Non-Standard-Datenbanken

Approximationstechniken

Prof. Dr. Ralf Möller

Universität zu Lübeck

Institut für Informationssysteme

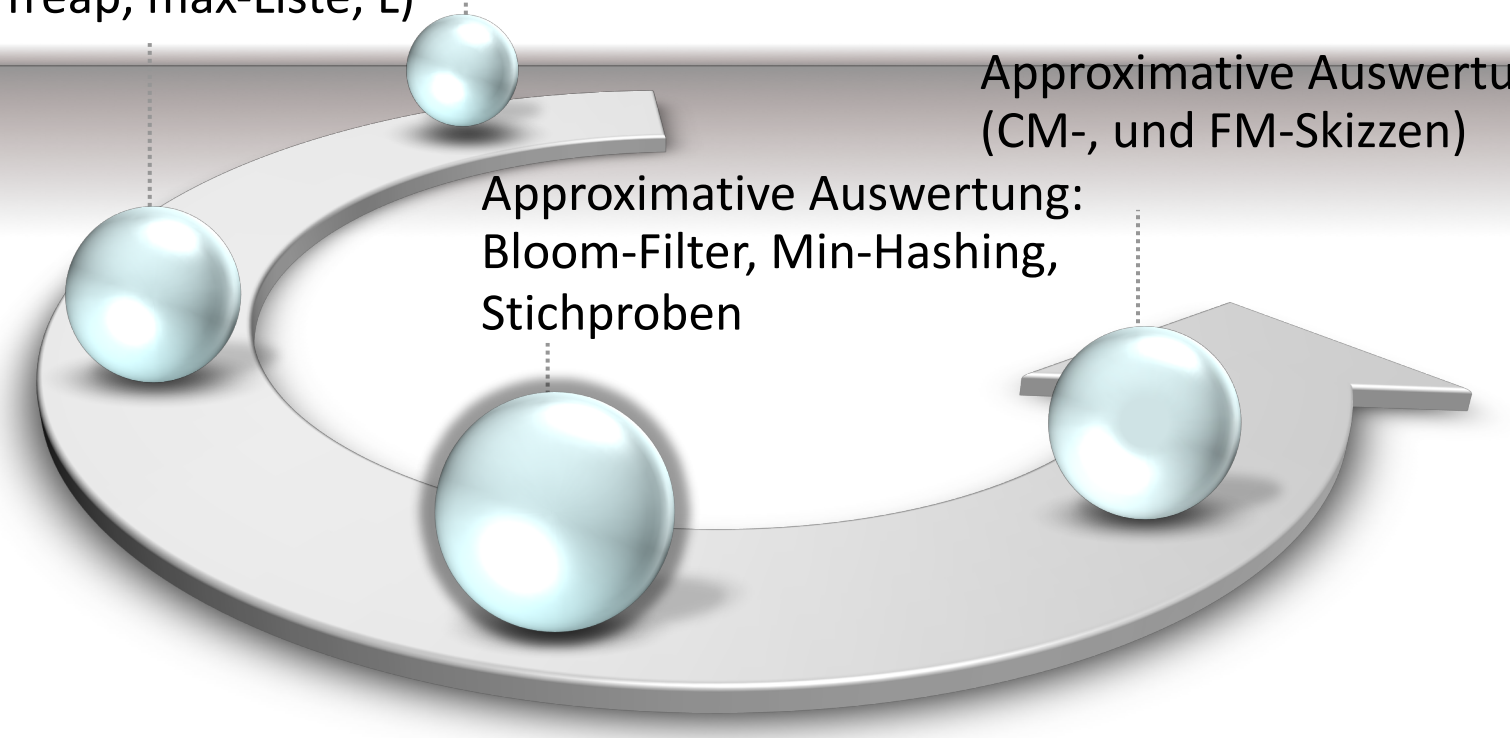
Übersicht

Intervall-Skyline, inkrementelle Auswertungstechniken
Skizzen (Treap, max-Liste, L)

Stromkonzept, relationale Anfragesprachen, exakte Auswertung, QoS-Angaben

Approximative Auswertung (CM-, und FM-Skizzen)

Approximative Auswertung: Bloom-Filter, Min-Hashing, Stichproben



Filterung von Datenströmen

- **Jedes Element eines Datenstroms ist ein Tupel**
- Gegeben sei eine Liste von Schlüsseln **S**
- **Bestimme, welche Tupel eines Strom in S sind**
- **Offensichtliche Lösung: Hashtabelle**
  - Aber was machen wir, wenn **nicht genügend Hauptspeicher bereitsteht**, um alle Elemente von ***S*** in einer Hashtabelle zu platzieren
    - Z.B. könnten wir Millionen von Filtern auf einem Strom evaluieren

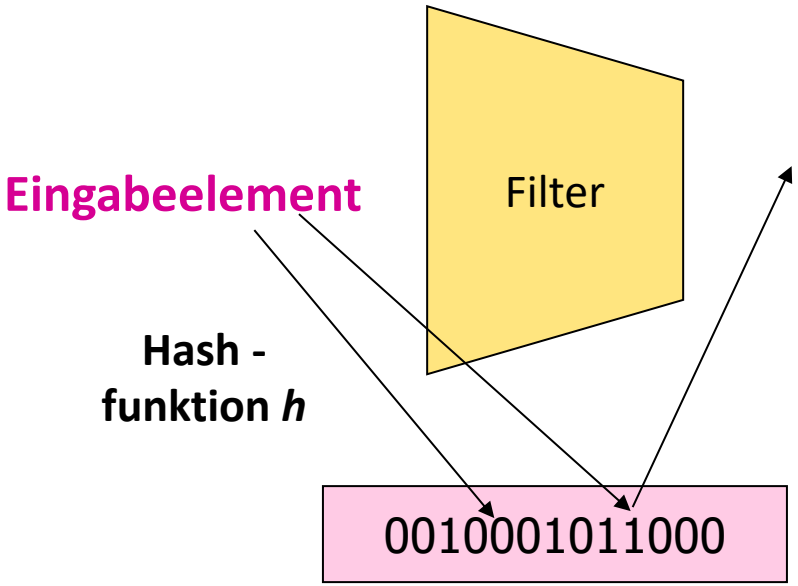
Anwendungen

- **Email-Spamfilterung**
  - Nehmen wir an, es sind 10^9 “gute” E-Mail-Adressen bekannt
  - Falls eine E-Mail von einer dieser Adressen kommt, ist sie kein Spam
- **Publish-subscribe-Systeme**
  - Nehmen wir an, jemand möchte Nachrichten zu bestimmten Themen zugesandt bekommen
  - Interessen werden durch Mengen von Schlüsselworten repräsentiert
  - Schlüsselworte von Interessenten müssen mit Nachrichtenstromelementen abgeglichen werden

Erster Ansatz (1)

- **Gegeben eine Menge von Schlüsseln S, die zur Filterung dienen**
- Erzeuge **Bitfeld *B*** aus ***n*** Bits, anfangs alle ***0***
- Wähle eine **Hash-Funktion *h*** mit Bereich **[*0,n*)**
- Hashe jedes Mitglied von $s \in S$ auf eines der ***n*** Bitfeldelemente und setze das Bit auf **1**: ***B[h(s)]:=1***
- Hashe jedes Element ***a*** des Stroms und gebe nur diejenigen aus, die auf ein Bit hashen, das auf **1** gesetzt ist
  - **Ausgabe *a*** falls **B[h(a)] = 1**

Erster Ansatz (2)



Gebe Element aus, es könnte in *S* sein.
Es hasht auf ein Bitfeld, das auch Hash-Ziel eines Elements in S ist.

Lasse Element fallen
Es hasht auf ein Bitelement mit **0**, und es ist daher sicher nicht in ***S***

Verfahren erzeugt falsch-positive aber keine falsch-negativen Ausgaben

- Falls Element in ***S***, wird es sicher ausgegeben, ansonsten möglicherweise auch

Erster Ansatz (3)

- **|S| = 1 Milliarde E-Mail-Adressen**
- **|B|= 1GB = 8 Milliarden Bits**

- Falls die E-Mail-Adresse in ***S*** ist, wird sie sicher auf ein Bitfeldelement gehasht, das mit **1** besetzt ist, so wird sie immer durchgelassen (***keine falsch-negativen Resultate***)

- Ungefähr **1/8** der Bits sind mit **1** besetzt, also werden ca. **1/8** der Addressen nicht in ***S*** durchgelassen (***falsch-positive Resultate***)
  - Tatsächliche sind es weniger als **1/8**, weil mehr als eine Adresse auf das gleiche Bit gehasht wird

Analyse: Werfen von Pfeilen (1)

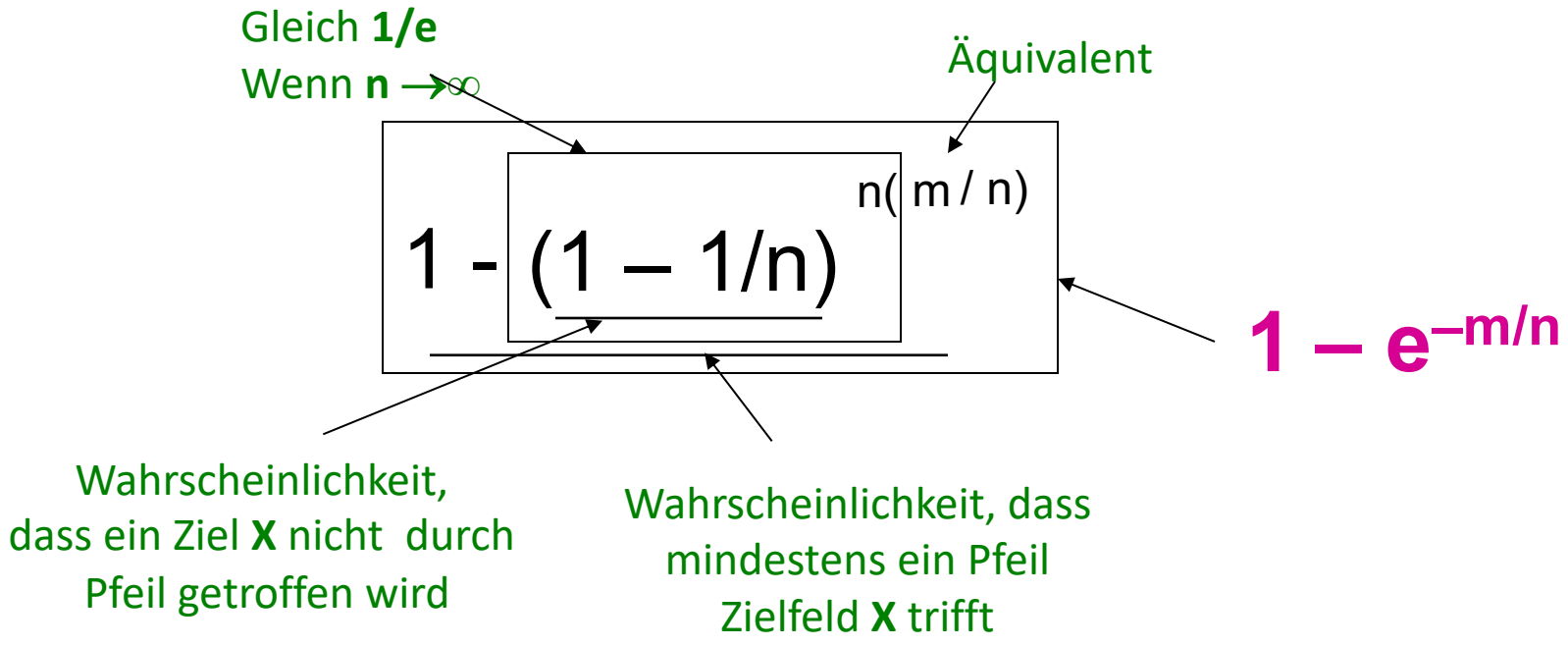
- **Genauere Analyse der Anzahl falsch positiver Ausgaben**

- **Betrachtung:** Wenn wir ***m*** Pfeile in ***n*** gleichermaßen wahrscheinliche Zielfelder werfen, **was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zielfeld mindestens einen Pfeil abbekommen?**

- **In unserem Fall:**
  - **Zielfelder** = Bits/Elemente des Hashfeldes
  - **Pfeile** = Hashwerte der Eingabeelemente

Analyse: Werfen von Pfeilen(2)

- Wir haben ***m*** Pfeile, ***n*** Zielfelder
- **Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zielfeld mindestens einen Pfeilabbekommt?**



Analyse: Werfen von Pfeilen(3)

- **Anteil der 1en im Bitfeld B =**
  = Wahrscheinlichkeit eines falsch-positiven Resultats
  = $1 - e^{-m/n}$

- **Beispiel:** **10^9** Pfeile, **$8 \cdot 10^9$** Zielfelder
  - Anteil der **1en** in **B = $1 - e^{-1/8}$ = 0.1175**
    - Vergleiche mit Schätzung: **1/8 = 0.125**

Bloom-Filter

- Betrachte: **|S| = *m*, |B| = *n***
- Verwende ***k*** unabhängige Hash-Funktionen $h_1, \ldots, h_k$
- **Initialisierung:**
  - Besetze **B** mit **0en**
  - Hashe jedes Element $s \in S$ mit jeder Hash-Funktion h_i, setze $B[h_i(s)] = 1$ (für jedes $i = 1,.., k$)

Es gibt nur *ein* Bitfeld B!

- **Laufzeit:**
  - Wenn ein Stromelement mit Schlüssel ***x*** erscheint
    - Falls $B[h_i(x)] = 1$ für alle $i = 1,\ldots, k$ dann deklariere, dass ***x*** in ***S***
      - Also, ***x*** hasht auf ein Hashfeld mit **1** für jede Hash-Funktion $h_i(x)$
    - Sonst, ignoriere Element ***x***

Bloom Filter – Analyse (1)

- **Welcher Anteil des Bitfeldes ist mit 1en gefüllt?**
  - Werfe $k \cdot m$ Pfeile auf n Zielfelder
  - Der Anteil an **1**en ist also $(1 - e^{-km/n})$

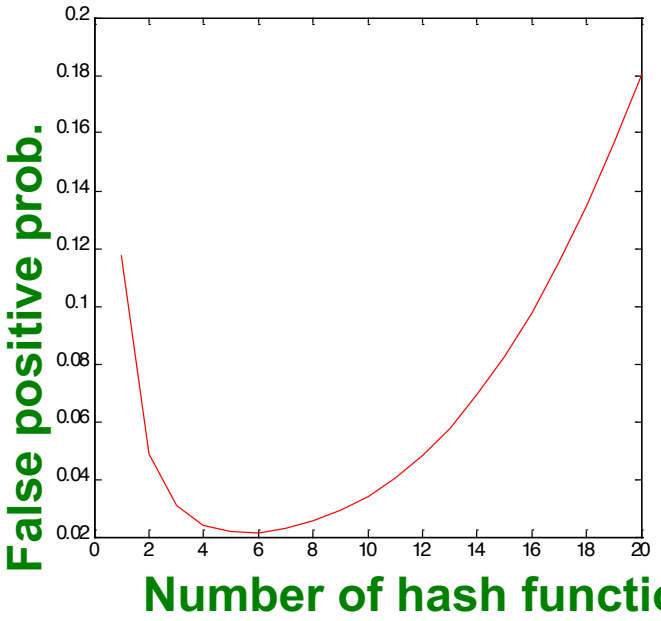
- Aber wir haben k unabhängige Hash-Funktionen und wir lassen x nur durch, falls **alle** k Hashvorgängen das Element x auf eine Bitfeld mit Wert **1** abbilden

- Also ist die **Wahrscheinlichkeit für ein falsch-positives** Resultat $= (1 - e^{-km/n})^k$

Burton H. Bloom: *Space/Time Trade-offs in Hash Coding with Allowable Errors*. In: *Communications of the ACM*. Band 13, Nr. 7, Juli **1970**

Bloom-Filter – Analyse (2)

- ***m* = 1 billion, *n* = 8 billion**
  - **k = 1**: $(1 - e^{-1/8}) =$ **0.1175**
  - **k = 2**: $(1 - e^{-1/4})^2 =$ **0.0493**



- **Was passiert, wenn *k* steigt?**
- "Optimaler" Wert für ***k***: ***n/m*** **ln(2)**
  - **In unserem Fall:** Optimal ist **k = 8 ln(2) = 5.54 ≈ 6**
    - **Fehler bei k = 6**: $(1 - e^{-6/8})^6 =$ **0.0215**

Bloom Filter: Zusammenfassung

- **Bloom-Filter garantieren, dass falsch-positive Ausgaben selten sind und verwenden begrenzten Speicher**
  - Gut zur Vorverarbeitung bevor teure Tests durchgeführt werden
- **Geeignet für Hardware-Implementation**
  - Hash-Vorgänge können parallelisiert werden

- Ist es besser, **1** großes **B** zu haben oder ***k*** kleine **B**s?
  - **Es ist gleich:** $(1 - e^{-km/n})^k$ vs. $(1 - e^{-m/(n/k)})^k$
  - Aber **1 großes B** ist einfacher

Filterung von Datenströmen

- **Fenster-weise Verarbeitung eines Datenstroms**
- Gegeben sei eine Liste von Schlüsselworten **S**
- **Bestimme Ähnlichkeit von Tupeln im Fenster mit Schlüsseln in S**
- **Anwendung: Erkennen von bestimmten Mustern**
  - **Z.B. bei Data Mining**

Andrei Broder, Michael Mitzenmacher: *Network applications of bloom filters: A survey*. In: *Internet Mathematics*. **2002**, S. 636–646

Min-Hashing

- Gegeben zwei Mengen A und B von Objekten
- Zum Beispiel sind A und B Text-Dokumente mit Wörtern.
- Ein oft benutztes Ähnlichkeitsmaß ist der **Jaccard Koeffizient**:

$$J(A,B) := \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

Siehe Teil Information Retrieval in dieser Vorlesung

Idee hinter Min-Hashing

- Berechne für alle Elemente einer Menge A eine Hashfunktion, die $a \in A$ einem Integer-Wert zuweist.

Siehe Wörterbucher in AuD

- Betrachte den kleinsten dieser Werte $h_{min}(A)$
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Mengen A und B dieser min-Wert identisch ist?

Andrei Broder, On the resemblance and containment of documents. In SEQUENCES '97 Proceedings of the Compression and Complexity of Sequences, **1997**

Beispiel

$S_1 = \{\text{Apfel, Birne, Tomate, Orange}\}$
$S_2 = \{\text{Tomate, Zitrone, Orange, Gurke}\}$
$S_3 = \{\text{Kokosnuss, Aprikose, Banane}\}$

Objekt	Hashwert
Apfel	263228505
Birne	1512322680
Tomate	2655545330
Orange	2426202636
Zitrone	4196103473
Gurke	3877529293
Kokosnuss	2846776306
Aprikose	41486361
Banane	4138599105

© S. Michel, TU Kaiserslautern

Beispiel

S_1 ={Apfel, Birne, Tomate, Orange}
S_2 ={Tomate, Zitrone, Orange, Gurke}
S_3 ={Kokosnuss, Aprikose, Banane}

Objekt	Hashwert
Apfel	263228505
Birne	1512322680
Tomate	2655545330
Orange	2426202636
Zitrone	4196103473
Gurke	3877529293
Kokosnuss	2846776306
Aprikose	41486361
Banane	4138599105

Wir haben also

$$h_{min}(S_1) = 263228505$$
$$h_{min}(S_2) = 2426202636$$
$$h_{min}(S_3) = 41486361$$

© S. Michel, TU Kaiserslautern

Min-Hashing (2)

- Die Wahrscheinlichkeit $Pr[h_{min}(A) = h_{min}(B)]$ steht in direkter Verbindung zum Jaccard-Koeffizienten:

$$Pr[h_{min}(A) = h_{min}(B)] = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

Anwendung

- Suche nach ähnlichen Mengen: Betrachte nur Paare von Mengen, deren min-Wert identisch ist
- Bzw., nehme $Pr[h_{min}(A) = h_{min}(B)]$ als Näherung für den Jaccard-Koeffizienten
- Wie gut funktioniert das?

© S. Michel, TU Kaiserslautern

Beispiel

S_1 ={Apfel, Birne, Tomate, Orange}
S_2 ={Tomate, Zitrone, Orange, Gurke}
S_3 ={Kokosnuss, Aprikose, Banane}

Objekt	Hashwert
Apfel	263228505
Birne	1512322680
Tomate	2655545330
Orange	2426202636
Zitrone	4196103473
Gurke	3877529293
Kokosnuss	2846776306
Aprikose	41486361
Banane	4138599105

Wir haben also

$$h_{min}(S_1) = 263228505$$
$$h_{min}(S_2) = 2426202636$$
$$h_{min}(S_3) = 41486361$$

Die Min-Werte sind für alle drei Mengen unterschiedlich. D.h. wir bekommen eine **Schätzung von** 0 für den Jaccard-Koeffizienten, obwohl dieser für S_1 S_2 nicht 0 ist.

© S. Michel, TU Kaiserslautern

Beispiel: zweite Hashfunktion

$S_1 = \{\text{Apfel, Birne, Tomate, Orange}\}$
$S_2 = \{\text{Tomate, Zitrone, Orange, Gurke}\}$
$S_3 = \{\text{Kokosnuss, Aprikose, Banane}\}$

Objekt	Hashwert 1	Hashwert 2
Apfel	263228505	3747123490
Birne	1512322680	2691314150
Tomate	2655545330	618073562
Orange	2426202636	167471787
Zitrone	4196103473	3040259855
Gurke	3877529293	2452364051
Kokosnuss	2846776306	2613259214
Aprikose	41486361	2319295075
Banane	4138599105	765635320

© S. Michel, TU Kaiserslautern

Beispiel: zweite Hashfunktion

S_1 ={Apfel, Birne, Tomate, Orange}
S_2 ={Tomate, Zitrone, Orange, Gurke}
S_3 ={Kokosnuss, Aprikose, Banane}

Objekt	Hashwert 1	Hashwert 2
Apfel	263228505	3747123490
Birne	1512322680	2691314150
Tomate	2655545330	618073562
Orange	2426202636	167471787
Zitrone	4196103473	3040259855
Gurke	3877529293	2452364051
Kokosnuss	2846776306	2613259214
Aprikose	41486361	2319295075
Banane	4138599105	765635320

Wir haben also

$$h1_{min}(S_1) = 263228505$$
$$h1_{min}(S_2) = 2426202636$$
$$h1_{min}(S_3) = 41486361$$

$$h2_{min}(S_1) = 167471787$$
$$h2_{min}(S_2) = 167471787$$
$$h2_{min}(S_3) = 765635320$$

© S. Michel, TU Kaiserslautern

Beispiel 2

S_1 ={Apfel, Birne, **Tomate**, **Orange**}
S_2 ={**Tomate**, Zitrone, **Orange**, Gurke}
S_3 ={Kokosnuss, Aprikose, Banane}

$$h1_{min}(S_1) = 263228505$$
$$h1_{min}(S_2) = 2426202636$$
$$h1_{min}(S_3) = 41486361$$

$$h2_{min}(S_1) = 167471787$$
$$h2_{min}(S_2) = 167471787$$
$$h2_{min}(S_3) = 765635320$$

	Schätzung	Echt
$J(S_1, S_2)$	$1/2$	$2/6$
$J(S_2, S_3)$	0	0
$J(S_1, S_3)$	0	0

© S. Michel, TU Kaiserslautern

Min-Hashing - Mehrere min-Werte bzw. Hashfunktionen

Mehrere (k) Hash-Funktionen mit je einem min-Wert

- Betrachte k (unabhängige) Hashfunktionen, die jeweils einen min-Wert liefern.
- Approximiere $J(A,B)$ mit Anteil der übereinstimmenden min-Werte.
- Wie im Beispiel zuvor.

Mehrere (k) min-Werte & eine Hashfunktion

- Betrachte nur eine Hashfunktion, aber nehme von dieser die k kleinsten Werte.

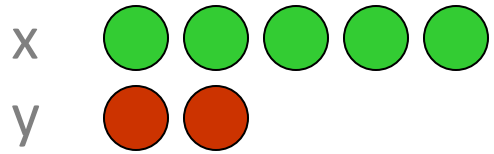
Der Fehler ist bei beiden Schemata $O(1/\sqrt{k})$. Ohne Beweis

© S. Michel, TU Kaiserslautern

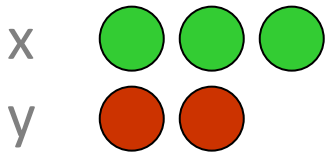
Approximation mit
Stichproben und Skizzen
Probabilistische Garantien

Stromverarbeitungsmodelle – interner Speicher A[·]

- Absolute Werte (Zeitreihenmodell)
  - Jeder neue Wert pro Zeiteinheit x wird gespeichert (x aus Menge von Zeitpunkten)
- Akkumulierte Werte
  - Nur Eingänge (Akkumulation von Zählern)
    - Zähler immer ≥ 0
    - Multimengenmodell
    - (x, y sind Objekte bzw. Objekttypen)

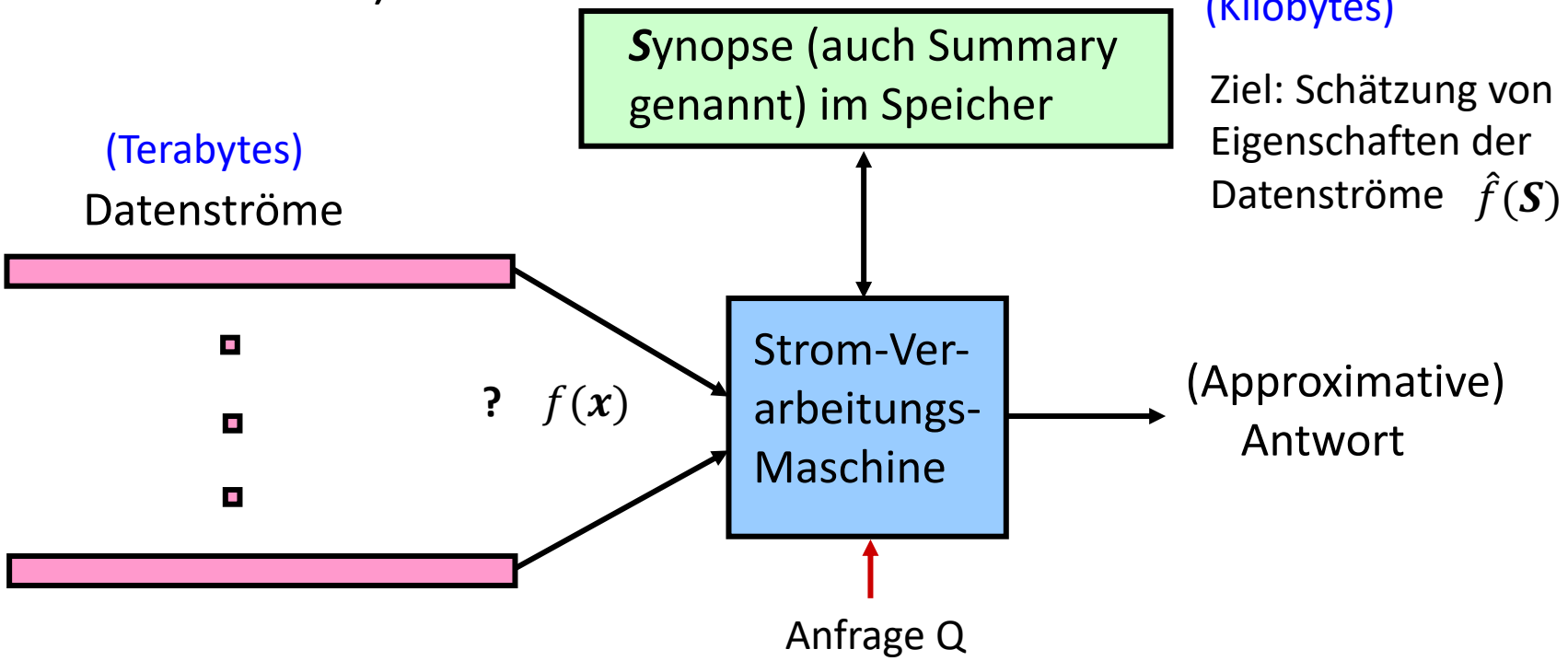


  - Eingänge und Abgänge (Drehkreuzmodell)
    - Multimengenmodell
    - (x, y sind Objekte bzw. Objekttypen)



Approximation

- Daten werden nur einmal betrachtet und
- Speicher für Zustand (stark) begrenzt: O(poly(log(|Strm|))
- Rechenzeit pro Tupel möglichst klein (auch um Zustand zu modifizieren)



Synopsen

Eine kleine Zusammenfassung großer Datenmengen, die ziemlich gut die interessierenden statistischen Größen abschätzen

Nützliche Eigenschaften:

- Es ist leicht, ein Element hinzuzufügen
- Unterstützung für Löschungen ("undo")
- Zusammenführung mehrerer Synopsen sollte leicht sein
  Wichtig für horizontale Skalierung
- Flexibler Einsatz: Unterstützung mehrerer Anfragetypen

© Edith Cohen

Was kann über einem Strom berechnet werden?

Einige Funktionen sind leicht:
min, max, sum, …

Es wird jeweils nur eine einzige Variable benötigt:

- Maximum: **Initialisiere $s \leftarrow 0$**

  For element x do $s \leftarrow \max s, x$

- Sum: **Initialisiere $s \leftarrow 0$**

  For element x do $s \leftarrow s + x$

Die "Synopse" ist ein einzelner Wert
Eine solche Synopse kann zusammengeführt werden

© Edith Cohen

Non-Standard-Datenbanken

Approximationstechniken

Prof. Dr. Ralf Möller

Universität zu Lübeck

Institut für Informationssysteme

Approximation und Randomisierung

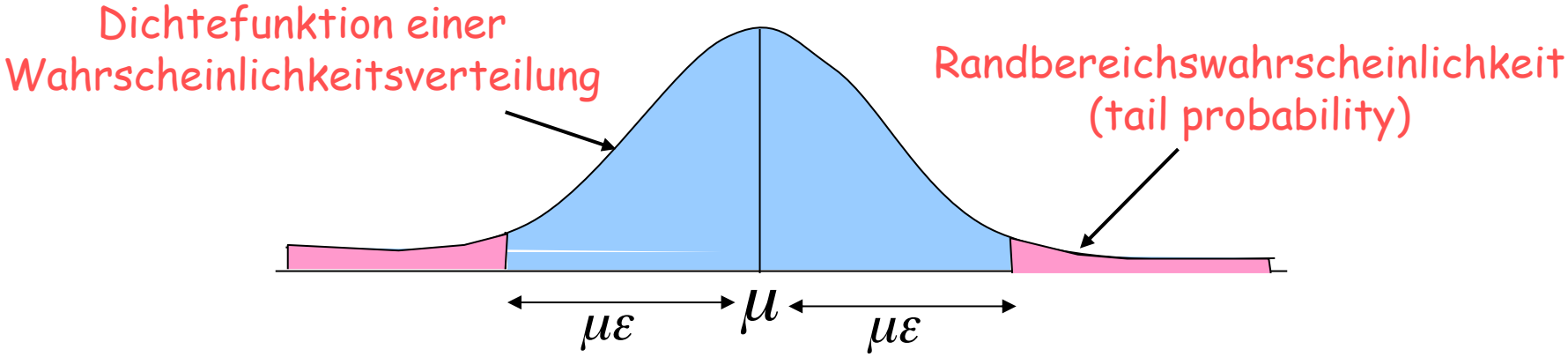
- Viele Probleme sind schwierig exakt zu berechnen
  - Anzahl der Elemente einer gegebenen Menge von Elementklassen identisch in zwei verschiedenen Strömen?
  - Platzbedarf linear bezogen auf Anzahl der Elementklassen
- **Approximation**: Finde eine Antwort, die korrekt ist bezogen auf einen gegebenen Faktor
  - Finde Antwort im Bereich von $\pm$10% des korrekten Ergebnisses
  - **Genereller**: finde $(1\pm \varepsilon)$-Faktor-Approximation
- **Randomisierung**: Erlaube Fehler, wenn er mit kleiner Wahrscheinlichkeit vorkommt
  - Eine von 10000 Antworten darf falsch sein
  - **Genereller**: Erfolgswahrscheinlichkeit $(1-\delta)$
- *Approximation **und** Randomisierung*: (ε, δ)-Approximationen

Probabilistische Garantien

- Benutzerbestimmte (ε,δ)-Approximationen
  - Beispiel: Tatsächliche Antworten innerhalb von Faktor 1.1 mit Wahrscheinlichkeit ≥ 0.8 ($\varepsilon = 0.1, \delta = 0.2$)
- Wie können wir prüfen, ob durch ein spezielles Verfahren die Gütekriterien eingehalten werden?
  - Verwendung von Randbereichsabschätzungen

Exkurs: Randbereichsabschätzungen

- Generelle Grenzen der Randbereichswahrscheinlichkeit einer Zufallsvariable (Wahrscheinlichkeit, dass Wert weit vom Erwartungswert abweicht)



- Basisungleichungen: Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz Var[X]. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

Markov-Ungleichung:

$$\Pr(X \geq (1+\varepsilon)\mu) \leq \frac{1}{1+\varepsilon}$$

Chebyshev-Ungleichung:

$$\Pr(|X-\mu| \geq \mu\varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{\mu^2\varepsilon^2}$$

Stichproben (Abtastung, sampling): Grundlagen

Idee: Ein kleiner Ausschnitt (Stichprobe) *S* einer Datenmenge repräsentiert die Eigenschaften aller Daten

- Zur schnellen Approximierung, wende "modifizierte" Anfrage auf *S* an
- Beispiel: select agg from R where R.e is odd n=12

Datenstrom: 9 3 5 2 7 1 6 5 8 4 9 1

Ausschnitt S: 9 5 1 8

- agg = avg → Mittel der ungeraden Elemente in *S*

Antwort: 5

- agg = count → Mittel über Summanden abgel. aus e in S mit
  - *n* falls *e* ungerade
  - 0 falls *e* gerade

Antwort: 12*3/4 =9

Randbereichsschätzungen für Summen

- Hoeffding-Ungleichung: Seien X_1, ..., X_m unabhängige Zufallsvariablen mit $0 \leq X_i \leq r$

Sei $\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_i X_i$ und μ der Erwartungswert von $\bar{X}$

Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\Pr(|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon) \leq 2\exp^{\frac{-2m\varepsilon^2}{r^2}}$$

- Anwendung für Anfragen mit Mittelwert-Operation (avg) :
  - m ist Größe der Untermenge der Stichprobe S, die das Prädikat erfüllt (3 im Beispiel)
  - r ist Bereich der Elemente in der Stichprobe (9 im Beispiel)
- Anwendung auf Zählanfragen (count):
  - m ist Größe der Stichprobe S (4 im Beispiel)
  - r ist Anzahl der Elemente n im Strom (12 im Beispiel)

J. M. Hellerstein, P. J. Haas, and H. J. Wang. "Online Aggregation". ACM SIGMOD 1997

Randbereichsschätzungen für Summen (2)

Für Bernoulli-Versuche (zwei mögliche Erg.) sogar stärke Eingrenzung möglich:

- Chernoff Abschätzung: Seien $X_1, \ldots, X_m$ unabhängige Zufallsvariable für Bernoulli-Versuche, so dass $Pr[X_i=1] = p$ ($Pr[X_i=0] = 1-p$)
- Sei $X = \sum_i X_i$ und $\mu = mp$ der Erwartungswert von X dann gilt, für jedes $\varepsilon > 0$

$$\Pr(|X - \mu| \geq \mu\varepsilon) \leq 2\exp^{\frac{-\mu\varepsilon^2}{2}}$$

- Verwendung für Anzahlanfrage (count queries):
  - m ist Größe der Stichprobe S (4 im Beispiel)
  - p ist Anteil der ungeraden Elemente im Strom (2/3 im Beispiel)
- Chernoff-Abschätzung liefert engere Grenzen für Anzahlanfragen als die Hoeffding-Ungleichung

J. M. Hellerstein, P. J. Haas, and H. J. Wang. "Online Aggregation". ACM SIGMOD 1997

Stichproben für Datenströme

- **(1)** Betrachtung einer **festgelegten Teilmenge** der Elemente, die im Datenstrom auftreten (z.B. 1 von 10)
- **(2)** Extraktion einer **Teilmenge fester Größe** über einem potentiell unendlichen Strom
  - Zu jedem Zeitpunkt k liegt eine Teilmenge der Größe s vor
  - **Was sind die Eigenschaften der Teilmenge, die verwaltet wird?**
    Für alle Zeitpunkte k, soll jedes der n Elemente, die betrachtet wurden, die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, in die Teilmenge übernommen zu werden

Verwendung einer festgelegten Teilmenge

- **Szenario:** Auswertung von Anfragen an eine Suchmaschine
  - **Strom von Tupeln:** (user, query, time)
  - **Stromanfrage:** **How often did a user run the same query in a single day**
  - Ann: Platz für **1/10** des Stroms
- **Naive Lösung:**
  - Generiere ganzzahlige Zufallszahl **[0..9]** für jede Anfrage
  - Speichere Anfrage falls Zahl = **0**, sonst ignoriere Stromelement (eine Anfrage)

Probleme des naiven Ansatzes

- **Auswertung von: Welcher Bruchteil von Anfragen sind Duplikate?**
  - Nehme an, jeder Benutzer sendet ***x*** Anfragen einmal und ***d*** Anfragen zweimal (insgesamt also ***x*+2*d*** Anfragen)
    - **Korrekte Antwort: *d*/(*x*+*d*)**
  - **Vorgeschlagene Lösung: Verwende 10% der auftretenden Anfragen aus dem Strom**
    - **Problem: Nicht jede Mehrfachanfrage tritt mehrfach in der Stichprobe auf!**
    - **Ergebnis wird verfälscht.**

Lösung: Stichprobe mit Benutzern

- Wähle **1/10** der **Benutzer** und werte alle ihre Anfagen aus

- Verwende Hash-Funktion, mit der (name, user id) gleichverteilt auf 10 Werte abgebildet wird, speichere Anfragen in Hashtabelle

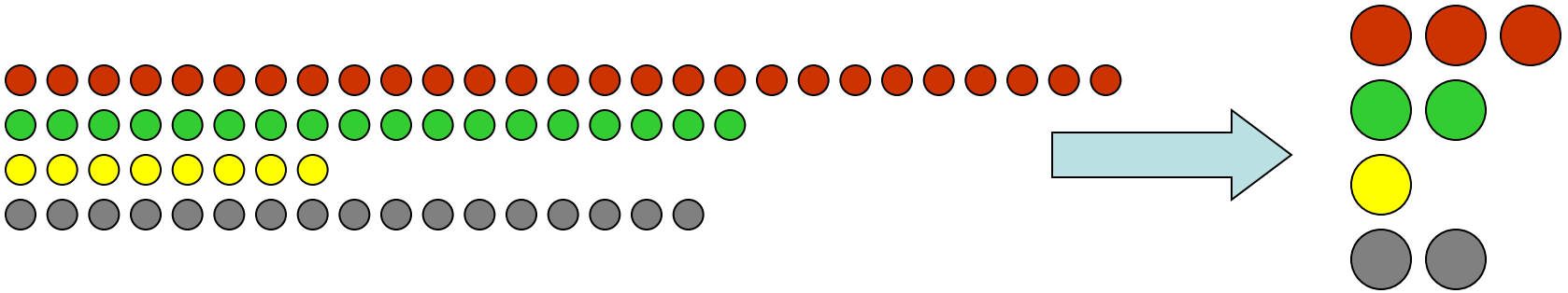
Generalisierte Lösung

- **Strom von Tupeln mit Schlüsseln:**
  - Schlüssel = Teilmenge der Tupelkomponenten
    - Z.B.: Tupel = (user, search, time); Schlüssel ist **user**
  - Wahl der Schlüssel hängt von der Anwendung ab

- **Bestimmung einer Stichprobe als *a/b* Bruchteil des Stroms:**
  - Hashen der Schlüssel auf ***b*** Hashwerte (Eimer)
  - Wähle das Tupel, falls Hashwert höchstens ***a***

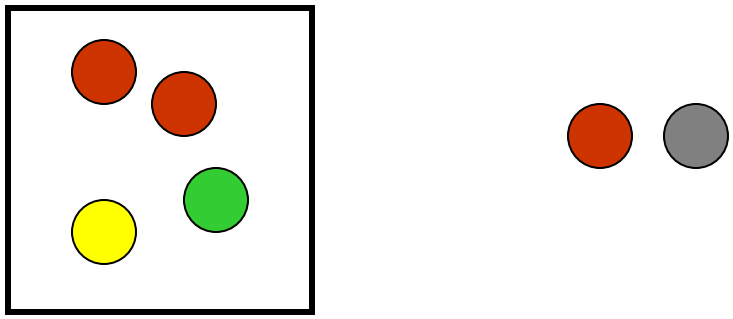
Wie 30% Stichproblem generieren?
Hash auf b=10 Eimer, wähle Tupel, falls in einen der ersten drei Eimer gehasht

Stichproben für Datenströme



- Kernproblem: Wähle Stichprobe von m Elementen gleichverteilt aus dem Strom
- Herausforderung: Länge des Stroms nicht bekannt
  - Wann/wie oft Stichprobe entnehmen?
- Zwei Lösungsvorschläge, für verschiedene Anwendungen:
  - Reservoir Sampling (aus den 80ern?)
  - Min-wise Sampling (aus den 90ern?)

Reservoir Sampling (Reservoir bildet Synopse)



- Übernehme erste m Elemente
- Wähle i-tes Element (i>m) mit Wahrscheinlichkeit m/i
- Wenn neues Element gewählt, ersetze beliebiges Element im Reservoir
- Optimierung: Wenn i groß, berechne jeweils nächstes Element (überspringe Zwischenelemente)

J. S. Vitter. "Random Sampling with a Reservoir". ACM TOMS, **1985**

Reservoir Sampling – Analyse

- Analysieren wir einen einfachen Fall: m = 1
- Wahrscheinlichkeit, dass i-tes Element nach n Elementen die Stichprobe bildet:
  - Wahrscheinlichkeit, dass i bei Ankunft gewählt wird
    × Wahrscheinlichkeit dass i "überlebt"

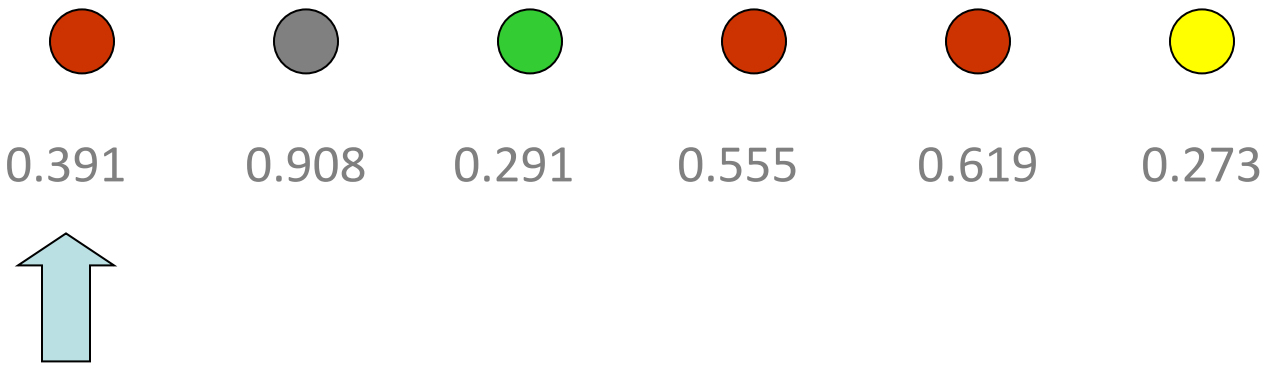
$$\frac{1}{i} \times \left(1 - \frac{1}{i+1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{i+2}\right) \ \ldots \ \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{i}} \times \frac{\cancel{i}}{\cancel{i+1}} \times \frac{\cancel{i+1}}{\cancel{i+2}} \ \ldots \ \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \times \frac{\cancel{n-1}}{n} = 1/n$$

- Analyse für m > 1 ähnlich, Gleichverteilung leicht zu zeigen
- Nachteil: Nicht einfach auf mehrere Ströme parallelisierbar

Min-wise Sampling

- Für jedes Element: Wähle Anteil zwischen 0 und 1
- Wähle Element mit kleinstem Anteilswert



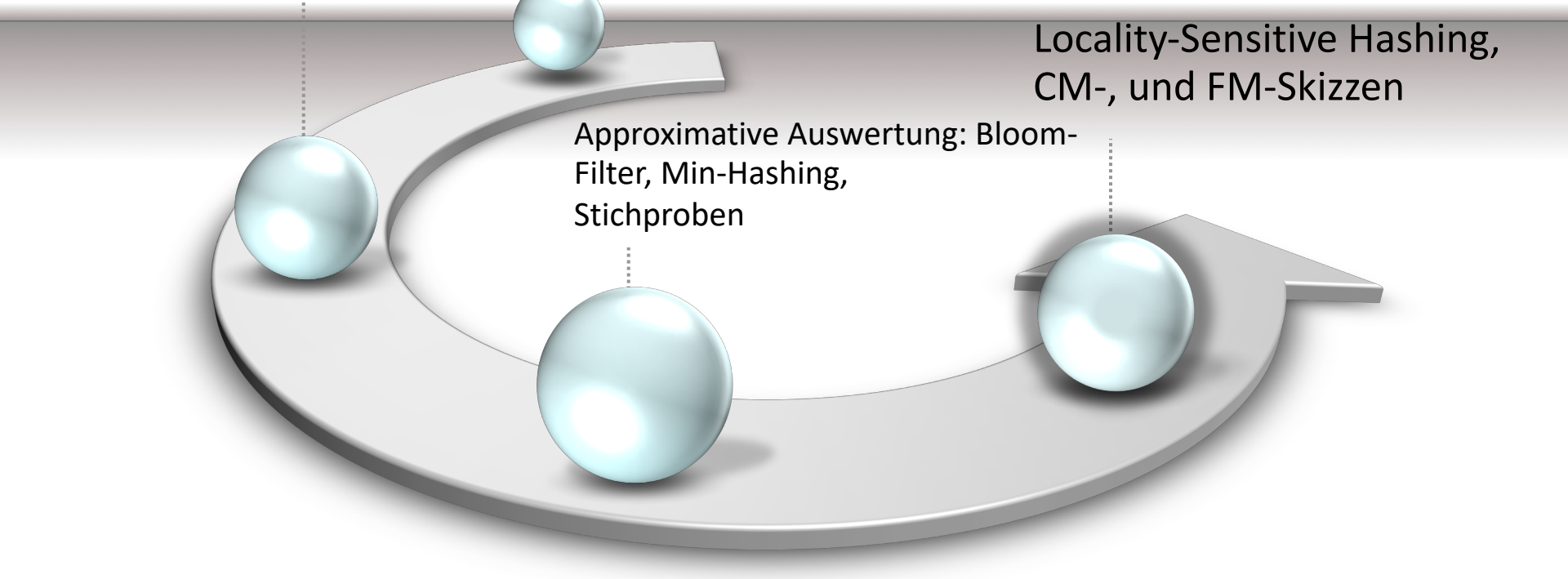
- Jedes Element hat gleiche Chance, kleinstes Element zu werden, also gleichverteilt
- Anwendung auf mehrere Ströme, dann Zusammenführung

S. Nath, P. B. Gibbons, S. Seshan, and Z. R. Anderson. Synopsis diffusion for robust aggregation in sensor networks. In ACM SenSys, **2004**

Übersicht

Intervall-Skyline, inkrementelle Auswertungstechniken Skizzen

Stromkonzept, relationale Anfragesprachen, exakte Auswertung, QoS-Angaben



Locality-Sensitive Hashing, CM-, und FM-Skizzen

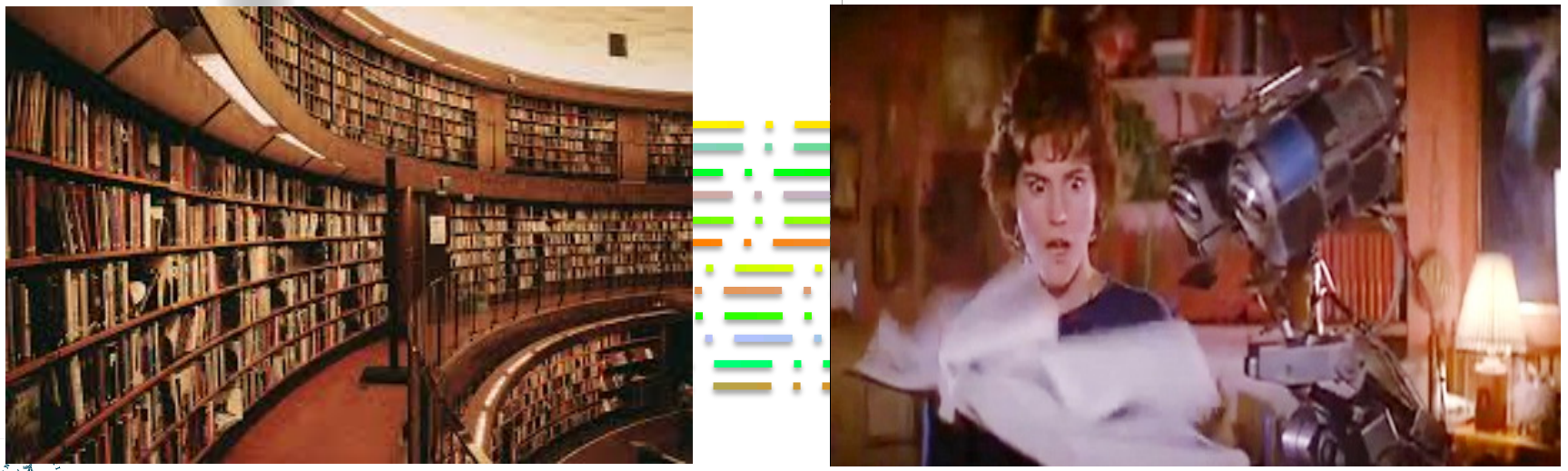
Approximative Auswertung: Bloom-Filter, Min-Hashing, Stichproben

Approximative Ähnlichkeitssuche in hohen Dimensionen

- Vergleiche Daten im Strom mit Daten aus großer Kollektion
- Suche k ähnlichste Dateneinheiten in Kollektion

- Anzahl der Vergleichsmerkmale kann sehr groß werden

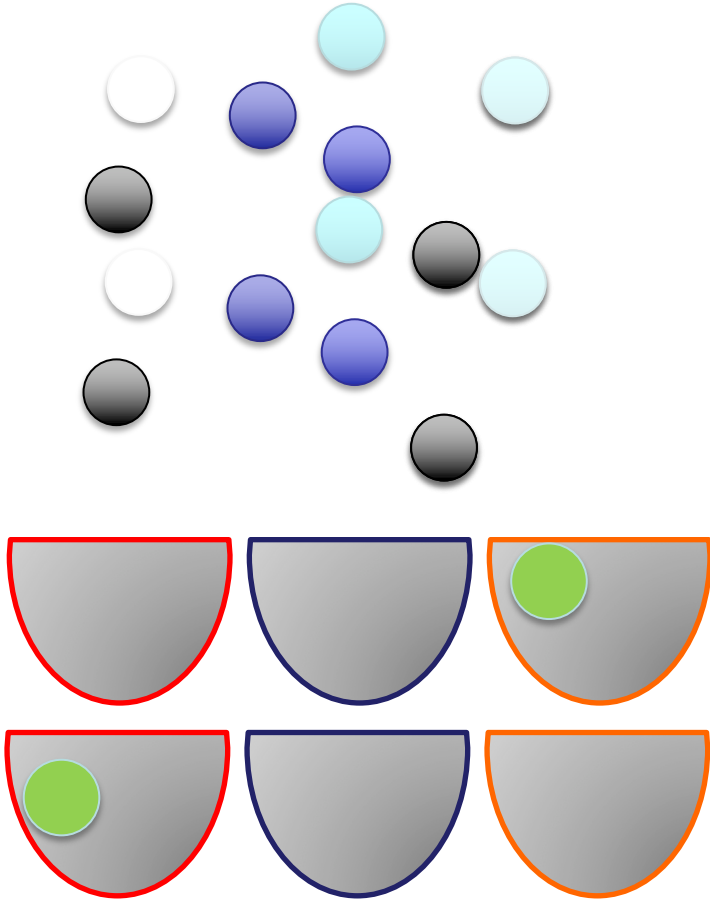
Gionis, A.; Indyk, P.; Motwani, R. (**1999**). "Similarity Search in High Dimensions via Hashing". Proceedings of the 25th Very Large Database (VLDB) Conference



Approximative Reduktion der Vergleiche

Locality Sensitive Hashing (LSH):

- Jedes Objekt wird in Partition gehasht
- Objekte in der gleichen Partition (Kollision) häufig ähnlich
- Es gibt falsch-negative Ergebnisse (zwei ähnliche Objekten in verschiedenen Partitionen)
- Fehler kann klein gehalten werden
- Um die Wahrscheinlichkeit von Kollisionen zu erhöhen, werden mehrere Hashtabellen aufgebaut
- Vergleiche Objekte mit Objekten aus gleicher Partition in jeder Hashtabelle



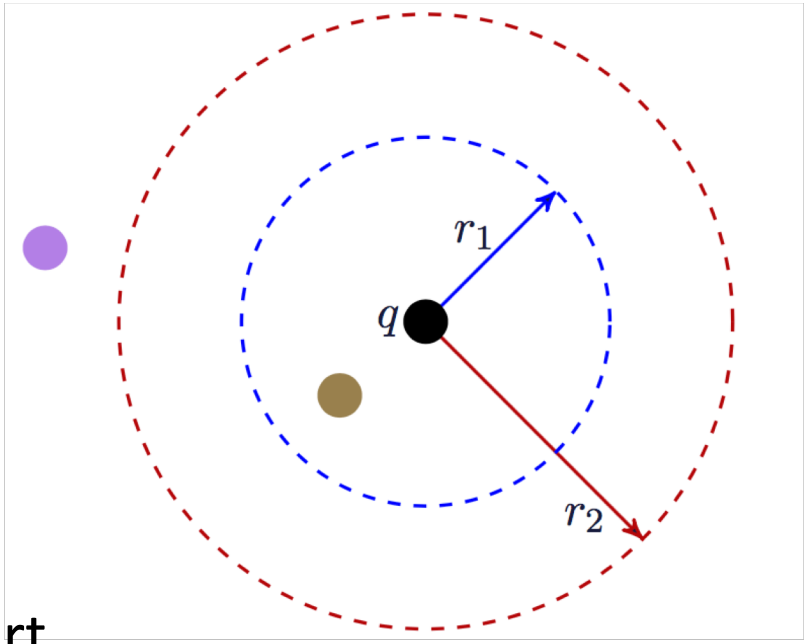
Indyk, Piotr.; Motwani, Rajeev. (**1998**). "Approximate Nearest Neighbors: Towards Removing the Curse of Dimensionality.". Proceedings of 30th Symposium on Theory of Computing.

Was bedeutet "locality-sensitive"

- Eine Familie von Hashfunktionen $H = \{h : S \rightarrow U\}$ heißt (r_1,r_2,p_1,p_2)-sensitiv falls die folgenden beiden Bedingungen für beliebige Punkte $q,v \in S$ gelten:

Falls $dist(q, v) \leq r_1$
dann $Pr_H(h(q) = h(v)) \geq p_1$

Falls $dist(q, v) > r_2$
dann $Pr_H(h(q) = h(v)) \leq p_2$

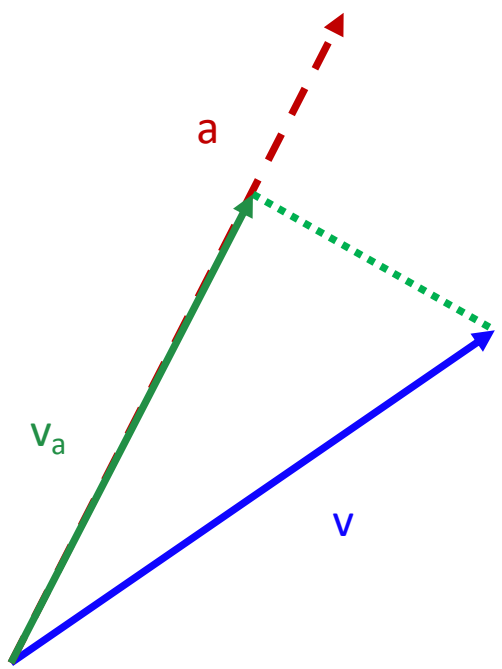


- Analyse:

  Falls $r_1 < r_2$ und $p_1 > p_2$ gilt:
  Ähnliche Objekte bekommen häufiger den gleichen Hash-Wert als weniger ähnliche

© S. Michel, TU Kaiserslautern

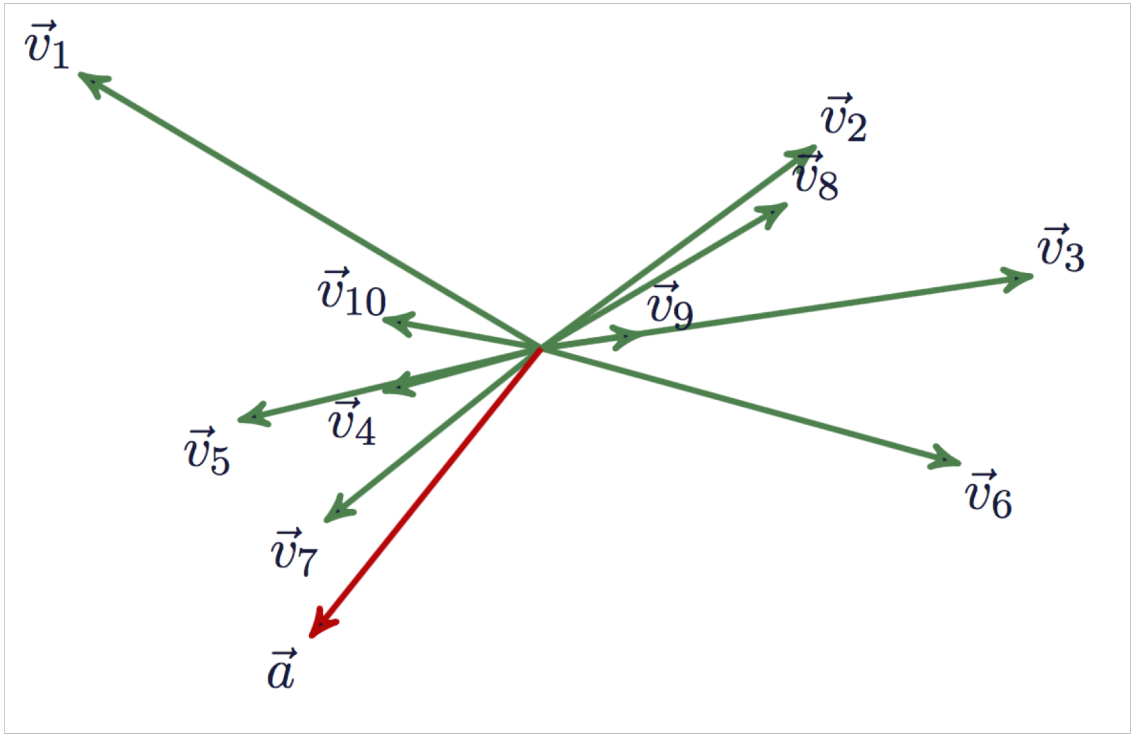
D-dimensionaler Vektorraum: Idee für Hashfunktion



- Gegeben Vektor v im d-dimensionalen Raum
- Wie kann man v mit weniger als d Werten beschreiben?
- Nehme weiteren Vektor a
- Betrachte Skalarprodukt $a \cdot v$
- Ähnliche Vektoren v haben ähnliche Werte $a \cdot v$
- Also, erste Idee für Hashfunktion: $h(v) := \lfloor a \cdot v \rfloor$

© S. Michel, TU Kaiserslautern

LSH: Beispiel

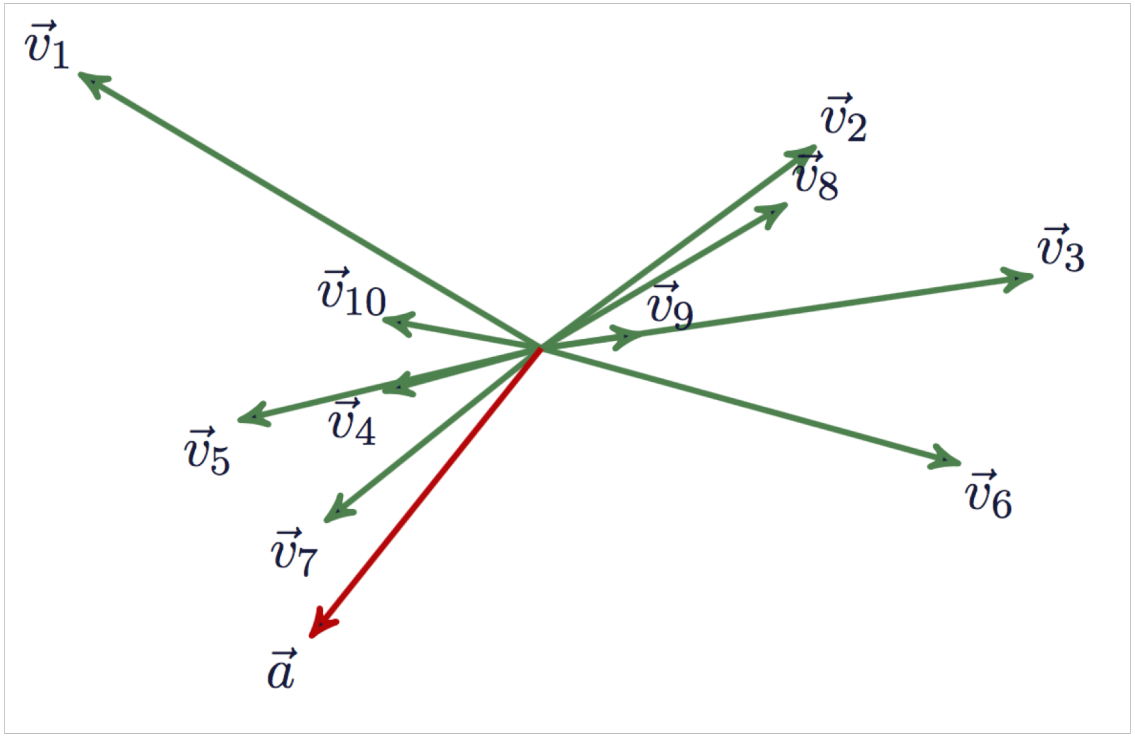


$$\vec{v_1} = (-2.1, -1.1)$$
$$\vec{v_2} = (2.4, -1.0)$$
$$\vec{v_3} = (-1.6, -0.5)$$
$$\vec{v_4} = (-3.9, -0.9)$$
$$\vec{v_5} = (-1.0, -0.2)$$
$$\vec{v_6} = (-2.6, 0.0)$$
$$\vec{v_7} = (-0.7, 1.2)$$
$$\vec{v_8} = (1.2, -0.7)$$
$$\vec{v_9} = (-2.6, 0.5)$$
$$\vec{v_{10}} = (-0.8, 1.1)$$

$$\vec{a} = (-1.6, -2)$$

© S. Michel, TU Kaiserslautern

LSH: Beispiel



Mit Hashfunktion

$$h(v) = \lfloor \vec{a} \cdot \vec{v} \rfloor$$

erhalten wir

$$h(\vec{v}_1) = 1$$
$$h(\vec{v}_2) = -6$$
$$h(\vec{v}_3) = -7$$
$$h(\vec{v}_4) = 2$$
$$h(\vec{v}_5) = 4$$
$$h(\vec{v}_6) = -4$$
$$h(\vec{v}_7) = 4$$
$$h(\vec{v}_8) = -5$$
$$h(\vec{v}_9) = -2$$
$$h(\vec{v}_{10}) = 1$$

Wir interpretieren die Hashwerte als Label der Buckets, in die wir die Objekte (Vektoren) stecken....

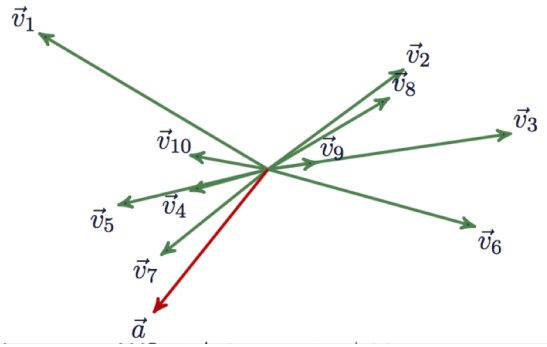
© S. Michel, TU Kaiserslautern

LSH: Beispiel

Bucket -7	Bucket -6	Bucket -5
$\vec{v}_3$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_8$
Bucket -4	**Bucket -3**	**Bucket -2**
$\vec{v}_6$		$\vec{v}_9$
Bucket -1	**Bucket 0**	**Bucket 1**
		$\vec{v}_1$ $\vec{v}_{10}$
Bucket 2	**Bucket 3**	**Bucket 4**
$\vec{v}_4$		$\vec{v}_5$ $\vec{v}_7$
Bucket 5	**Bucket 6**	**Bucket 7**

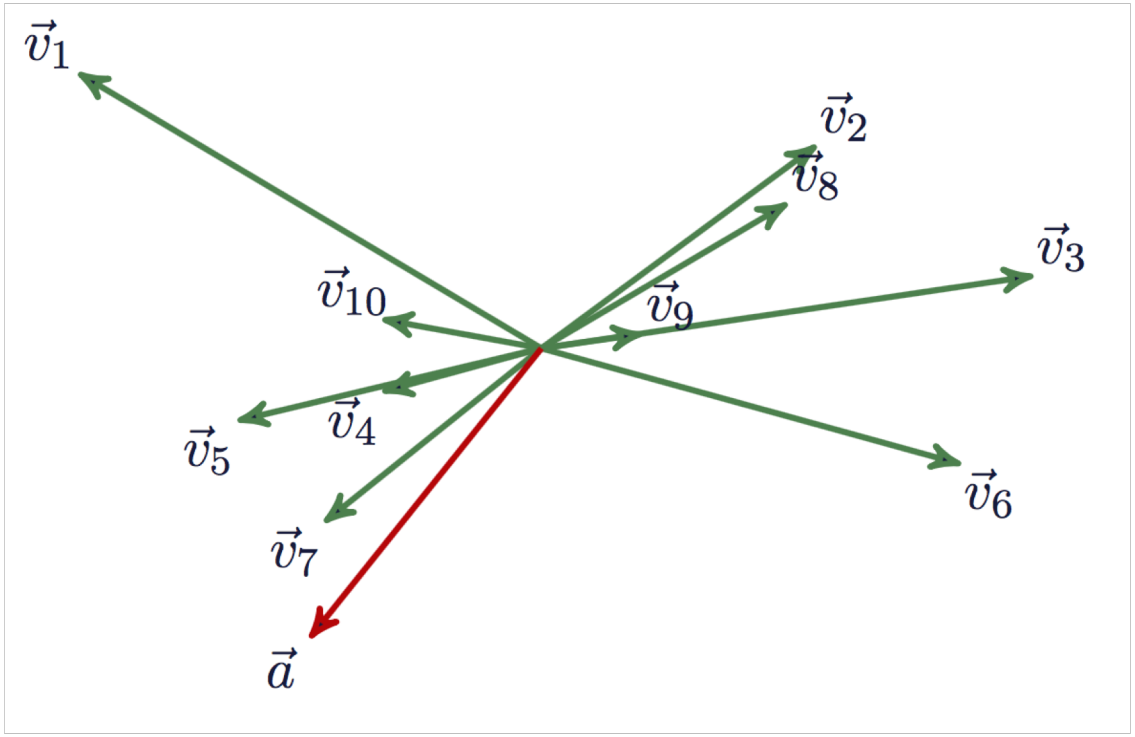
$$h(\vec{v}_1) = 1$$
$$h(\vec{v}_2) = -6$$
$$h(\vec{v}_3) = -7$$
$$h(\vec{v}_4) = 2$$
$$h(\vec{v}_5) = 4$$
$$h(\vec{v}_6) = -4$$
$$h(\vec{v}_7) = 4$$
$$h(\vec{v}_8) = -5$$
$$h(\vec{v}_9) = -2$$
$$h(\vec{v}_{10}) = 1$$

Kaum Kollisionen, viele leere Buckets. Was können wir tun?



© S. Michel, TU Kaiserslautern

LSH: Beispiel



Betrachte nun Hashfunktion

$$h(v) = \lfloor \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{2} \rfloor$$

$$h(\vec{v}_1) = 0$$
$$h(\vec{v}_2) = -3$$
$$h(\vec{v}_3) = -4$$
$$h(\vec{v}_4) = 1$$
$$h(\vec{v}_5) = 2$$
$$h(\vec{v}_6) = -2$$
$$h(\vec{v}_7) = 2$$
$$h(\vec{v}_8) = -3$$
$$h(\vec{v}_9) = -1$$
$$h(\vec{v}_{10}) = 0$$

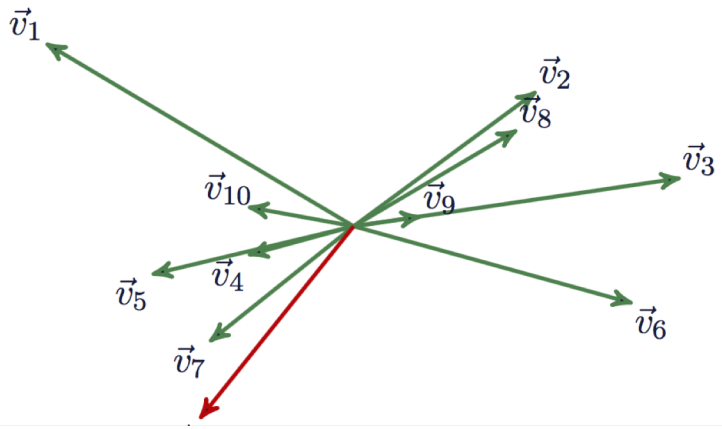
© S. Michel, TU Kaiserslautern

LSH: Beispiel

Bucket -4	Bucket -3	Bucket -2
$\vec{v}_3$	$\vec{v}_2$ $\vec{v}_8$	$\vec{v}_6$
Bucket -1	**Bucket 0**	**Bucket 1**
$\vec{v}_9$	$\vec{v}_1$ $\vec{v}_{10}$	$\vec{v}_4$
Bucket 2	**Bucket 3**	**Bucket 4**
$\vec{v}_5$ $\vec{v}_7$		

Hashwerte:

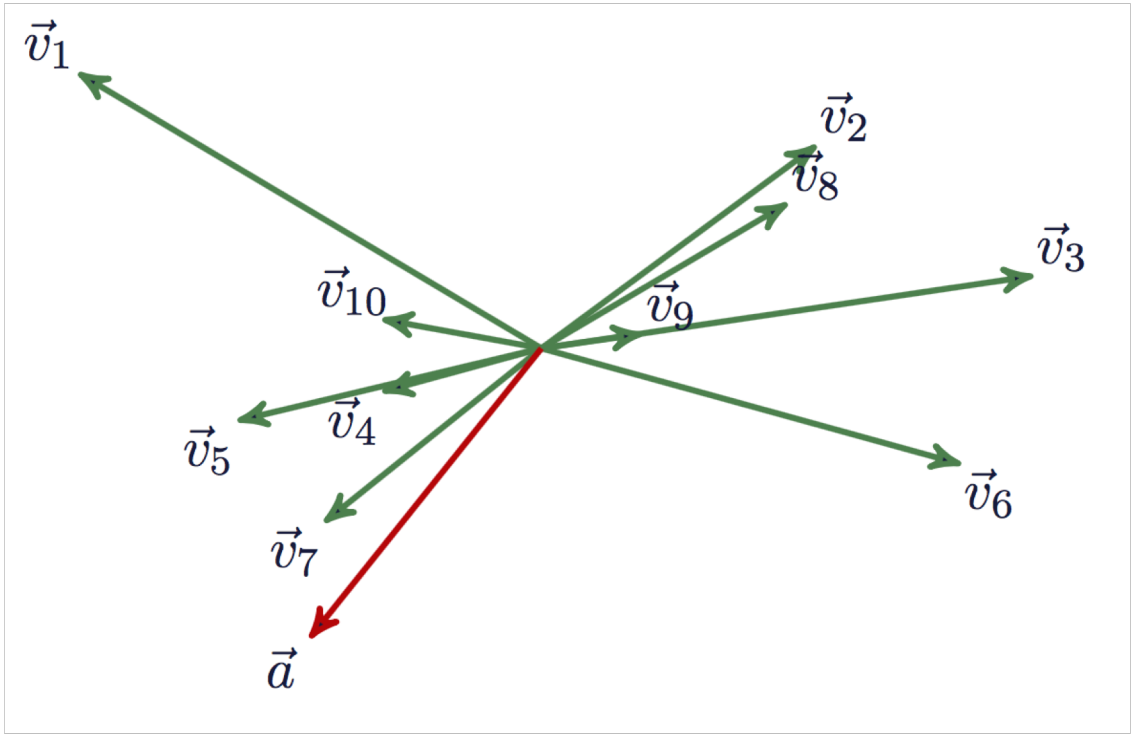
$h(\vec{v}_1) = 0$
$h(\vec{v}_2) = -3$
$h(\vec{v}_3) = -4$
$h(\vec{v}_4) = 1$
$h(\vec{v}_5) = 2$
$h(\vec{v}_6) = -2$
$h(\vec{v}_7) = 2$
$h(\vec{v}_8) = -3$
$h(\vec{v}_9) = -1$
$h(\vec{v}_{10}) = 0$



Wir sehen den Effekt: Weniger Buckets, mehr Kollisionen.

© S. Michel, TU Kaiserslautern

LSH: Beispiel



Mit Hashfunktion

$$h(v) = \lfloor \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{4} \rfloor$$

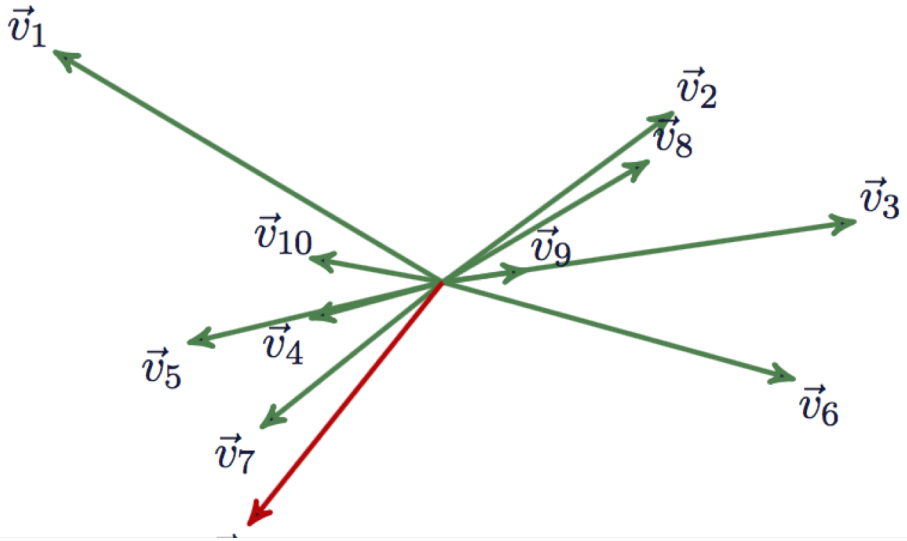
$$h(\vec{v}_1) = 0$$
$$h(\vec{v}_2) = -2$$
$$h(\vec{v}_3) = -2$$
$$h(\vec{v}_4) = 0$$
$$h(\vec{v}_5) = 1$$
$$h(\vec{v}_6) = -1$$
$$h(\vec{v}_7) = 1$$
$$h(\vec{v}_8) = -2$$
$$h(\vec{v}_9) = -1$$
$$h(\vec{v}_{10}) = 0$$

© S. Michel, TU Kaiserslautern

LSH: Beispiel

Bucket -2	Bucket -1	Bucket 0
$\vec{v}_2$ $\vec{v}_3$ $\vec{v}_8$	$\vec{v}_6$ $\vec{v}_9$	$\vec{v}_1$ $\vec{v}_4$ $\vec{v}_{10}$

Bucket 1	Bucket 2
$\vec{v}_5$ $\vec{v}_7$	



Hashwerte:

$h(\vec{v}_1) = 0$
$h(\vec{v}_2) = -2$
$h(\vec{v}_3) = -2$
$h(\vec{v}_4) = 0$
$h(\vec{v}_5) = 1$
$h(\vec{v}_6) = -1$
$h(\vec{v}_7) = 1$
$h(\vec{v}_8) = -2$
$h(\vec{v}_9) = -1$
$h(\vec{v}_{10}) = 0$

Anfrage: Finde Nachbarn von $\vec{v}_8$.

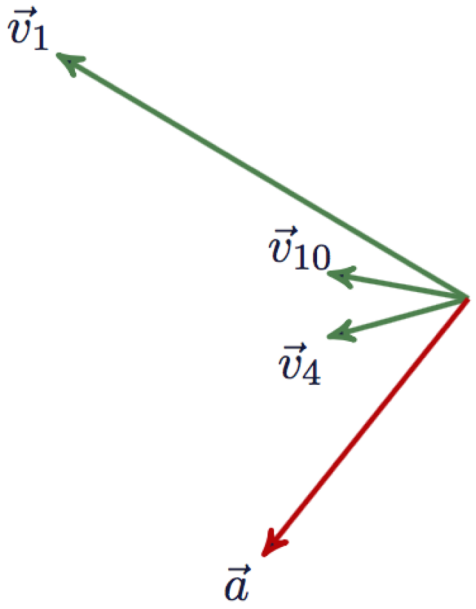
Vorgehensweise:
Schaue in Bucket mit Label -2 $(= h(\vec{v}_8))$.
Finde zwei Objekte.
Evaluiere diese.

© S. Michel, TU Kaiserslautern

LSH: Beispiel

Beobachtung: $\vec{v}_{10}$, $\vec{v}_4$ und $\vec{v}_1$ fallen in einen Bucket. Ok, $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_4$ sind in der Tat ähnlich, aber $\vec{v}_{10}$ passt nicht gut.

- **Wo ist das Problem?**
  Vektor $\vec{a}$ ist nicht in der Lage, gut zwischen diesen drei Vektoren zu unterscheiden.



Bucket 0
$\vec{v}_1$
$\vec{v}_4$
$\vec{v}_{10}$

© S. Michel, TU Kaiserslautern

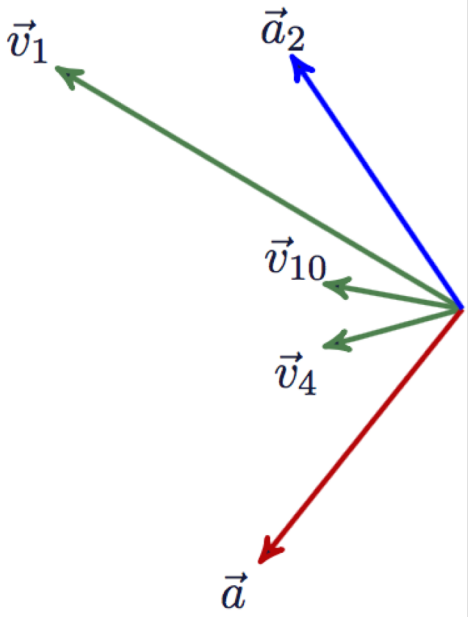
LSH: Beispiel

Beobachtung: $\vec{v}_{10}$, $\vec{v}_4$ und $\vec{v}_1$ fallen in einen Bucket. Ok, $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_4$ sind in der Tat ähnlich, aber $\vec{v}_{10}$ passt nicht gut.

- **Wo ist das Problem?**
  Vektor $\vec{a}$ ist nicht in der Lage,gut zwischen diesen drei Vektoren zu unterscheiden.
- **Lösung:** Wir nehmen einen zweiten Vektor $\vec{a}_2$ hinzu.

$$h_{a_2}(\vec{v}) := \lfloor \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{v}}{4} \rfloor$$

Mit $h_{a_2}(\vec{v}_{10}) = 0$, $h_{a_2}(\vec{v}_4) = 0$, $h_{a_2}(\vec{v}_1) = 2$



© S. Michel, TU Kaiserslautern

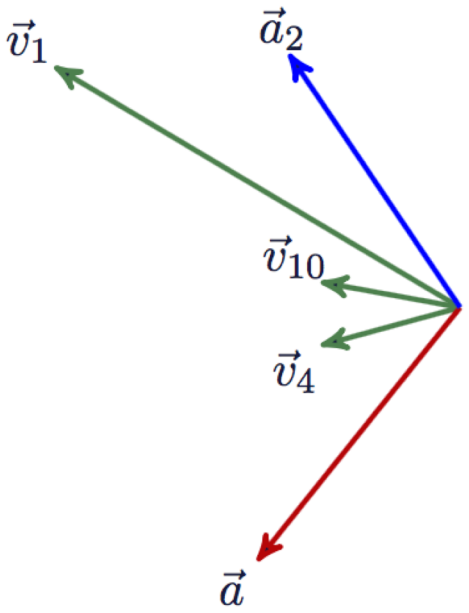
LSH: Beispiel

Beobachtung: $\vec{v}_{10}$, $\vec{v}_4$ und $\vec{v}_1$ fallen in einen Bucket. Ok, $\vec{v}_{10}$und $\vec{v}_4$ sind in der Tat ähnlich, aber $\vec{v}_1$ passt nicht gut.

- **Wo ist das Problem?**
  Vektor $\vec{a}$ ist nicht in der Lage,gut zwischen diesen drei Vektoren zu unterscheiden.
- **Lösung:** Wir nehmen einen zweiten Vektor $\vec{a}_2$ hinzu.

$$h_{a_2}(\vec{v}) := \lfloor \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{v}}{4} \rfloor$$

  Mit $h_{a_2}(\vec{v}_{10}) = 0$, $h_{a_2}(\vec{v}_4) = 0$, $h_{a_2}(\vec{v}_1) = 2$
- Wie sehen dann die Labels der Buckets aus? Konkatenation der einzelnen Hashwerte.
- Wir haben also die "Genauigkeit" der Buckets erhöht.
- Was ist der potentielle Nachteil?



Bucket (0,0)
$\vec{v}_4$
$\vec{v}_{10}$

...

© S. Michel, TU Kaiserslautern

Eine bekannte LSH-Variante

Für jeden d-dimensionalen Punkt $\vec{v}$ betrachten wir k unabhängige Hashfunktionen der Form:

$$h_{\vec{a},B}(\vec{v}) = \left\lfloor \frac{\vec{a} \cdot \vec{v} + B}{W} \right\rfloor$$

$\vec{a}$: d-dimensionaler Vektor, zufällig anhand Wahrscheinlichkeitsverteilung ausgewählt.
$W \in \mathbb{R}$, und $B \in [0,W]$. $\vec{v}$ wird auf $\vec{a}$ "projiziert" (Skalarprodukt).

"Beschriftung" der LSH Buckets

Mit k Hashfunktionen ist die Beschriftung des Buckets ein Integer-Vektor der Länge k:

$$g(\vec{v}) = (h_{\vec{a_1},B_1}(\vec{v}), ..., h_{\vec{a_k},B_k}(\vec{v}))$$

Welchen Einfluss hat k auf die Suche?

M. Datar et al.: Locality-sensitive hashing scheme based on p-stable distributions. Symposium on Computational Geometry, **2004**.

Objekte den Hash-Buckets zuweisen

LSH Bucket "Labels"

Mit k Hashfunktionen ist ein Label ein Integer-Vektor der Länge k:

$$g(\vec{v}) = (h_{\vec{a_1},B_1}(\vec{v}), ..., h_{\vec{a_k},B_k}(\vec{v}))$$

Objekt:

Anwendung von 4 Hashfunktionen:

$$h_1(...) = 0$$
$$h_2(...) = 1$$
$$h_3(...) = 1$$
$$h_4(...) = 1$$

Ergibt das Label: g(...)=(0,1,1,1)

Mehrdimensionale Hashtabelle

© S. Michel, TU Kaiserslautern

Suche nach ähnlichen Objekten: Beispiel

		Bucket-Label
Anfrage:		0,1,0,1
Potentieller Treffer:		0,1,1,1

Nicht gefunden!

- Um Trefferwahrscheinlichkeit zu erhöhen, werden Objekte nicht nur in einen Bucket gesteckt anhand von g indexiert, sondern anhand von verschiedenen g in mehrere Buckets in verschiedenen Hashtabellen.

© S. Michel, TU Kaiserslautern

Mehrere Hashtabellen

Benutze mehrere mehrdimensionale Hashtabellen,
um die Wahrscheinlichkeit von Kollisionen zu vergrößern

	Hashtabelle 1	Hashtabelle 2
	0,1,0,1	**1,0,0,1**
	0,1,1,1	**1,0,0,1**
Ergebnis:	Kein Treffer	Treffer!

© S. Michel, TU Kaiserslautern

Anfrageverarbeitung: Suche der K nächsten Nachbarn

Gegeben ein Anfrage-Punkt q

- Berechne Bucket-Labels $g_i(q)$ für jede Hashtabelle i.
- Hole Objekte aus diesen Buckets
- Berechne echte Distanz und ordne Objekte entsprechend

Trotzdem: LSH ist eine approximative Technik

- Keine harte Garantie, dass alle Treffer (und nur diese) gefunden werden ...
- ... das ist oftmals aber akzeptabel.
- Es gibt theoretische Ansätze die Ergebnisgüte voraus zu sagen

© S. Michel, TU Kaiserslautern

Beobachtungen

Tuning

- Tradeoff zwischen Größe der Hash-Buckets und der Effektivität
- Mehrere Hashtabellen: Höhere Trefferwahrscheinlichkeit aber größerer Platzverbrauch
- Achtung: auch hier gilt wieder: Ab einem bestimmen Punkt kann ein Full-Scan günstiger sein (und dieser ist sogar noch exakt!)

Erweiterungen

- Schaue in mehrere Hash-Buckets *per* Hashtabelle (aka. multi-probe LSH)
- Auch: verteilte Implementierungen von LSH (z.B. in Peer-to-Peer-Systemen) oder in MapReduce

© S. Michel, TU Kaiserslautern

Non-Standard-Datenbanken

Approximationstechniken

Prof. Dr. Ralf Möller

Universität zu Lübeck

Institut für Informationssysteme

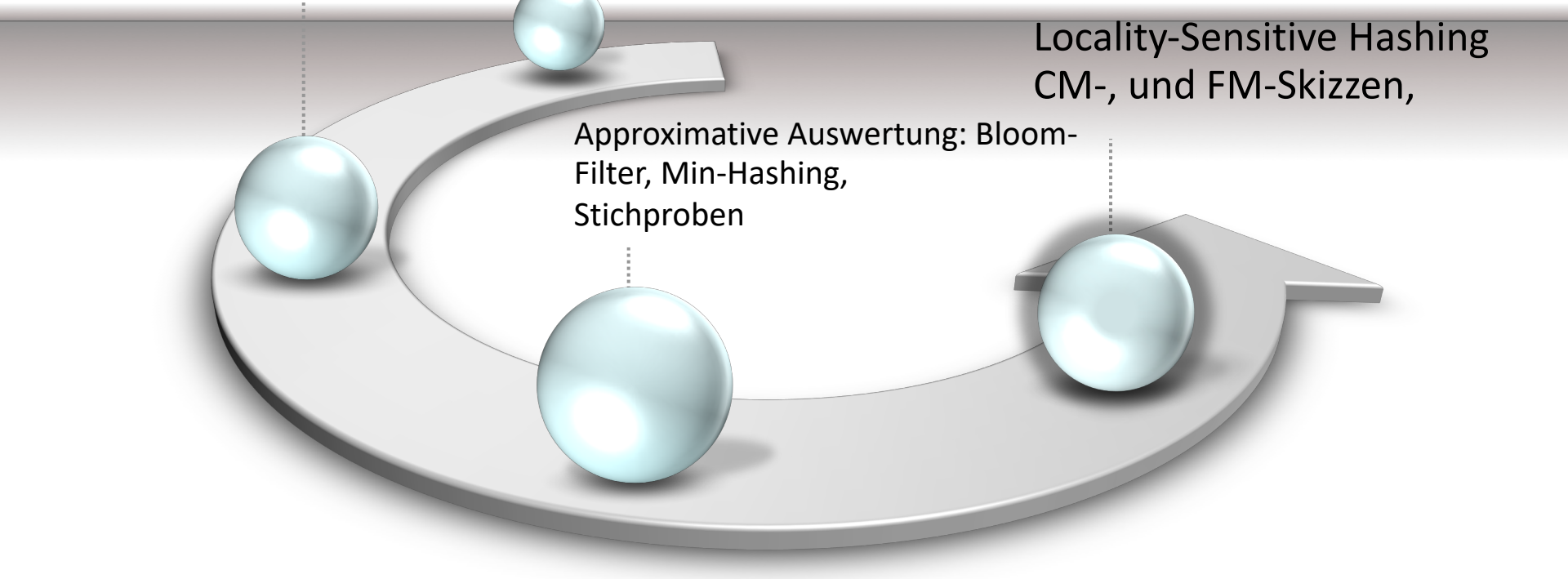
Stromdatenverarbeitung

Approximation

Übersicht

Intervall-Skyline, inkrementelle Auswertungstechniken Skizzen

Stromkonzept, relationale Anfragesprachen, exakte Auswertung, QoS-Angaben

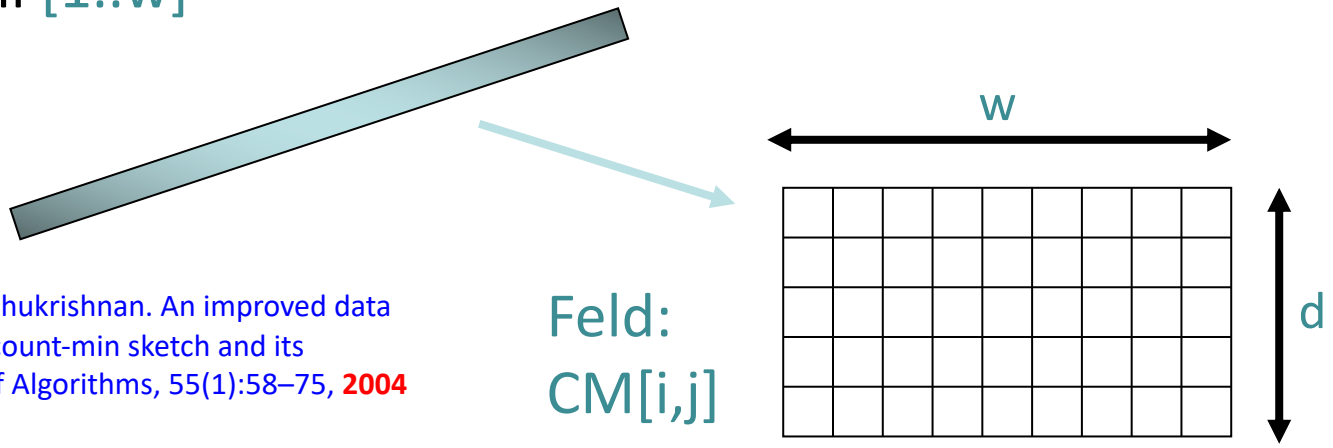


Locality-Sensitive Hashing CM-, und FM-Skizzen,

Approximative Auswertung: Bloom-Filter, Min-Hashing, Stichproben

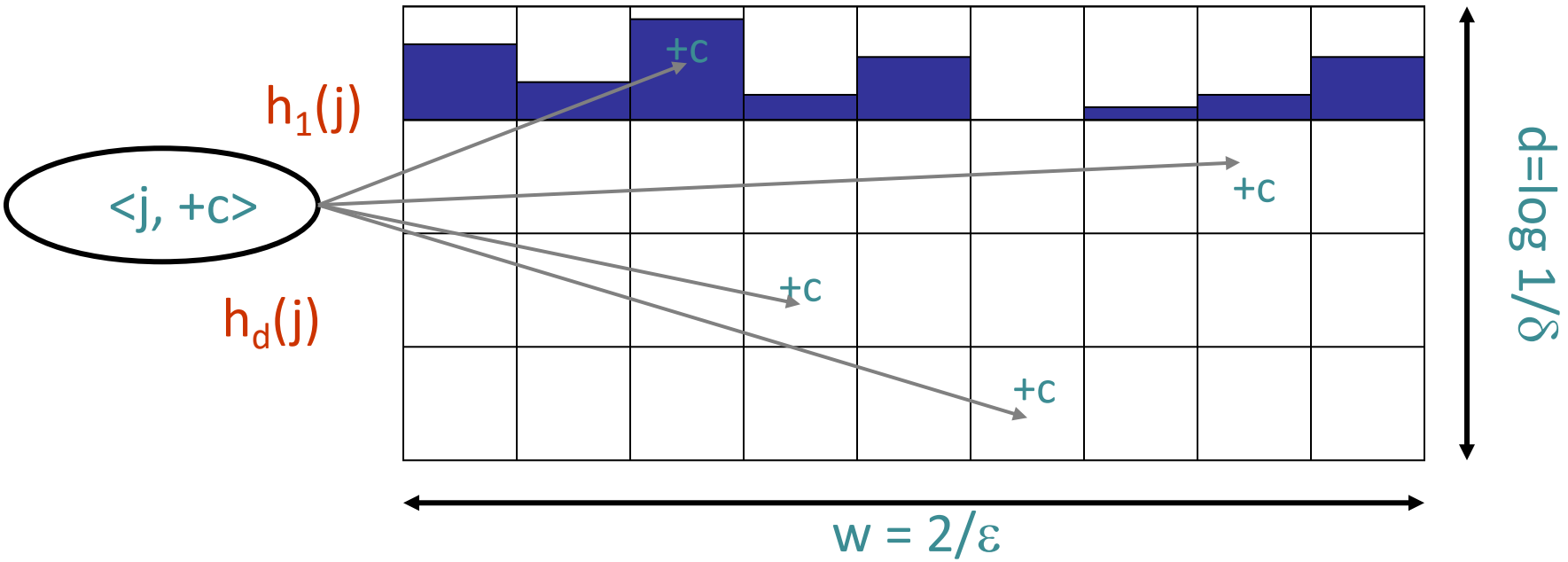
Count-Min-Skizzen (CM-Skizzen)

- Einfache Synopse (Skizze), Basis für viele Strom-Untersuchungsaufgaben (stream mining tasks)
  - hauptsächlich für "Anzahl Elemente pro Typ" (item frequencies)
  - für Zählerakkumulierung und Drehkreuzmodell
- Eingabestrom intern als Vektor A der Dimension N repräsentiert
- Skizze als kleines Feld CM der Größe $w \times d$ dargestellt
- Verwende d Hashfunktionen zur Abbildung der A-Elemente auf Intervall [1..w]



G. Cormode and S. Muthukrishnan. An improved data stream summary: The count-min sketch and its applications. Journal of Algorithms, 55(1):58–75, **2004**

CM-Skizzen



- Jedes A[] wird auf CM-Eintrag abgebildet
  - h()'s *paarweise unabhängig*
- Schätze A[j] über den Ausdruck $\min_k \{ CM[k,h_k(j)] \}$
- Parallelisierung: Verschmelzung eintragsweise durch Summierung verschiedener CM-Matrizen möglich

CM-Skizzen – (ε, δ)-Approximationen

- CM-Approximierungsfehler bei Punktanfragen kleiner als $\varepsilon\|A\|_1$ mit Platzbedarf $O(1/\varepsilon \log 1/\delta)$ *[Cormode, Muthukrishnan'04]*
  - Wahrscheinlichkeit eines größeren Fehlers kleiner als $1-\delta$
  - Ähnliche Garantien für Bereichsanfragen, Quantile, Verbundgrößen (join size), …
- Hinweise
  - Zähler überschätzen durch Hash-Kollisionen
    - Wie begrenzbar in jedem Feld?
  - Nutze Unabhängigkeit über Zeilen, um Konfidenz für min{}-Schätzung zu erhöhen

G. Cormode and S. Muthukrishnan. An improved data stream summary: The count-min sketch and its applications. LATIN 2004, J. Algorithm 55(1): 58-75, **2004**

CM-Skizzen – Analyse

Schätze $A'[j] = \min_k \{ CM[k,h_k(j)] \}$

CM-Skizzen – Analyse

Schätze $A'[j] = \min_k \{ CM[k,h_k(j)] \}$

- Analyse: In k'ter Zeile, $CM[k,h_k(j)] = A[j] + X_{k,j}$
  - $X_{k,j} = \Sigma\, A[i] \mid h_k(i) = h_k(j)$
  - $E[X_{k,j}] = \Sigma\, A[i]*Pr[h_k(i)=h_k(j)] \leq 1/w * \Sigma\, A[i]$
    $\leq (\varepsilon/2) * \Sigma\, A[i] = \varepsilon\, \|A\|_1/2$ (paarweise Unabh. von h)

Fehler, wenn

  - $Pr[X_{k,j} \geq \varepsilon\, \|A\|_1] = Pr[X_{k,j} \geq 2E[X_{k,j}]] \leq 1/2$ über Markov Ungleichung

- Also, $Pr[A'[j] \geq A[j] + \varepsilon\, \|A\|_1] = Pr[\Lambda_k\, X_{k,j} > \varepsilon\, \|A\|_1] \leq 1/2^{\log 1/\delta} = \delta$
- Endergebnis: $A[j] \leq A'[j]$ und
  mit Wahrscheinlichkeit $1-\delta$ gilt $A'[j] < A[j] + \varepsilon\, \|A\|_1$

Zählen der Anzahl der verschiedenen Elemente

- **Problem:**
  - Datenstrom enthält Elemente aus Grundmenge der Größe N
  - Gesucht ist Anzahl der verschiedenen Elemente in einem gesamten bisherigen Strom zu einem Zeitpunkt, zu dem Fenster ausgewertet wird

- **Naiver Ansatz:**
  Speichere gesehene Elemente in Hashtabelle als Synopse

Anzahl **verschiedener** Werte abschätzen

- Aufgabe: Finde Anzahl der verschiedenen Werte in einem Strom von Werten aus [1,…,N] (`count distinct`)
  - Statistik: Anzahl von Arten oder Klassen in Population
  - Datenbanken: Selektivitätsschätzung in Anfrageoptimierung
  - Netzwerkbeobachtung*:* IP-Adressen mit unterschiedlichem Ziel, Quelle/Ziel-Paare, angeforderte URLs usw.

- Beispiel (N=64)

Datenstrom: 3 2 5 3 2 1 7 5 1 2 3 7

Anzahl der verschiedene Werte: 5

- Naiver Ansatz: Hash-Tabelle für alle gesehenen Elemente
- Schwierig auch für CM (gedacht für Multimengen)

Flajolet-Martin-Ansatz

- Wähle Hashfunktion ***h*** zur Abbildung von ***N*** Elementen auf mindestens $\log_2 N$ Bits

- Für jedes Stromelement ***a***, sei ***r*(*a*)** die Anzahl der Nullen am Ende von ***h*(*a*)**
  - **r(a)** = Position der ersten 1 von rechts
    - Z.B. sei ***h(a) = 12***, dann ist ***12*** gleich ***1100*** binär, also ***r(a) = 2***
- Speichere ***R* = maximales *r*(*a*) bisher**
  - $R = \max_a r(a)$, über alle Stromelemente ***a*** bisher

- **Geschätzte Anzahl unterschiedlicher Elemente: $\approx 2^R$**

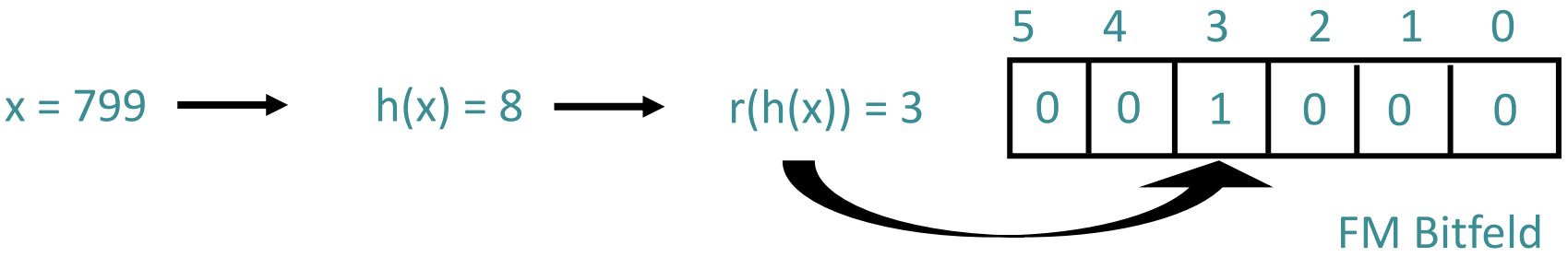
P. Flajolet and G. N. Martin. Probabilistic counting. In IEEE Conference on Foundations of Computer Science, pages 76–82, 1983. Journal version in Journal of Computer and System Sciences, 31:182–209, **1985**.

Warum funktioniert das? Intuition

- **h(a)** bildet **a** mit **gleicher Wahrscheinlichkeit** auf jeden von **N** möglichen Werten ab
- Dann ist **h(a)** eine Sequenz von $\log_2 N$ Bits, wobei 2^{-r} der Anteil aller **a**s mit **r** Nullen am Ende ist
  - Ca. 50% der **a**s hashen auf ***0**
  - Ca. 25% der **a**s hashen auf **00**
  - Wenn also **r(a)=2** Nullen hinten stehen (i.e., Hash ergibt ***100**), dann haben wir wahrscheinlich **ca. 4** verschiedene Elemente gesehen
- **Also braucht es ein Hash auf 2^r Elementen bevor man eines mit 0-Suffix der Länge r sieht**

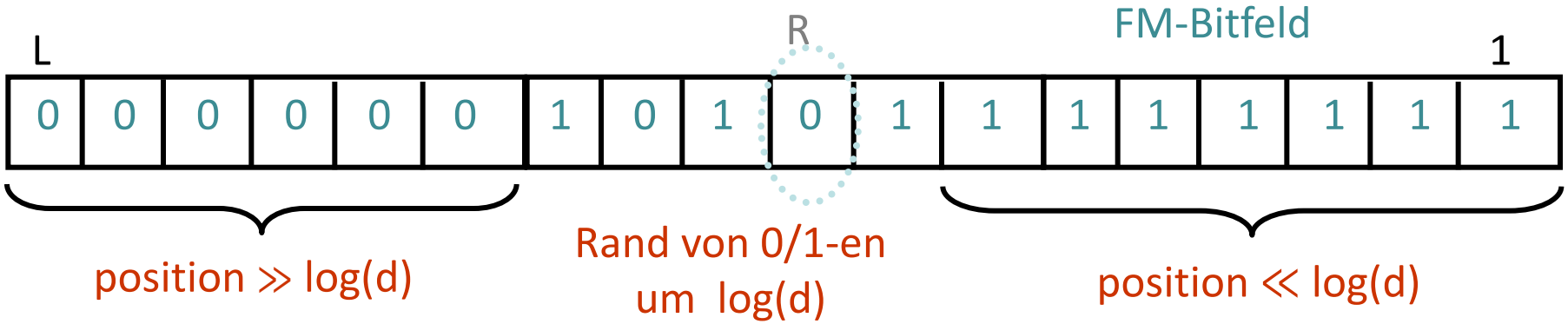
FM-Skizzen [Flajolet, Martin 85]

- Verwende Hashfunktion h' zur Abbildung von Eingabeelementen auf i mit Wahrscheinlichkeit 2^{-r}
  - also Pr[h'(x) = 1] = ½, Pr[h'(x) = 2] = ¼, Pr[h'(x)=3] = 1/8 …
  - Konstruiere h'() aus gleichverteilter Hashfunktion und anschließendendem "Zählen der Nullen am Ende" durch r
- Aufbau FM-Skizze= Bitfeld von L = log N Bits
  - Initialisiere Bitfelder of 0
  - Für jeden neuen Wert x, setze FM[r(x)] = 1



FM-Skizzen – Analyse

- Bei d verschiedenen Werten, erwarte Abbildung von d/2 Werten nach FM[1], d/4 nach FM[2]…

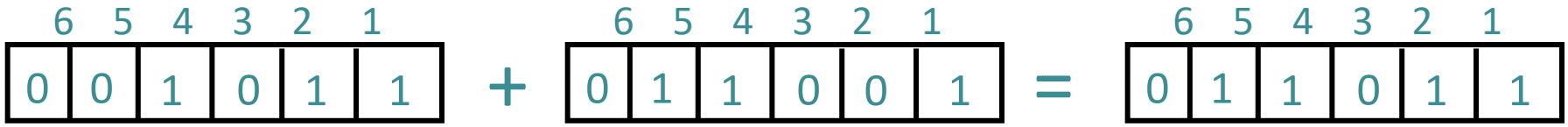


  - Sei R = Position der rechtesten 0 in FM, Indikator für log(d)
  - [FM85] zeigen, dass E[R] = $\log(\phi d)$, mit $\phi = .7735$
  - Schätzung $d = c2^R$ für Skalierungskonstante $c \approx 1.3$
  - Mittelung mit verschiedenen Hashfunktionen dient zur Verbesserung des Ergebnisses
  - Wieviele Hashfunktionen für best. Anforderung benötigt?

FM-Skizzen – Eigenschaften

- Mit $O(1/\varepsilon^2 \log 1/\delta)$ Hashfunktionen, $(1 \pm \varepsilon)$ Genauigkeit mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1-\delta$
  Ohne Beweis: siehe [Bar-Yossef et al'02], [Ganguly et al.'04]
  - 10 Funktionen ≈ 30% Fehler, 100 Funkt. < 10% Fehler

- Bei Löschung: Verwende Zähler statt Bits
  - +1 für Einfügungen, -1 für Löschungen
- Komposition: komponentenweise OR bzw. +



  - Schätze $|S_1 \cup \cdots \cup S_k|$ = *Kardinalität der Vereinigungsmenge*

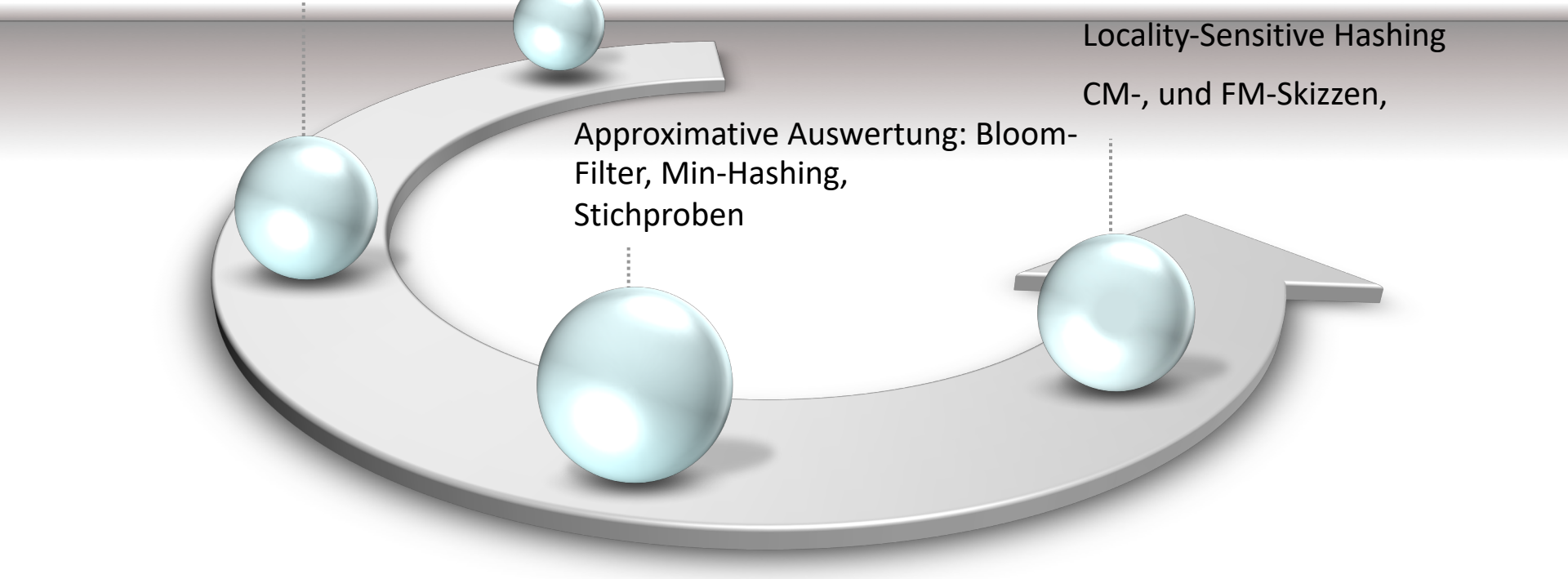
Stichproben und Skizzierung: Zusammenfassung

- Zentrale Probleme für viele Stromanalyseverfahren
  - Momente/Verbundaggregate, Histogramme, top-k, Meistfrequentierte Elemente, andere Analyseprobleme, …
- Stichproben eher generelle Repräsentation eines Datensatzes
  - Einfache Stichproben (sampling) kaum für Strommodelle geeignet
- Skizzierung eher für speziellen Zweck
  - FM-Skizze für “Anzahl der Typen”,
  - CM-Skizze für “Anzahl Elemente pro Typ” (auch: Verbundgröße bzw. Momentenschätzung …)

Zusammenfassung

Intervall-Skyline, inkrementelle Auswertungstechniken Skizzen

Stromkonzept, relationale Anfragesprachen, exakte Auswertung, QoS-Angaben



Approximative Auswertung: Bloom-Filter, Min-Hashing, Stichproben

Locality-Sensitive Hashing

CM-, und FM-Skizzen,