Algorithmen und Datenstrukturen

Graphen

Prof. Dr. Ralf Möller

Universität zu Lübeck

Institut für Informationssysteme

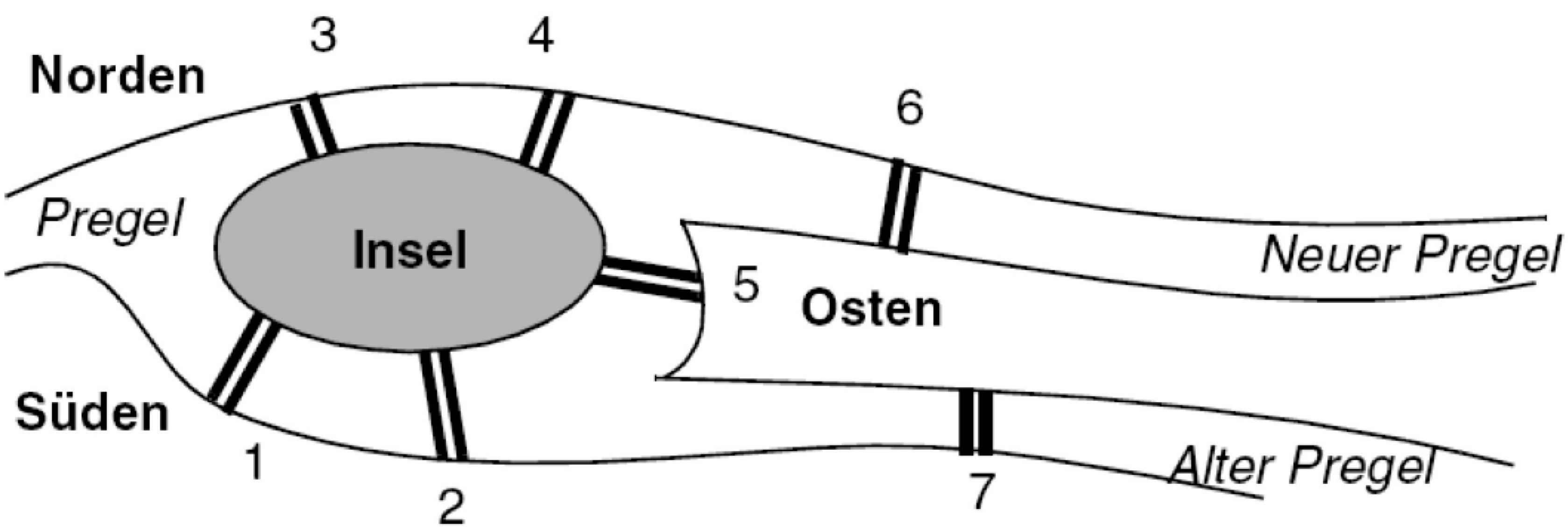
Magnus Bender (Übungen)

sowie viele Tutoren

Königsberger Brückenproblem

Gibt es einen Weg über alle sieben Brücken von einem beliebigen Ausgangspunkt zurück zum Ausgangspunkt?

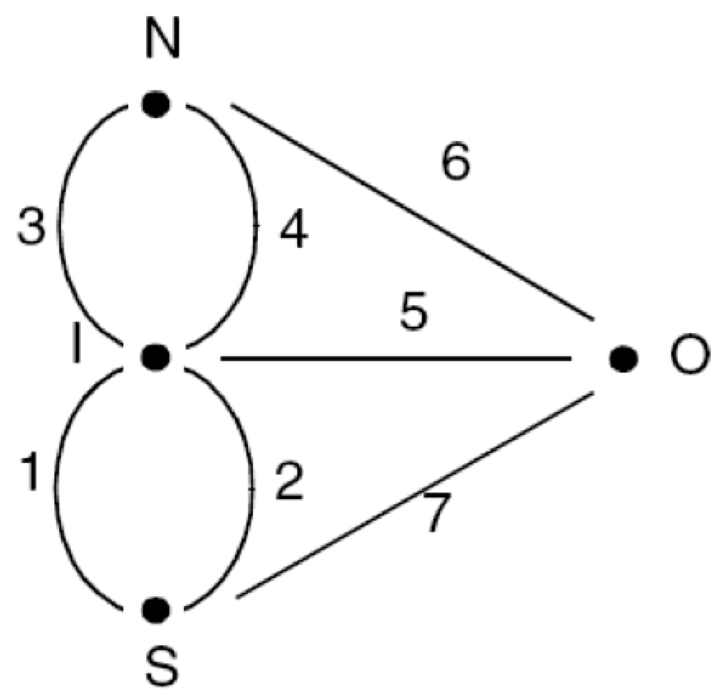
- Wobei jede Brücke genau einmal benutzt wird.



Transformation des Problems

Darstellung als Prüfung von Grapheigenschaften

- Insel, Landgebiet: Knoten
- Gebietsnamen
  - Knotenbeschriftung aus {S, I, N ,O}
- Brücken: Kanten
- Brückennamen:
  - Kantenbeschriftung



Definition des Problems

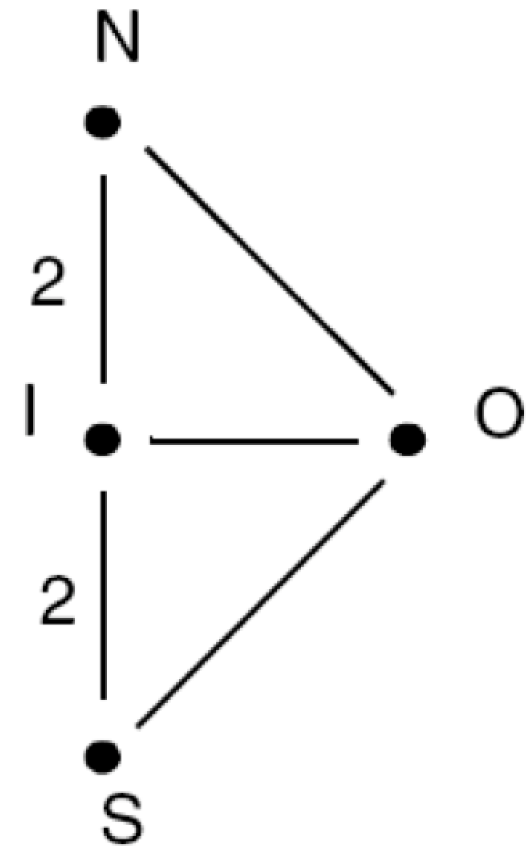
- Eingabe:
  - Welche Brücke führt von wo nach wo.
- Ausgabe:
  - Ja, es gibt einen geschlossenen Weg
    (alle Landstücke besucht und Anfang = Ende)
    oder nur einen offenen Weg
    (alle Landstücke besucht aber Anfang ≠ Ende) oder
  - Nein, es gibt keine Lösung

Entwurfsmuster Suchproblem?

- Idee für ein Verfahren:
  - Starte an einem Ort (z.B. Süden)
  - Durchlaufe alle möglichen Wege unter Einhaltungen der Bedingungen, so dass der Startort (Süden) wieder erreicht wird und jede Brücke genau einmal benutzt wird
  - Wenn Weg gefunden, Lösung ausgeben
    Und sonst ?
  - Frage: Müssen wir für einen offenen Weg sogar von jedem Ort $\in$ {N, S, O, I} aus unsere Suche beginnen?
- Es ergäbe sich ein Verfahren mit hohem Aufwand

Beobachtung

- Es reicht vielleicht, nur die Anzahl der Brücken zwischen zwei Knoten zu erfassen
- Beim Passieren eines Knotens (hin- und wieder weg) werden zwei anliegende Kanten verwendet
- Ein Knoten mit einer ungeraden Anzahl von anliegenden Kanten kann also nur ein Randknoten des gesuchten Weges sein



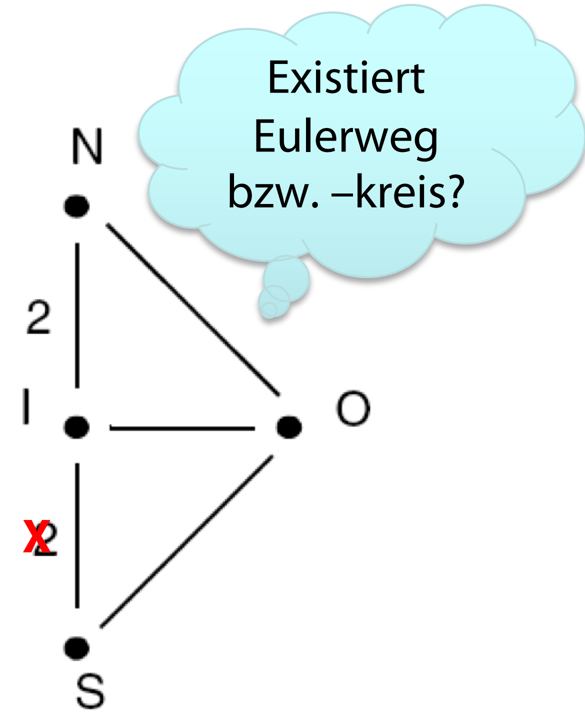
Umformulierung des Problems

- Gibt es einen Weg (zusammenhängende Folge von Kanten), der alle Kanten genau einmal enthält (Knoten beliebig oft) und möglichst geschlossen ist (Anfangsknoten = Endknoten)
  - Wir beschränken uns auf die Frage nach der Existenz eines solchen Wegs (und verzichten auf die Bestimmung eines solchen Weges, falls es ihn gibt)
- Besitzt der Graph einen Eulerweg bzw. Eulerkreis?

Trotz seines Namens ist der Eulerkreis kein Kreis, zumindest wenn man der häufigen Definition folgt, nach der sich in einem Kreis kein Knoten wiederholen darf.

Analyse auf Graphenebene

- Beim Passieren eines Knotens (hin- und wieder weg) werden zwei anliegende Kanten verwendet
- Ein Knoten u mit einer ungeraden Anzahl von anliegenden Kanten kann also nur ein Randknoten des gesuchten Weges sein
- Die Anzahl U solcher Knoten u kann nur 0 oder 2 sein
- Hinreichende Bedingung: Wenn
  - $U = 0$: dann existiert Eulerkreis (mit beliebigem Anfang!)
  - $U = 2$: dann existiert Eulerweg
  - sonst existiert keine Lösung
- Ohne Beweis



Aus einer Arbeit von Leonhard Euler, **1736**
Wladimir Velminski: *Leonhard Euler. Die Geburt der Graphentheorie*. Kulturverlag Kadmos, Berlin **2008**

Algorithmus Euler (1) für Graph (V, E)

```
function euler(g)
    U = 0
    for v in g.vertices
        if isodd(degree(v, g))
            U += 1
        end
    end
    if U == 0
        return "Eulerkreis"
    elseif U == 2
        return "Eulerweg"
    else
        return "⊥"
    end
end
```

Wieviele Schritte benötigt degree(v, g)?

O(m) mit m = |E|
Oh! Und das in einer Schleife!
Macht O(nm) insgesamt.

Algorithmus Euler (2)

```
function euler(g)
    # Dictionary, um Grad fuer alle Knoten zu speichern
    d = Dict(default_value=0) # mit 0 fuer alle Knoten initialisieren
    for (u, v) in g.edges
        d[u] += 1
        d[v] += 1
    end
    U = 0
    for degree in values(d)
        if isodd(degree)
            U += 1
        end
    end
    if U == 0
        return "Eulerkreis"
    elseif U == 2
        return "Eulerweg"
    else
        return "⊥"
    end
end
```

Aha!
O(n+m)

Entwurfsmuster: Nachdenken

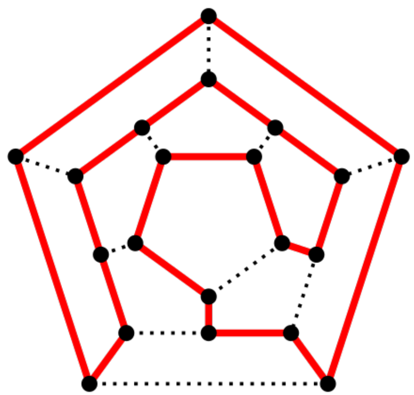
- Existenzproblem:
  - Nachdenken wandelt ein scheinbares Suchproblem in eine Berechnung mit linearem Aufwand $O(n+m)$, wobei n die Anzahl der Knoten und m die Anzahl der Kanten im Graphen ist

- Finden eines Eulerwegs oder eines Eulerkreises, inkl. Beweis des Satzes:

  Hierholzer *Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren*, Mathematische Annalen, Bd. 6, S. 30–32, **1873**.

Kleine Modifikation

- Bisher studiertes Problem: „Euler-Kreis/Weg vorhanden“
  Jede Kante einmal überschritten
- Neues Problem: „Hamilton-Kreis vorhanden“
  Jeder Knoten genau einmal berührt
- Ist erheblich schwieriger, es gibt weder eine einfache hinreichende Bedingung noch eine einfache notwendige Bedingung
- Interessanterweise ist es einfach, eine vorgeschlagene Lösung zu verifizieren
  – NB: Einfache Verifikation ist notwendigerweise nicht immer der Fall


[Wikipedia]

Zusammenfassung

- Probleme über Graphen zur Modellierung von Anwendungsproblemen
- Verständnis für Probleme über Graphen
  - Nicht immer muss man nach Wegen *suchen*...
  - Manchmal reicht die Betrachtung von polynomial berechenbaren Eigenschaften des Graphen, um ein Problem zu entscheiden