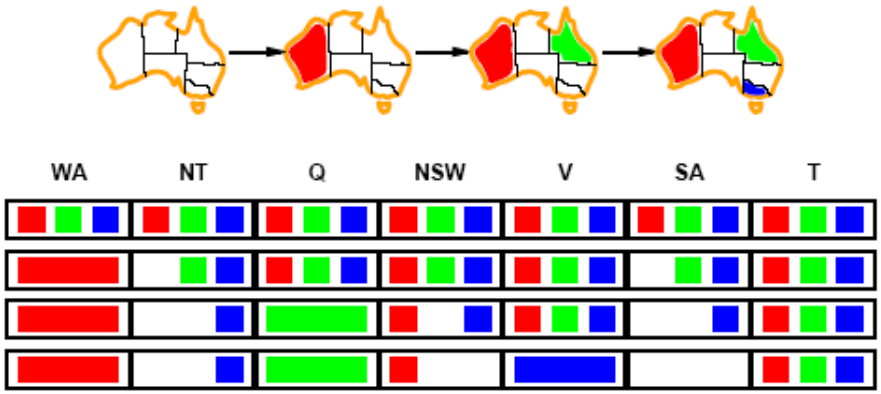
Forward-Checking

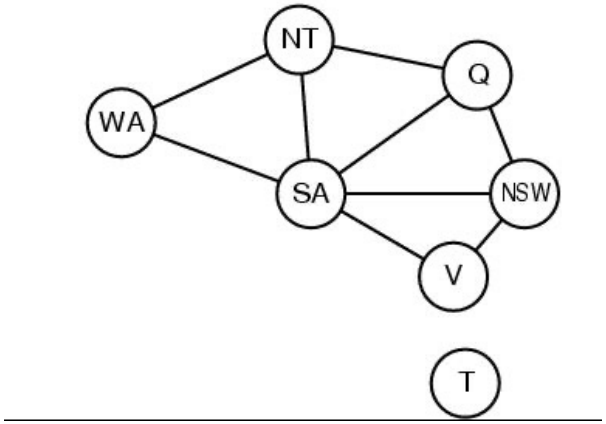




- Wähle *{Q=green}*
- Effekte auf andere Variablen, die mit WA verbunden sind
  - *NT kann nicht mehr grün sein*
  - *NSW kann nicht mehr grün sein*
  - *SA kann nicht mehr grün sein*
- *MRV-Heuristik würde als nächstes NT oder SA wählen*

Forward-Checking



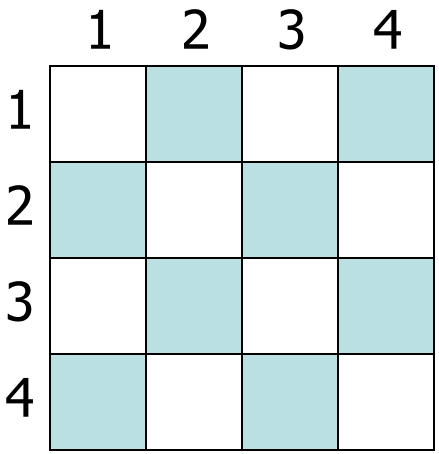


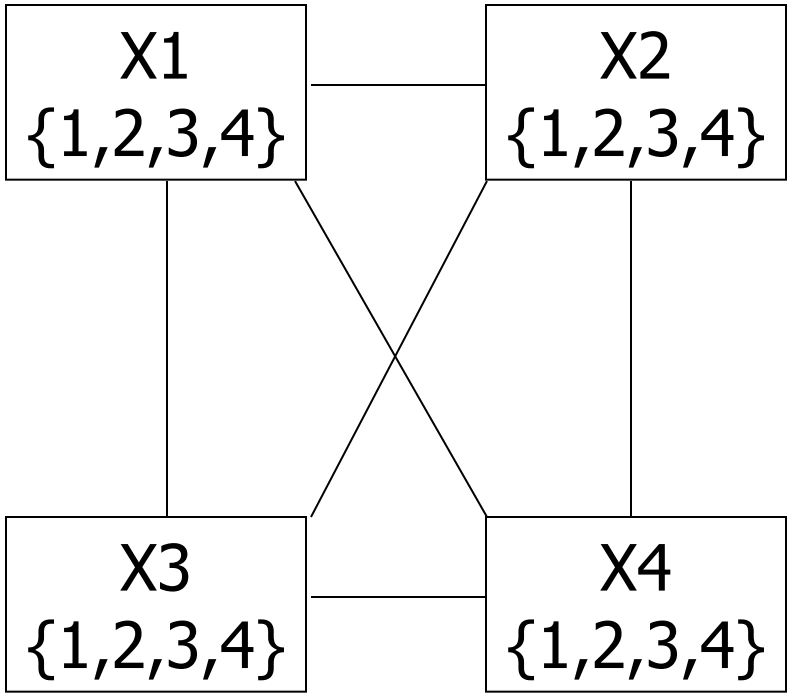
- Fall für *V* blau gewählt würde

- Effekte auf andere Variablen, die mit WA verbunden sind
  - *NSW kann nicht mehr blau sein*
  - *SA hat keinen möglichen Wert mehr*

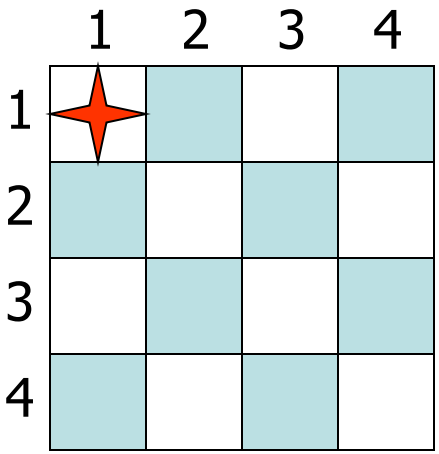
- FC hat eine Belegung entdeckt, die inkonsistent mit den Einschränkungen ist, so dass Backtracking einsetzten kann

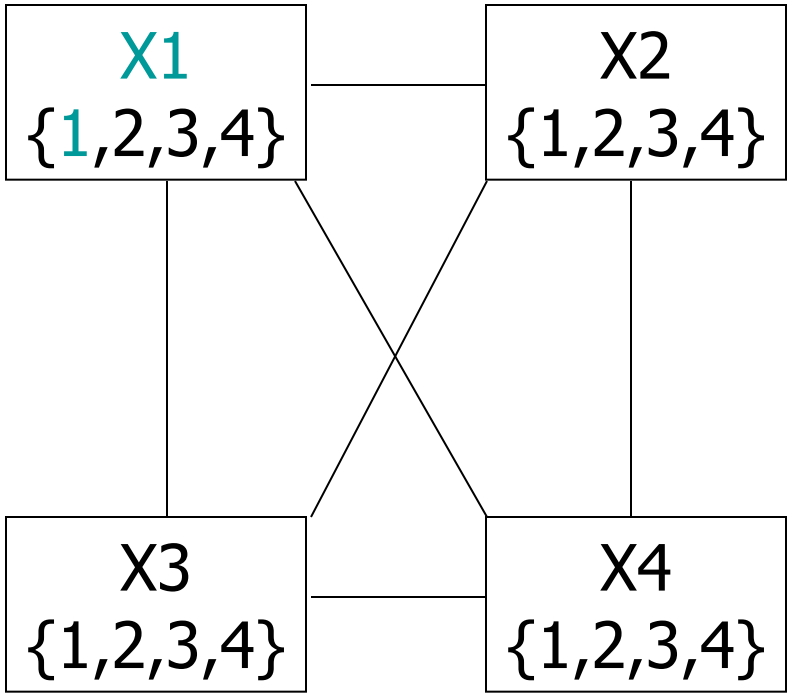
Beispiel: 4-Damen-Problem



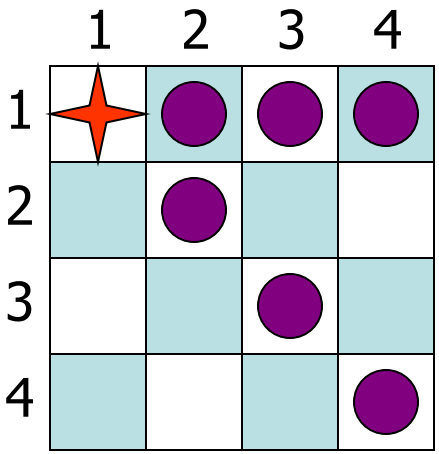


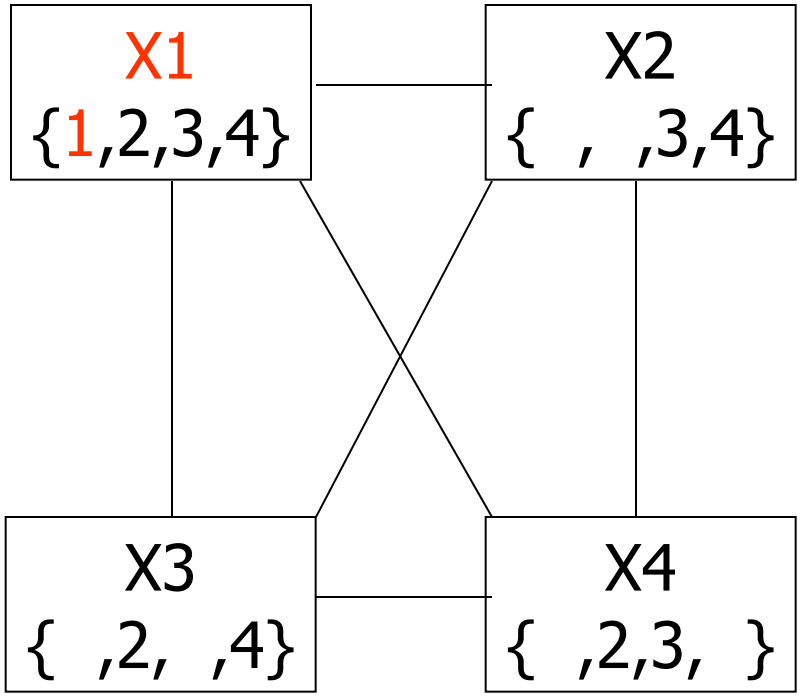
Beispiel: 4-Damen-Problem



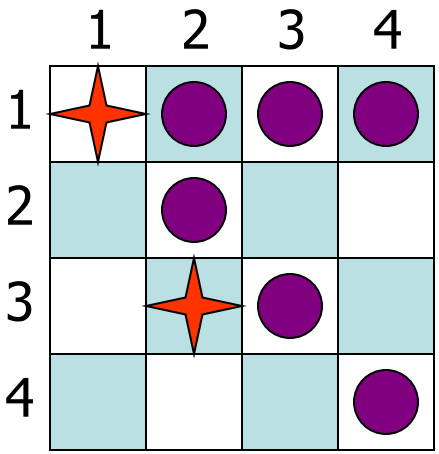


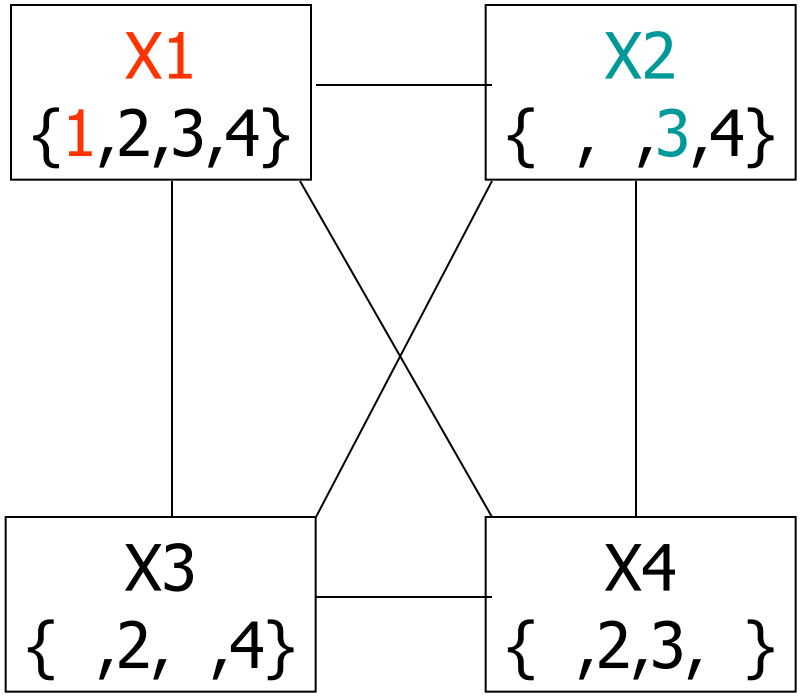
Beispiel: 4-Damen-Problem



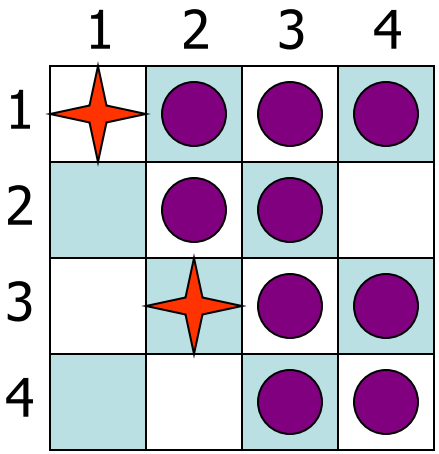


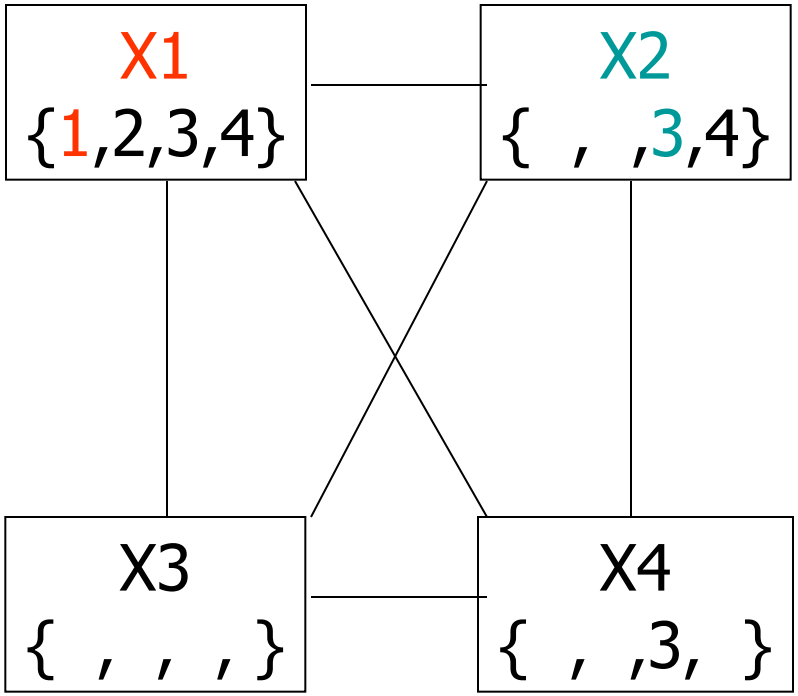
Beispiel: 4-Damen-Problem



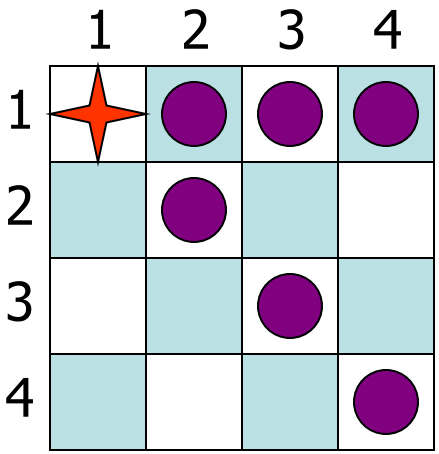


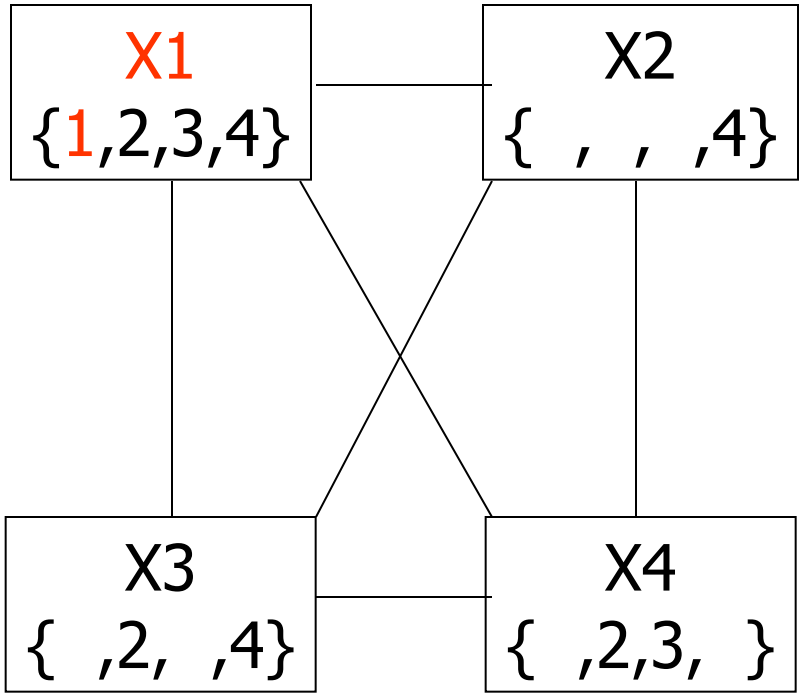
Beispiel: 4-Damen-Problem



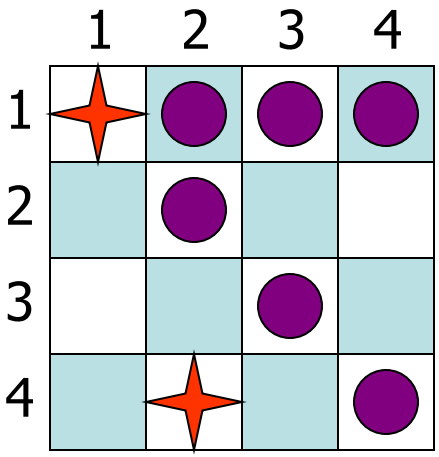


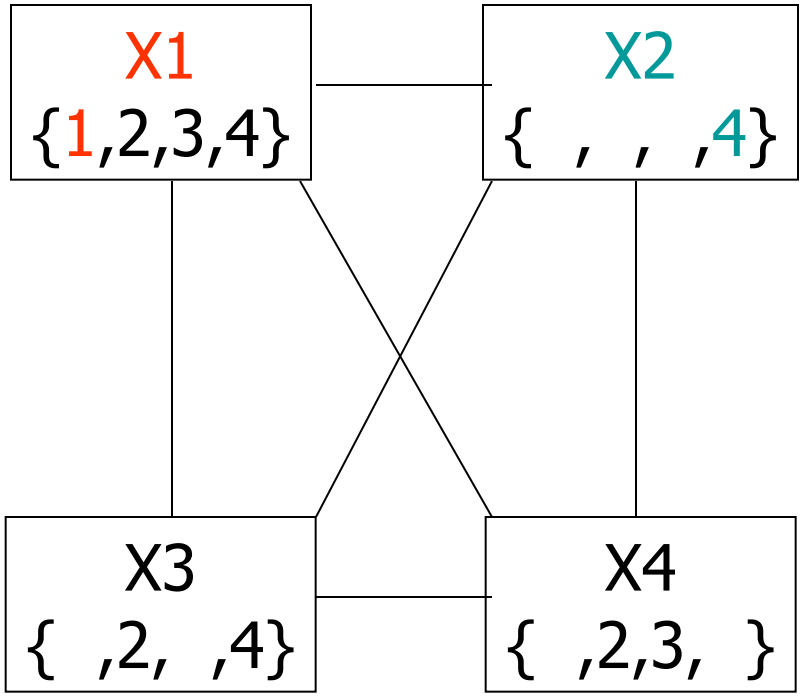
Beispiel: 4-Damen-Problem



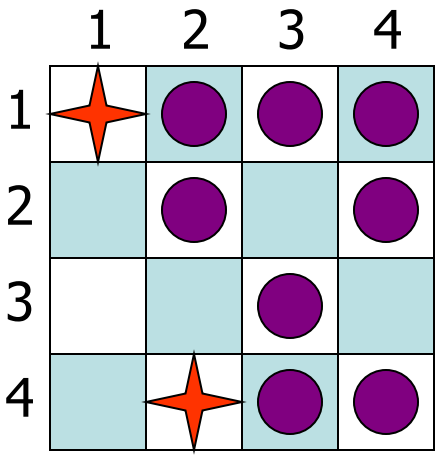


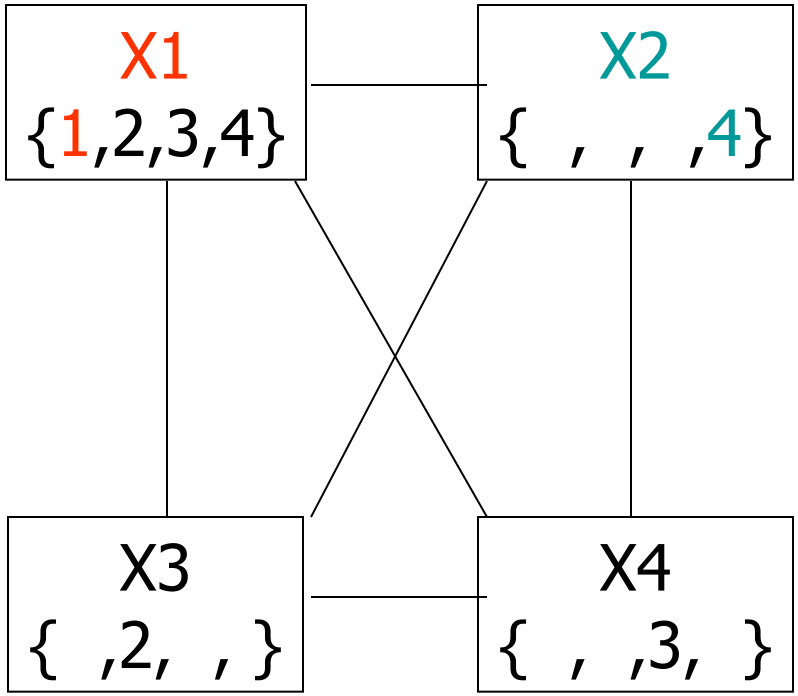
Beispiel: 4-Damen-Problem



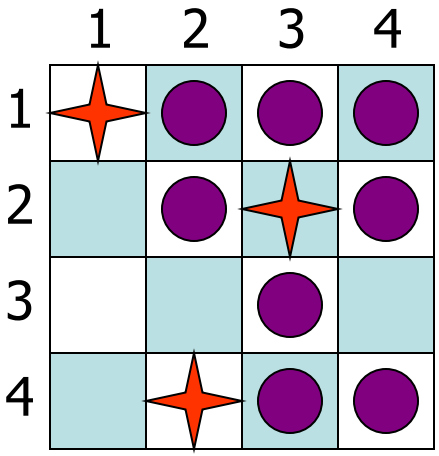


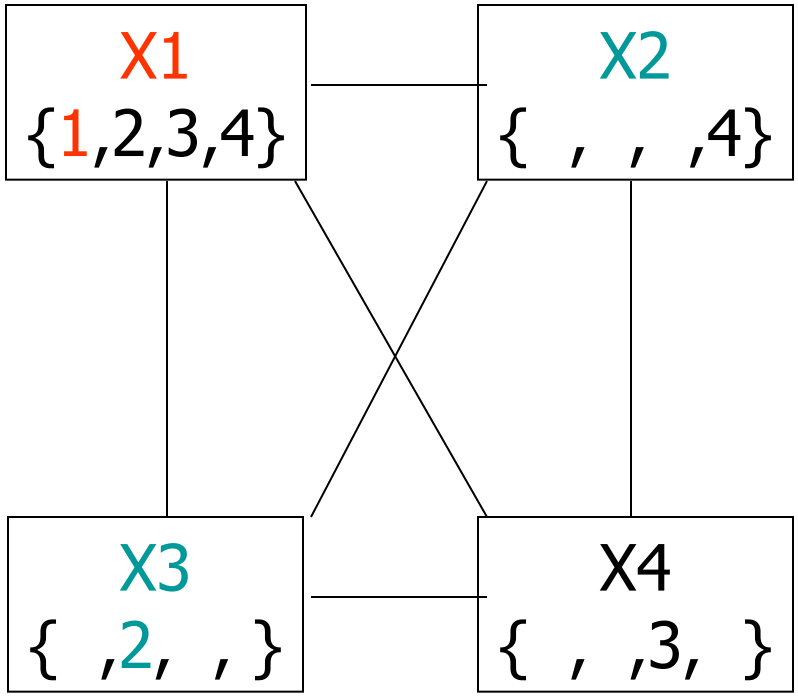
Beispiel: 4-Damen-Problem



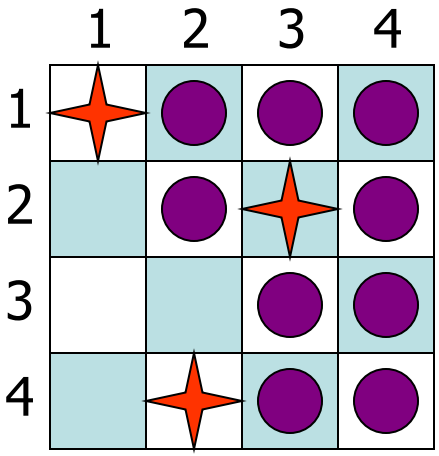


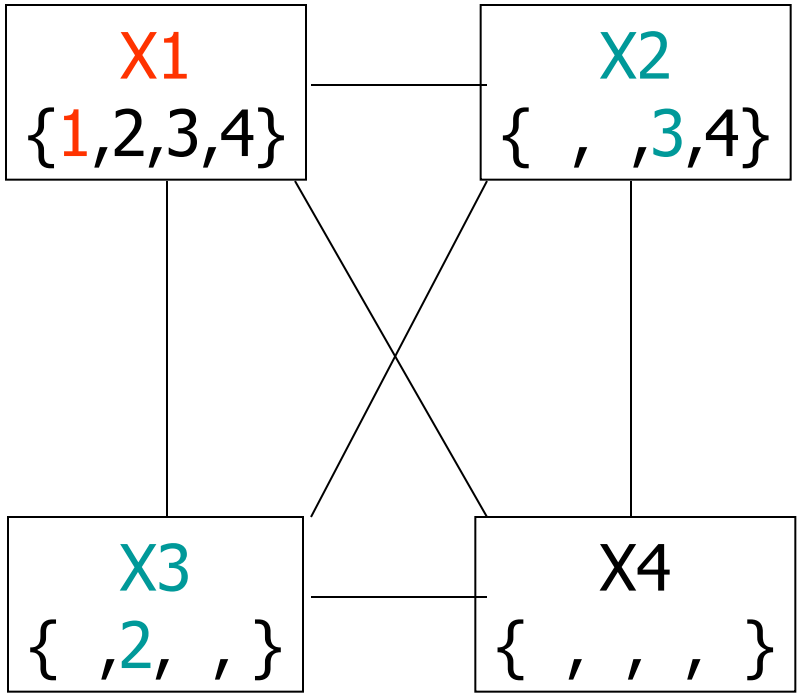
Beispiel: 4-Damen-Problem





Beispiel: 4-Damen-Problem





Zusammenfasssung

- Offenes Problem: P=NP?
- Clique, TSP, chromatische Zahl, n-Queens ...
- NP-schwer, NP-vollständig, Reduktion von Problemen
- Referenzprobleme SAT / chromatische Zahl
  - Entwurfsmuster zur algorithmischen Lösung schwerer Probleme
- Lösen eines kombinatorischen Anwendungsproblems
  - Entwurfsmuster: Reduktion auf bekanntes, wohluntersuchtes Problem
- Schwer heißt formal (mindestens) NP-schwer