



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK



**Studienstiftung**  
des deutschen Volkes

# New Methods for Efficient Query Answering in Gaussian Probabilistic Graphical Models

---

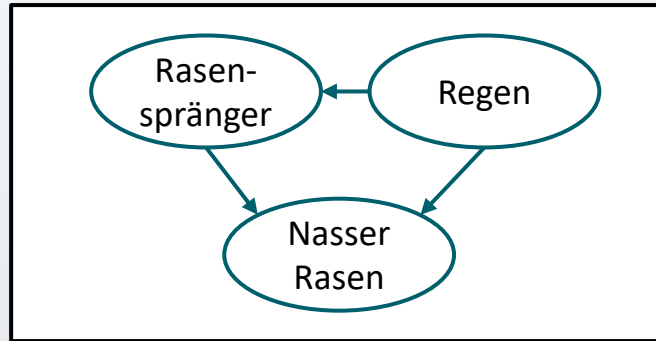
Kolloquium – Mattis Hartwig

Institut für Informationssysteme, Universität zu Lübeck

Lübeck, 6. September 2022

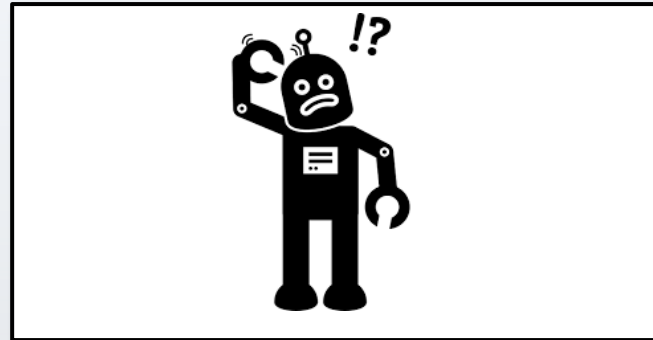
# Der Titel lässt sich in drei Bestandteile zerlegen

## Probabilistic Graphical Models



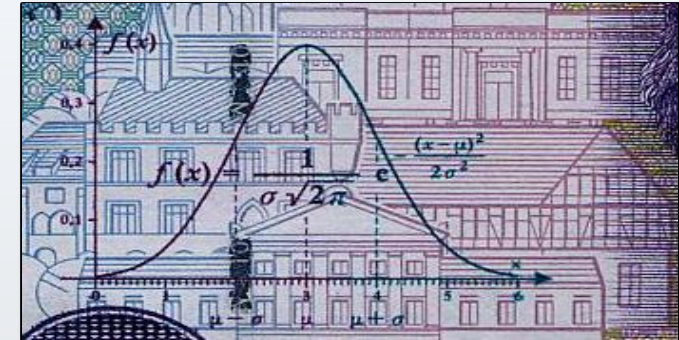
- Graphische Modelle sind eine **Kompakte Darstellung** einer Verbundwahrscheinlichkeit
- **Geeignet** um auch **kausale Beziehungen** zu modellieren

## Efficient Query Answering



- Künstliche Agenten benötigen Antworten auf Modellanfragen
- **Schnellere Antwortzeit** erhöht **Reaktionsgeschwindigkeit** und damit Leistung des Agenten

## Gaussian

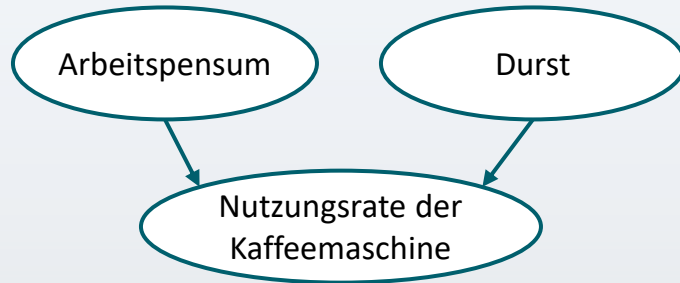


- **Kontinuierliche Variablen** benötigen eine **Dichtefunktion**
- Normalverteilung hat gute Eigenschaften **in Anwendungen**

Spezifische Anwendungsszenarien bedürfen neuer Methoden.

# Im Folgenden schauen wir auf Gaußsche Bayessche Netze

## Gaußsches Bayessches Netz (GBNs)



### Beispiel

$$P(A) \sim \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$$

$$P(D) \sim \mathcal{N}(\mu_D, \sigma_D^2)$$

$$P(K|A, D) \sim \mathcal{N}(\mu_K + \beta_{A,K}(x_A - \mu_A) + \beta_{D,K}(x_D - \mu_D), \sigma_K^2)$$

## Multivariate Verbundwahrscheinlichkeit (hier Normalverteilung)

$$\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

### Beispiel

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_A \\ \mu_D \\ \mu_K \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & 0 & \beta_{A,K}\sigma_A^2 \\ 0 & \sigma_D^2 & \beta_{D,K}\sigma_D^2 \\ \beta_{A,K}\sigma_A^2 & \beta_{D,K}\sigma_D^2 & \beta_{D,K}^2\sigma_D^2 + \beta_{A,K}^2\sigma_A^2 + \sigma_K^2 \end{pmatrix}$$

### Allgemeine Formel

$$P(X_i | \mathbf{Pa}(X_i)) \sim \mathcal{N} \left( \mu_i + \sum_{X_k \in \mathbf{Pa}(X_i)} \beta_{k,i}(x_k - \mu_k), \sigma_i^2 \right)$$

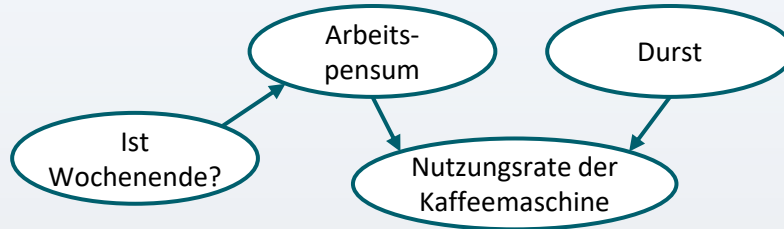
# In der Dissertation wurden wissenschaftliche Beiträge entlang von drei allgemeinen Anwendungsszenarien erstellt

## Anwendungsszenario

## Beispielhafte Darstellung

## Beiträge zum Forschungsfeld

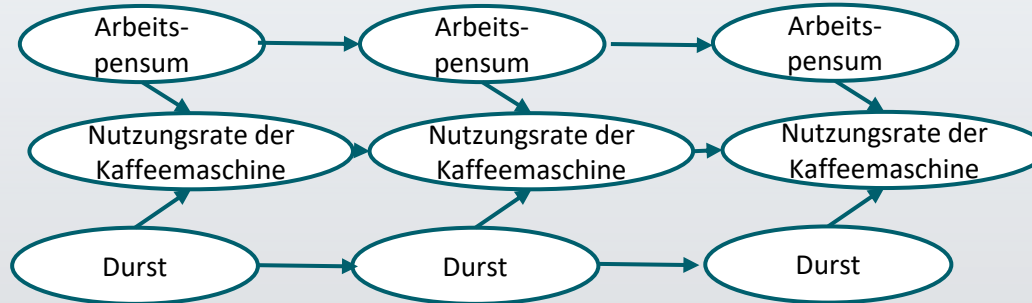
Hybride Modelle (inkl. diskrete Variablen)



1

Neuer Algorithmus für approximatives Beantworten von Modellanfragen unter Einhaltung einer Fehlergrenze

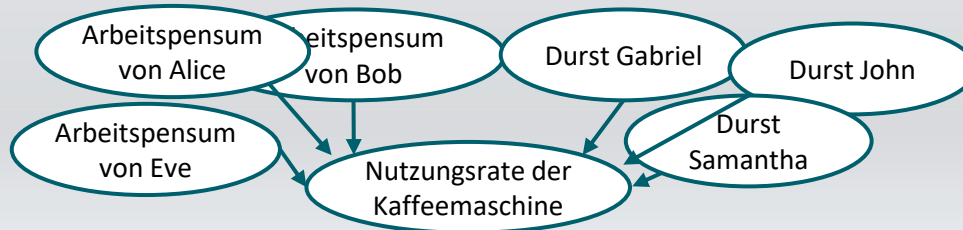
Zeitabhängige Modelle



2

Entwicklung einer Gaußprozess Repräsentation für spezifische dynamische GBNs

Instanzierte Modelle



3

Entwicklung einer kompakten Repräsentation für die Verbundwahrscheinlichkeit in GBNs mit sich gleich verhaltenden Knoten

4

Implementierung von Operationen, die die kompakte Repräsentation der Verbundwahrscheinlichkeit nutzen

5

Effiziente Anfragebeantwortungsalgorithmen unter Nutzung der kompakten Repräsentation der Verbundwahrscheinlichkeit

# Wir konnten unsere Arbeiten in den drei Bereichen international publizieren

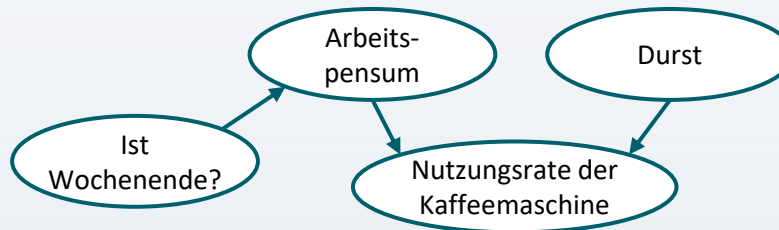


## Anwendungsszenario

## Beispielhafte Darstellung

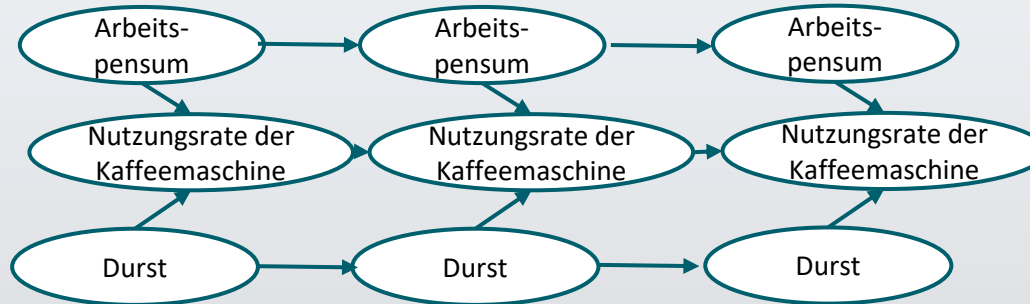
## Publikationen im Rahmen der Dissertation

Hybride Modelle (inkl. diskrete Variablen)



Mattis Hartwig, Marcel Gehrke, and Ralf Möller. **Approximate Query Answering in Complex Gaussian Mixture Models**. In ICBK-19 Proceedings of the 2019 IEEE International Conference on Big Knowledge, pages 81–86. IEEE, 2019.

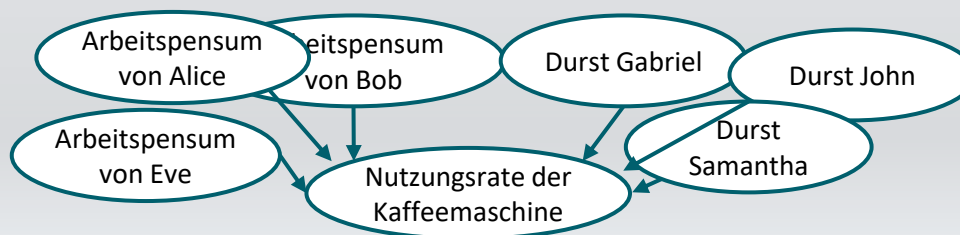
Zeitabhängige Modelle



Mattis Hartwig, Marisa Mohr, and Ralf Möller. **Constructing Gaussian Processes for Probabilistic Graphical Models**. In FLAIRS-20 Proceedings of the 33rd International Florida Artificial Intelligence Research Society Conference. AAAI Press, 2020.

Mattis Hartwig and Ralf Möller. **How to Encode Dynamic Gaussian Bayesian Networks as Gaussian Processes?** In AJCAI-20 Proceedings of the Australasian Joint Conference on Artificial Intelligence, pages 371–382. Springer, 2020

Instanzierte Modelle



Mattis Hartwig and Ralf Möller. **Lifted Query Answering in Gaussian Bayesian Networks**. In Proceedings of the 10th International Conference on Probabilistic Graphical Models, volume 138 of Proceedings of Machine Learning Research, pages 233–244. PMLR, 2020.

Mattis Hartwig, Tanya Braun, and Ralf Möller. **Handling Overlaps When Lifting Gaussian Bayesian Networks**. In IJCAI-21 Proceedings of the 30th International Joint Conference on Artificial Intelligence, pages 4228–4234. IJCAI Organization, 2021.

Mattis Hartwig, Ralf Möller, and Tanya Braun. **An Extended View on Lifting Gaussian Bayesian Networks**. Accepted with minor revisions to Elsevier Artificial Intelligence Journal.

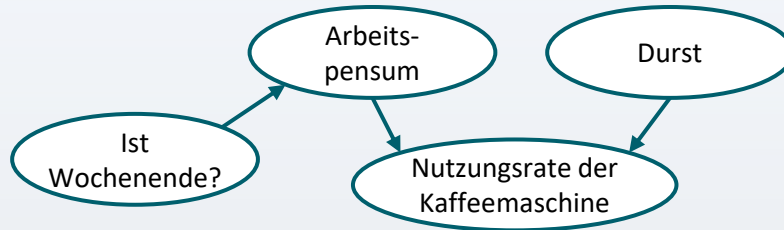
# Der Fokus für den verbleibenden Vortrag liegt auf dem dritten Anwendungsszenario

## Anwendungsszenario

## Beispielhafte Darstellung

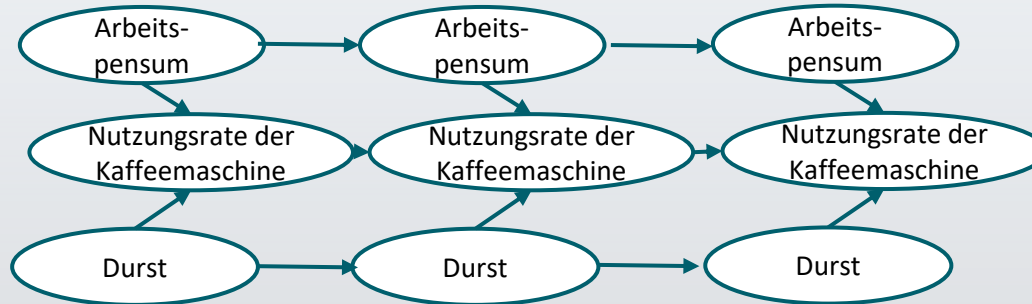
## Publikationen im Rahmen der Dissertation

Hybride Modelle (inkl. diskrete Variablen)



Mattis Hartwig, Marcel Gehrke, and Ralf Möller. **Approximate Query Answering in Complex Gaussian Mixture Models**. In ICBK-19 Proceedings of the 2019 IEEE International Conference on Big Knowledge, pages 81–86. IEEE, 2019.

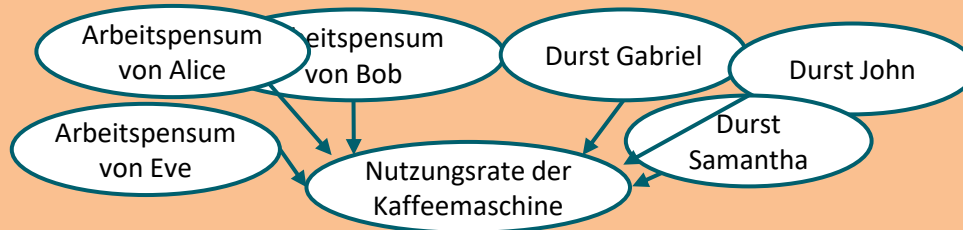
Zeitabhängige Modelle



Mattis Hartwig, Marisa Mohr, and Ralf Möller. **Constructing Gaussian Processes for Probabilistic Graphical Models**. In FLAIRS-20 Proceedings of the 33rd International Florida Artificial Intelligence Research Society Conference. AAAI Press, 2020.

Mattis Hartwig and Ralf Möller. **How to Encode Dynamic Gaussian Bayesian Networks as Gaussian Processes?** In IJCAI-20 Proceedings of the Australasian Joint Conference on Artificial Intelligence, pages 371–382. Springer, 2020

Instanzierte Modelle

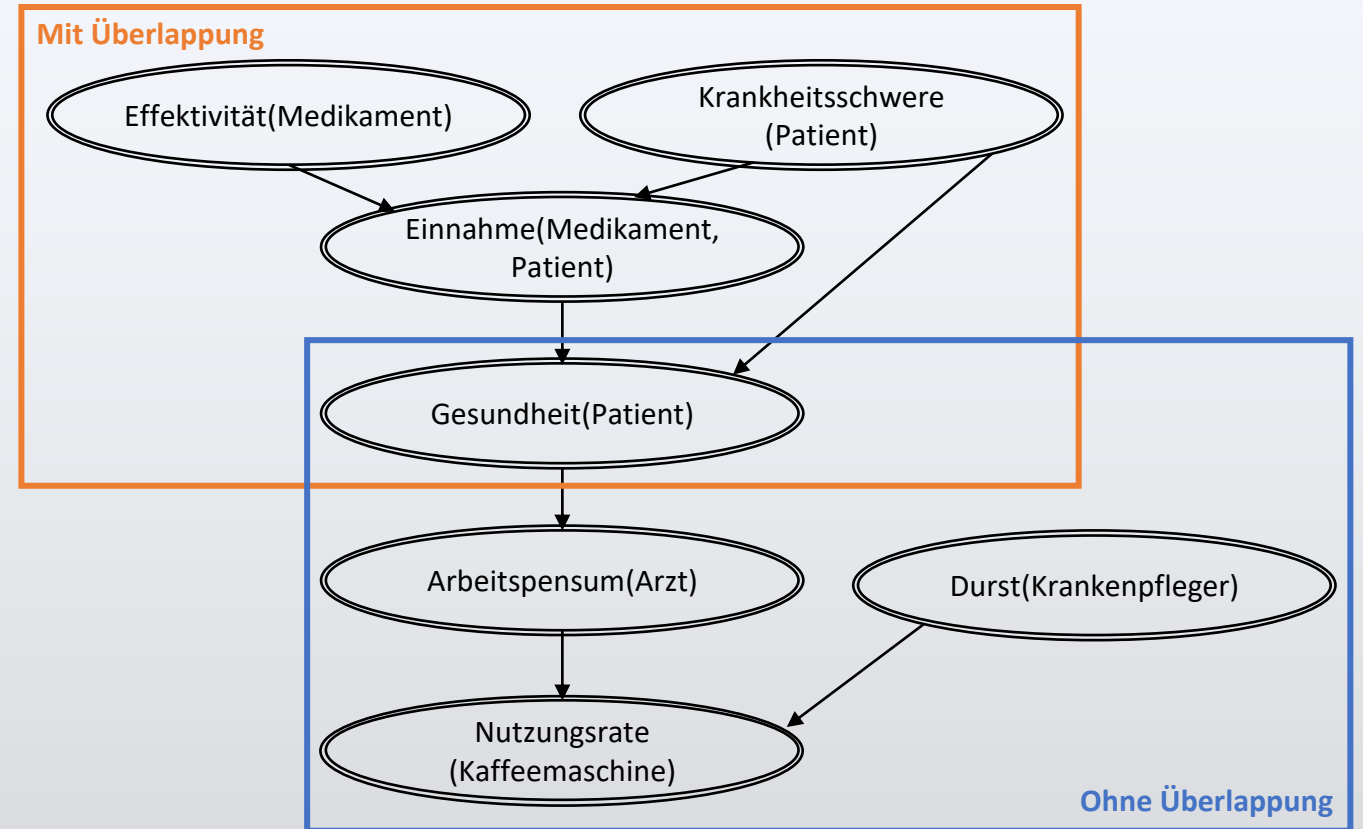
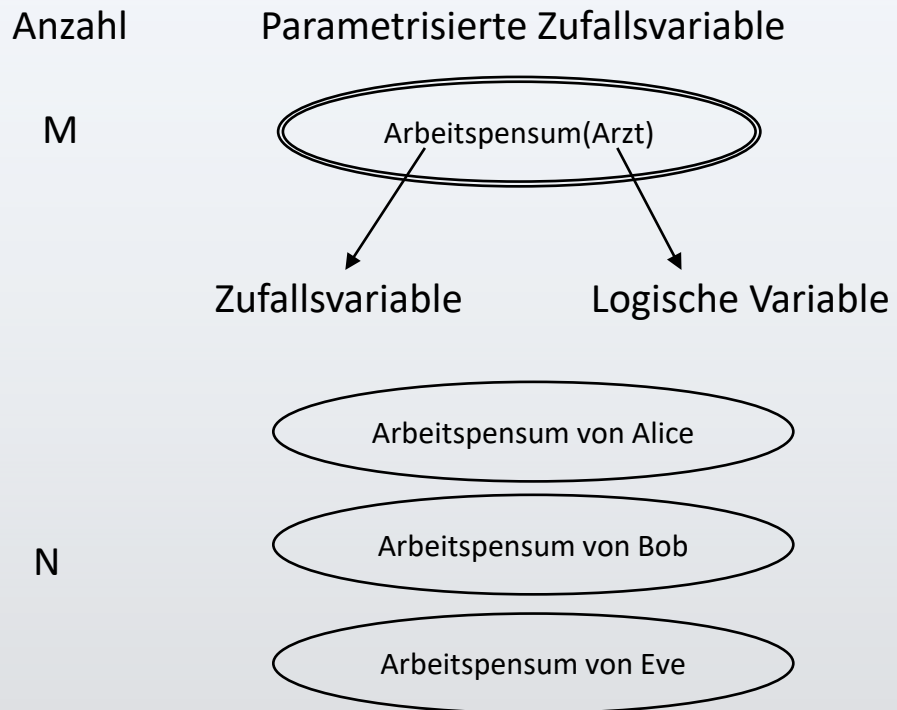


Mattis Hartwig and Ralf Möller. **Lifted Query Answering in Gaussian Bayesian Networks**. In Proceedings of the 10th International Conference on Probabilistic Graphical Models, volume 138 of Proceedings of Machine Learning Research, pages 233–244. PMLR, 2020.

Mattis Hartwig, Tanya Braun, and Ralf Möller. **Handling Overlaps When Lifting Gaussian Bayesian Networks**. In IJCAI-21 Proceedings of the 30th International Joint Conference on Artificial Intelligence, pages 4228–4234. IJCAI Organization, 2021.

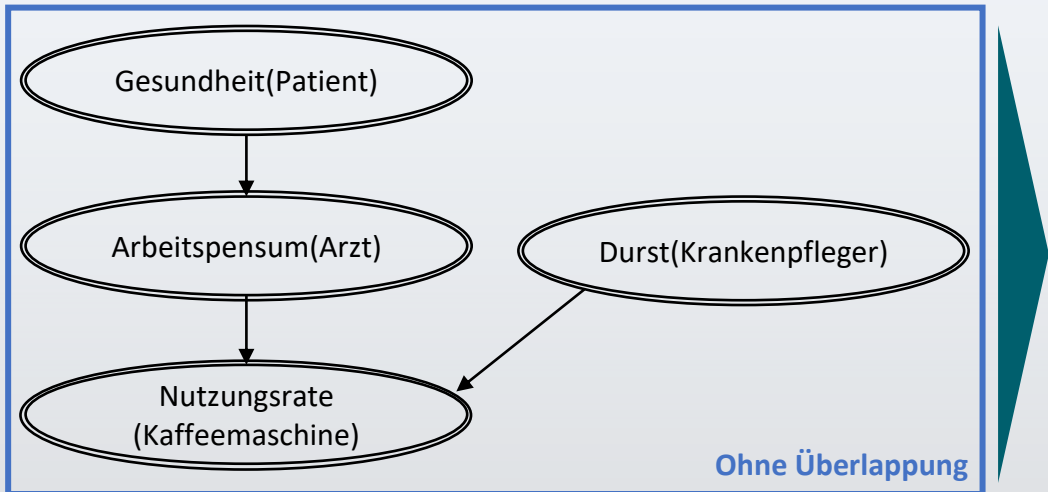
Mattis Hartwig, Ralf Möller, and Tanya Braun. **An Extended View on Lifting Gaussian Bayesian Networks**. Submitted to Elsevier Artificial Intelligence Journal.

# Ein Beispielmodell aus parametrisierten Zufallsvariablen



Die Überlappung bezieht sich auf die Sequenz von logischen Variablen.

In einem Szenario, in dem sich die logischen Variablen nicht überlappen kommt, es zu einfachen Kovarianzmatrix-Strukturen



$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -12 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -12 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 11 & 8 & 57 & 57 & 57 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 8 & 11 & 57 & 57 & 57 \\ -12 & -12 & 4 & 4 & 4 & 57 & 57 & 370 & 366 & 366 \\ -12 & -12 & 4 & 4 & 4 & 57 & 57 & 366 & 370 & 366 \\ -12 & -12 & 4 & 4 & 4 & 57 & 57 & 366 & 366 & 370 \end{bmatrix}$$

Speicheraufwand NxN

$$\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 8 & 57 \\ -12 & 4 & 57 & 366 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Speicheraufwand MxM

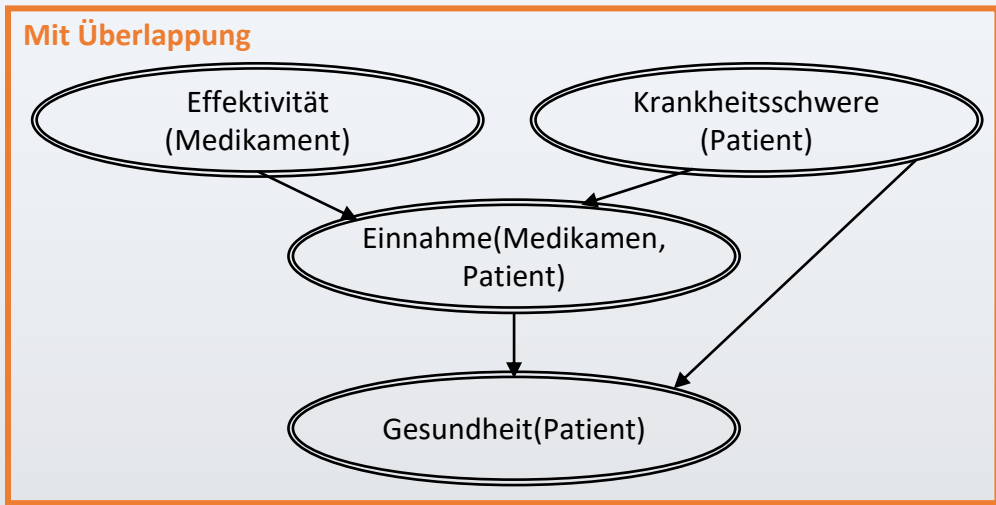


In einem Szenario, in dem sich die logischen Variablen nicht überlappen kommt, es zu einfachen Kovarianzmatrix-Strukturen

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -12 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -12 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 11 & 8 & 57 & 57 & 57 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 8 & 11 & 57 & 57 & 57 \\ -12 & -12 & 4 & 4 & 4 & 57 & 57 & 370 & 366 & 366 \\ -12 & -12 & 4 & 4 & 4 & 57 & 57 & 366 & 370 & 366 \\ -12 & -12 & 4 & 4 & 4 & 57 & 57 & 366 & 366 & 370 \end{bmatrix}$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 8 & 57 \\ -12 & 4 & 57 & 366 \end{bmatrix}$$

In Szenarien, in denen sich die logischen Variablen überlappen, ist die Struktur etwas komplizierter



3-dimensionaler Tensor

Speicheraufwand NxN

Speicheraufwand MxMx2<sup>S</sup>

Formel für die Struktur von jedem Block

$$\Sigma_{gr}(Y_s, Y_t) = \sum_{\mathbf{q}_{s,t} \in \Phi_{s,t}} \rho_{s,t}^{\mathbf{q}_{s,t}} \bigotimes_{L \in \mathbf{L}_s \cup \mathbf{L}_t} \mathbf{J}_{\dim(L, \mathbf{L}_s) \times \dim(L, \mathbf{L}_t)}^{qexp(\mathbf{q}_{s,t}, L)}$$

Ziel ist es, Anfragen zu beantworten und Berechnungen weitestgehend mit der angehobenen Repräsentation durchzuführen

### Anfrage (Query)

$$P(Q|E = e)$$

Anfrageterme

Evidenz

### Antwort

$$P(Q|E = e) \sim \mathcal{N}(\mu^*, \Sigma^*)$$

$$\mu^* = \mu_Q + \Sigma_{QE} \Sigma_{EE}^{-1} (e - \mu_E),$$

$$\Sigma^* = \Sigma_{QQ} - \Sigma_{QE} \Sigma_{EE}^{-1} \Sigma_{EQ}.$$

### Lösungsweg

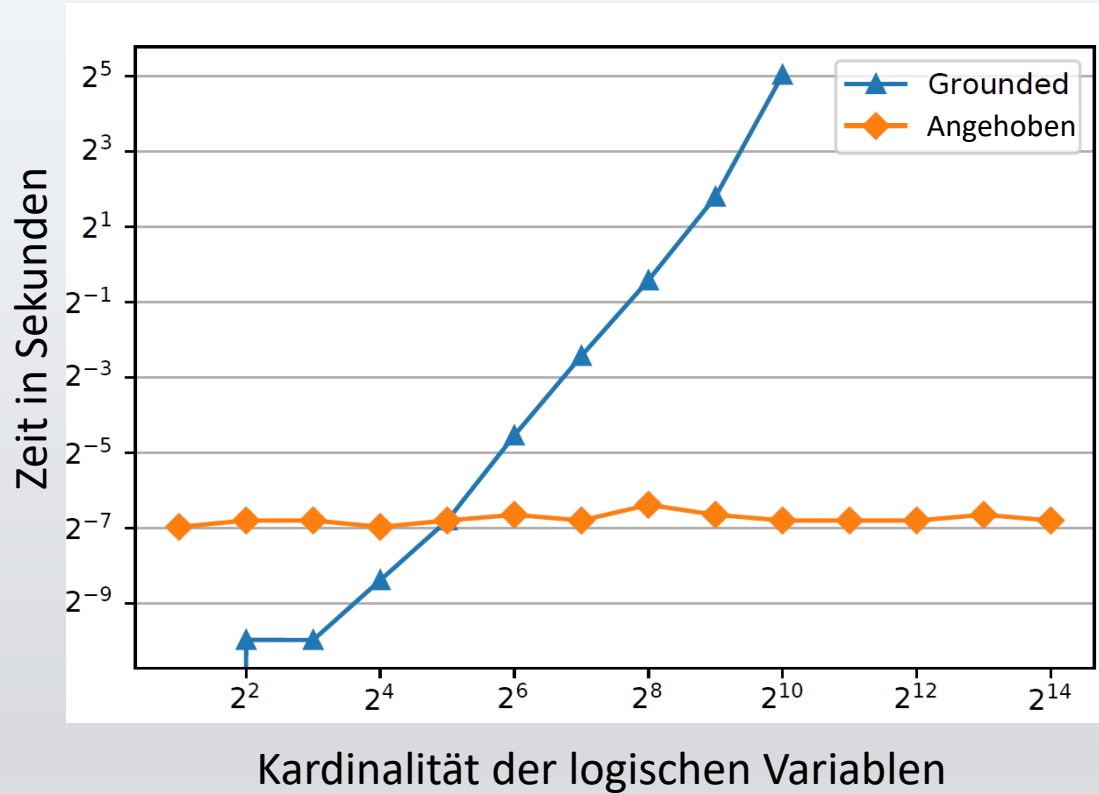
Nötige Operationen mit der angehobenen Repräsentation

- Addition
- Multiplikation von Teilmatrizen
- Invertierung von Teilmatrizen

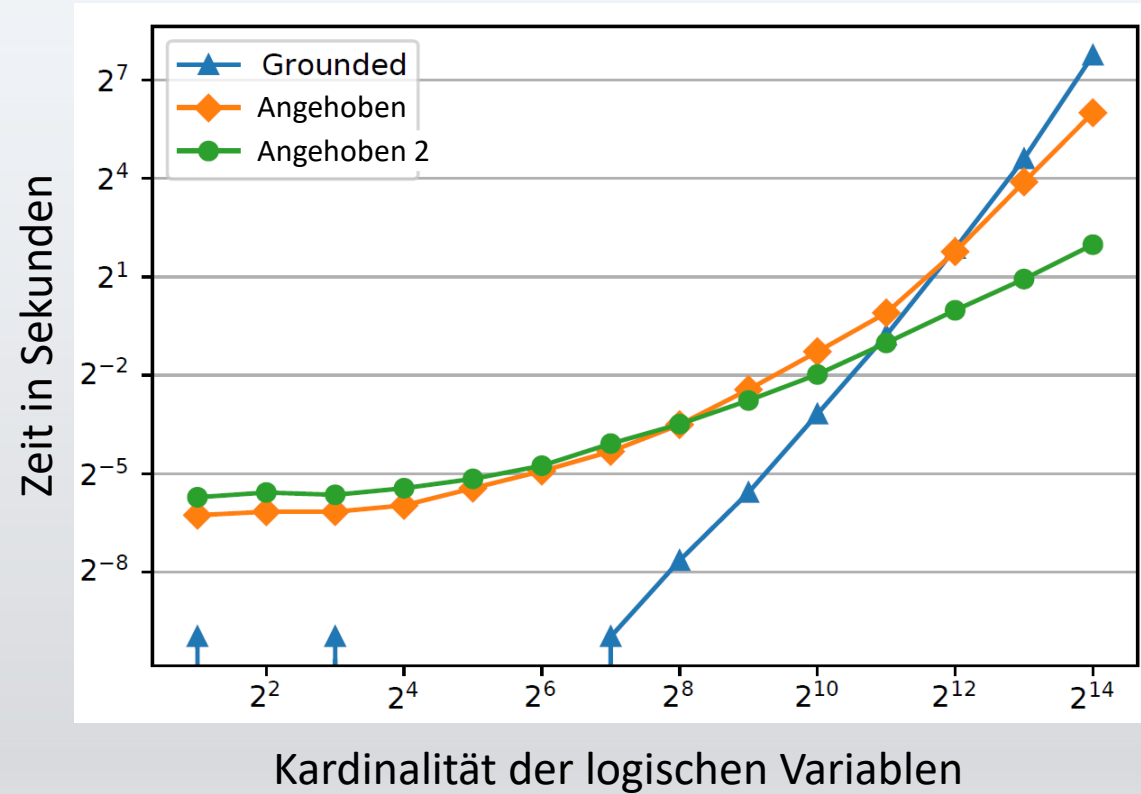
Notiz: Es gibt gewisse Symmetrie-Bedingungen in den Queries, damit diese mit der angehobenen Repräsentation gerechnet werden können.

# Die theoretischen Analysen zu den implementierten Algorithmen wurden ebenfalls ausführlich evaluiert

## Konstruktion der Verbundwahrscheinlichkeit



## Beantwortung von Fragen



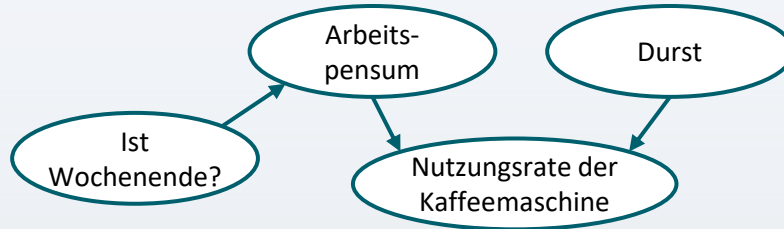
# In der Dissertation wurden wissenschaftliche Beiträge entlang von drei allgemeinen Anwendungsszenarien erstellt

## Anwendungsszenario

## Beispielhafte Darstellung

## Beiträge zum Forschungsfeld

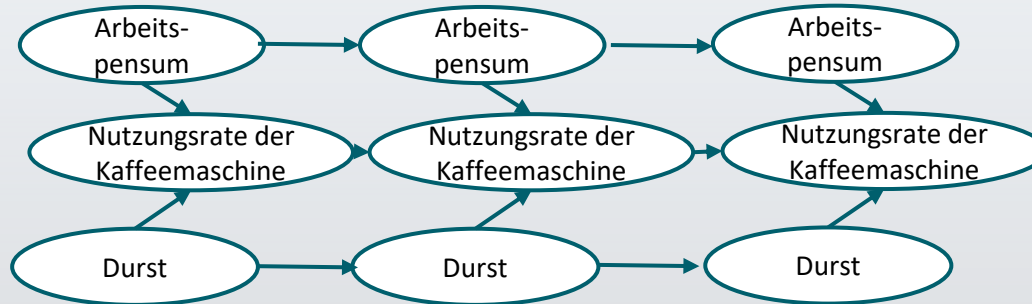
Hybride Modelle (inkl. diskrete Variablen)



1

Neuer Algorithmus für approximatives Beantworten von Modellanfragen unter Einhaltung einer Fehlergrenze

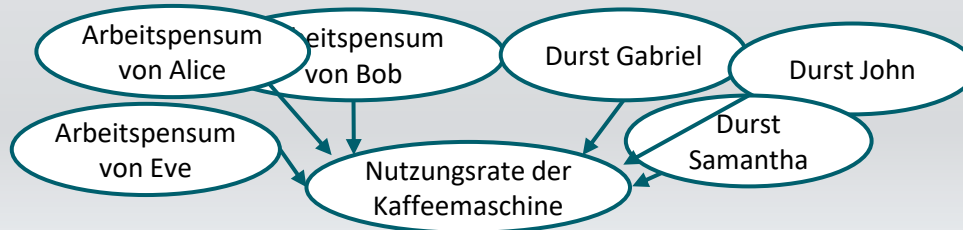
Zeitabhängige Modelle



2

Entwicklung einer Gaußprozess Repräsentation für spezifische dynamische GBNs

Instanzierte Modelle



3

Entwicklung einer kompakten Repräsentation für die Verbundwahrscheinlichkeit in GBNs mit sich gleich verhaltenden Knoten

4

Implementierung von Operationen, die die kompakte Repräsentation der Verbundwahrscheinlichkeit nutzen

5

Effiziente Anfragebeantwortungsalgorithmen unter Nutzung der kompakten Repräsentation der Verbundwahrscheinlichkeit

# Ausblick der Lifting Forschung



- ➔ Angehobene Repräsentationen für hybride Modelle
- ➔ Behandlung von unsymmetrischen Queries
- ➔ Gaußverteilte angehobene Repräsentationen in der Anonymisierungsforschung





Danke! Jetzt ist Zeit für Fragen.