Grundlagen der Programmierung (Vorlesung 18)

Ralf Möller, FH-Wedel

- Vorige Vorlesung
  - Asymptotische Komplexität von Algorithmen
- Inhalt dieser Vorlesung
  - Sortieralgorithmen und deren Analyse
- Lernziele
  - Grundlagen der Analyse von Algorithmen

Danksagung

- Das Material ist angelehnt an die Materialien aus der Vorlesung Datenstrukturen und Algorithmen von Prof. Dr. M. Jarke, M. Gebhardt, T. v. d. Maßen, A. Nowack, Dr. J.-C. Töbermann, RWTH Aachen
- http://www-i5.informatik.rwth-aachen.de/lehrstuhl/lehre/DA01/

Vorabbemerkungen (1)

Definition: Partielle Ordnung

Es sei $\mathcal{M}$ eine nicht leere Menge und $\leq \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ eine binäre Relation auf $\mathcal{M}$. Das Paar $< \mathcal{M}, \leq >$ heißt eine *partielle Ordnung auf* $\mathcal{M}$, genau dann wenn $\leq$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- **Reflexivität:** $\forall x \in \mathcal{M}: \quad x \leq x$
- **Transitivität:** $\forall x, y, z \in \mathcal{M}: \quad x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$
- **Antisymmetrie:** $\forall x, y \in \mathcal{M}: \quad x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$

Vorabbemerkungen (2)

Definition: Strikter Anteil einer Ordnungsrelation
Für eine partielle Ordnung $\leq$ auf einer Menge $\mathcal{M}$ definieren wir die Relation $<$ durch:

$$x < y \;:=\; x \leq y \wedge x \neq y$$

Die Relation $<$ heißt auch der *strikte Anteil von* $\leq$.

Definition: Totale Ordnung
Es sei $\mathcal{M}$ eine nicht leere Menge und $\leq \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ eine binäre Relation über $\mathcal{M}$. $\leq$ heißt eine *totale Ordnung auf* $\mathcal{M}$, genau dann wenn gilt:

- $< \mathcal{M}, \leq >$ ist eine partielle Ordnung und
- **Trichotomie:** $\forall x, y \in \mathcal{M}: \quad x < y \,\dot{\vee}\, x = y \,\dot{\vee}\, y < x$

Sortierung von Reihungen

- Sortierproblem - Definition:
  - Gegeben sei eine Reihung a der Form
    array [1..n] of M und eine totale Ordnung
    $\leq$ definiert auf M.
  - Gesucht in eine Reihung b : array [1..n] of M, so daß gilt:
    $\forall\ 1 \leq i < n\ .\ (b[i] \leq b[i+1] \wedge \exists\ j \in \{1, \ldots, n\}\ .\ (a[j] = b[i]))$

Unterscheidungskriterien (1)

- M kann eine Menge zusammengesetzer Objekte sein
  - Die Elemente aus M können wieder Reihungen (Arrays) sein
  - Andere Beispiele sind (Name, Vorname) usw.
- M kann auch N_0 sein

Unterscheidungskriterien (2)

- Üblicherweise wird für die Ordnungsrelation bei zusammengesetzten Reihungselementen nur eine Teilkomponente als Schlüssel verwendet

Liste	**Schlüsselelement**	**Ordnung**
Telefonbuch	Nachname	lexikographische Ordnung
Klausurergebnisse	Punktezahl	$\leq$ auf $\mathbb{Q}$
Lexikon	Stichwort	lexikographische Ordnung
Studentenverzeichnis	Matrikelnummer	$\leq$ auf $\mathbb{N}$
Entfernungstabelle	Distanz	$\leq$ auf $\mathbb{R}$
Fahrplan	Abfahrtszeit	„früher als“

Unterscheidungskriterien (3)

- Stabilität
  - Ein Sortierverfahren heißt stabil, wenn sich in der Ergebnisreihung die Reihenfolge gleicher Elemente nicht ändert
  - Relevant ist dieses für Reihungen mit zusammengesetzten Elementen

Vereinfachung

- Wir betrachten hier zur Vereinfachung nur $M = N_0$
- Wir suchen eine Sortierfunktion, d.h. das Eingabearray wird nicht verändert. Der Algorithmus arbeitet auf einer vorher erstellten Kopie der Eingabe
- Wird als Ergebnis die gleiche Reihung verwendet, spricht man von In-situ-Sortieren

Abkürzung: For-Schleife

- for i := a to b by X do <Rumpf> end for

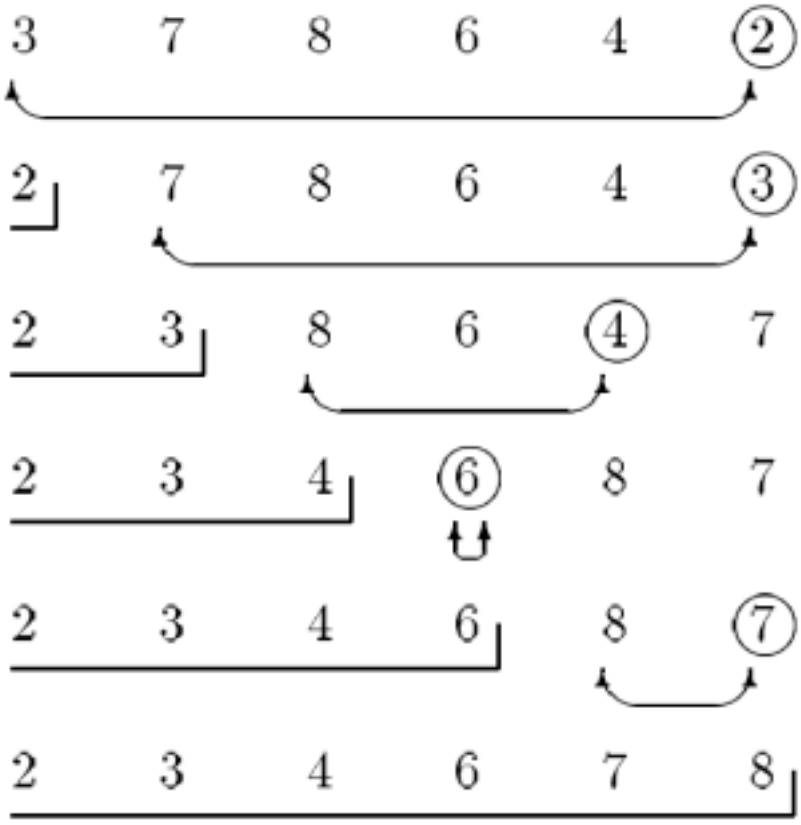
steht für:

- i := a;
  while ¬(i = b) do
    <Rumpf>;
    i := i + X
  end while

Sortieren durch Auswahl: selection-sort

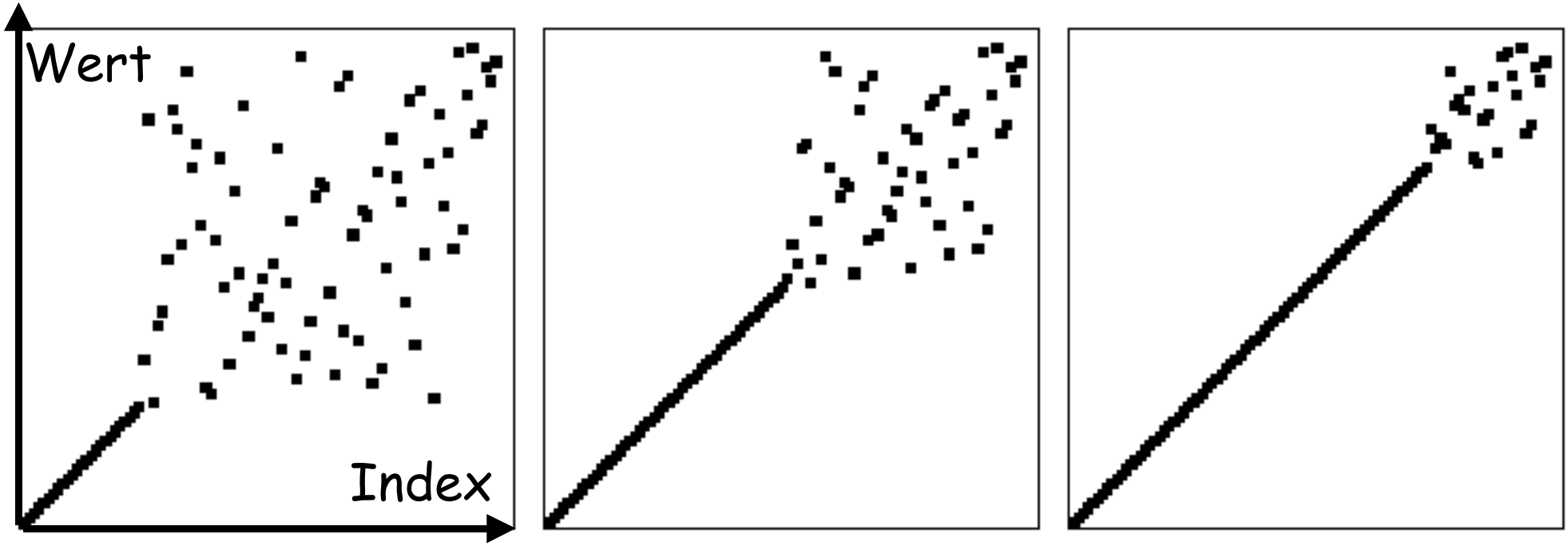
- selection-sort(a : array [1..n] of N_0) : array [1..n] of N_0

```
begin
  var i, j, min : N0;
  for i := 1 to n-1 do
    min := i ;
    for j := i + 1 to n do
      if  a[j] < a[min]
        then min := j
      end if
    end for ;
    a[i],a[min] := a[min], a[i]
  end for ;
  a
end
```



Ein Beispiellauf

- Ein Kasten zeigt das Array a zu einem Zeitpunkt
- Ein Punkt kennzeichnet einen Arraywert
  (Wert durch Höhe kodiert, Index durch Position)
- Annahme: Zufällige Sortierung am Anfang



Komplexitätsanalyse

Komplexitätsanalyse

Zum Sortieren der gesamten Folge $a[1], \ldots, a[N]$ werden $N-1$ Durchläufe benötigt. Pro Schleifendurchgang i gibt es eine Vertauschung, die sich aus je drei Bewegungen und $N-i$ Vergleichen zusammensetzt, wobei $N-i$ die Anzahl der noch nicht sortierten Elemente ist. Insgesamt ergeben sich:

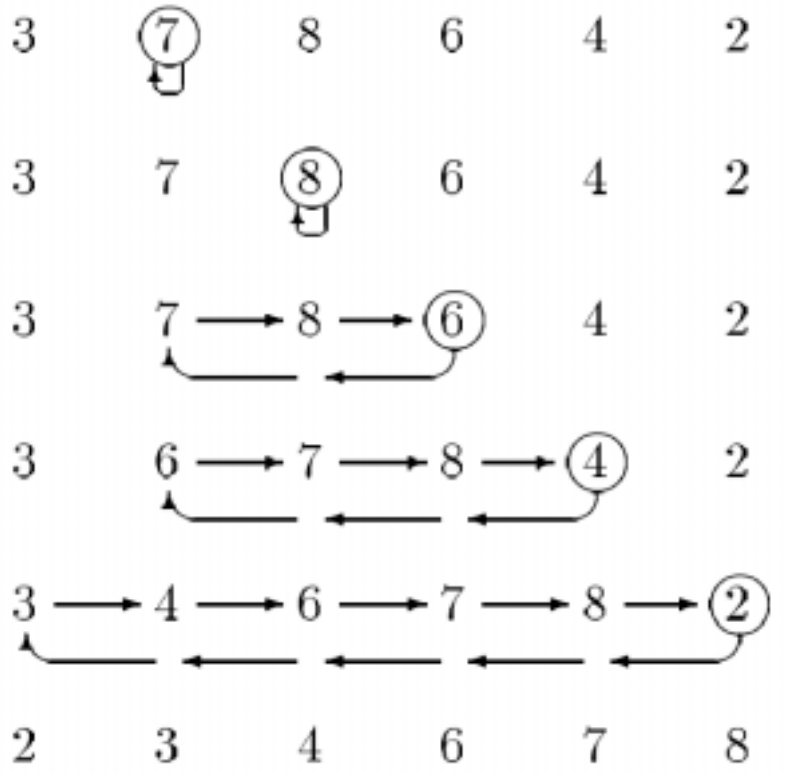
- $3 \cdot (N-1)$ Bewegungen und
- $(N-1) + (N-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{N \cdot (N-1)}{2}$ Vergleiche.

Da die Anzahl der Bewegungen nur linear in der Anzahl der Datensätze wächst, ist SelectionSort besonders für Sortieraufgaben geeignet, in denen die einzelnen Datensätze sehr groß sind.

Sortieren durch Einfügen: insertion-sort

- insertion-sort(a : array [1..n] of N_0): array [1..n] of N_0

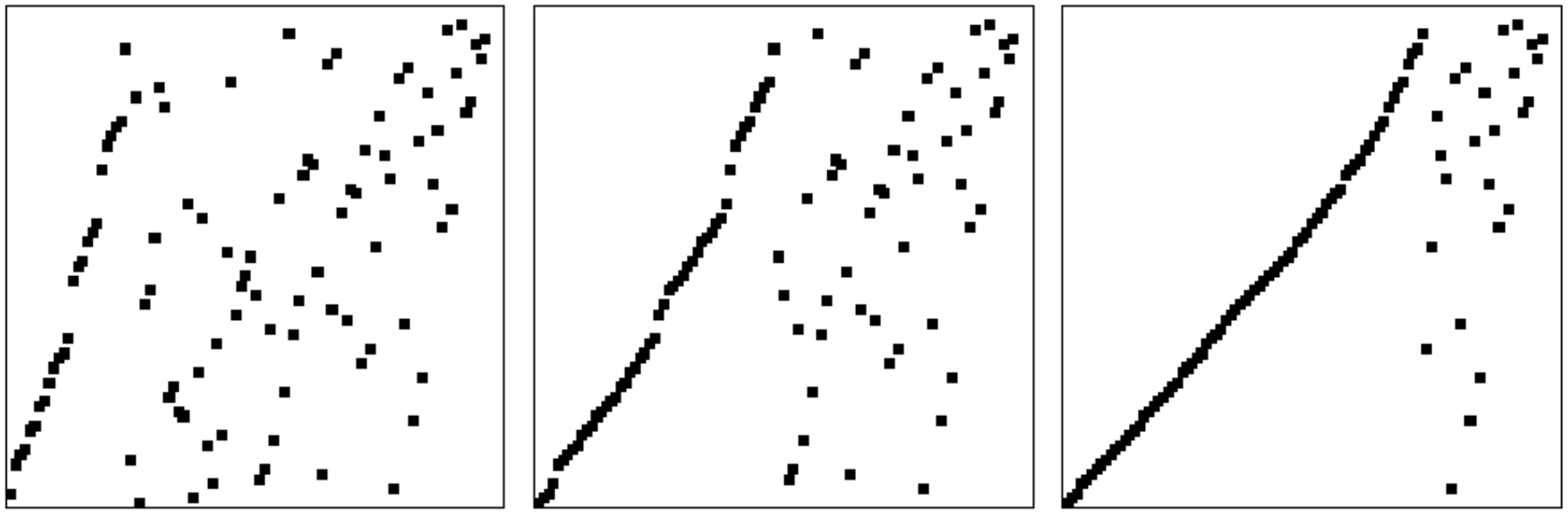
```
begin
  var i, j, v : N0 ;
  for i := 2 to n do
     v := a[i] ;
     j := i ;
     while 1<j ∧ a[j-1] > v do
        a[j] := a[j-1] ;
        j := j -1
     end ;
     a[j] := v ;
   end ;
   a
end
```



Bemerkung

- Nicht-strikte Auswertung von $\wedge$ sichert, daß im Falle j = 1 nicht auf a[0] zugegriffen wird.

Ein Beispiellauf



Komplexitätsanalyse (1)

Vergleiche: Das Einfügen des Elements $a[i]$ in die bereits sortierte Anfangsfolge $a[1], \ldots, a[i-1]$ erfordert mindestens einen Vergleich, höchstens jedoch i Vergleiche. Im Mittel sind dies $i/2$ Vergleiche, da bei zufälliger Verteilung der Schlüssel die Hälfte der bereits eingefügten Elemente größer ist als das Element $a[i]$.

- *Best Case* – Bei vollständig vorsortierten Folgen ergeben sich $N-1$ Vergleiche.
- *Worst Case* – Bei umgekehrt sortierten Folgen gilt für die Anzahl der Vergleiche:

$$\sum_{i=2}^{N} i = \left(\sum_{i=1}^{N} i\right) - 1 = \frac{N(N+1)}{2} - 1$$

$$= \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} - 1$$

- *Average Case* – Die Anzahl der Vergleiche ist etwa $N^2/4$

Komplexitätsanalyse (2)

Bewegungen: Im Schleifendurchgang i ($i = 2,..., N$) wird bei bereits sortierter Anfangsfolge $a[1],..., a[i-1]$ das einzufügende Element $a[i]$ zunächst in die Hilfsvariable v kopiert (eine Bewegung) und anschließend mit höchstens i Schlüsseln wenigstens jedoch mit einem Schlüssel und im Mittel mit $i/2$ Schlüsseln verglichen. Bis auf das letzte Vergleichselement werden die Datensätze um je eine Position nach rechts verschoben (jeweils eine Bewegung). Anschließend wird der in v zwischengespeicherte Datensatz an die gefundene Position eingefügt (eine Bewegung). Für den Schleifendurchgang i sind somit mindestens zwei Bewegungen, höchstens jedoch $i + 1$ und im Mittel $i/2+2$ Bewegungen erforderlich.

Komplexitätsanalyse (3)

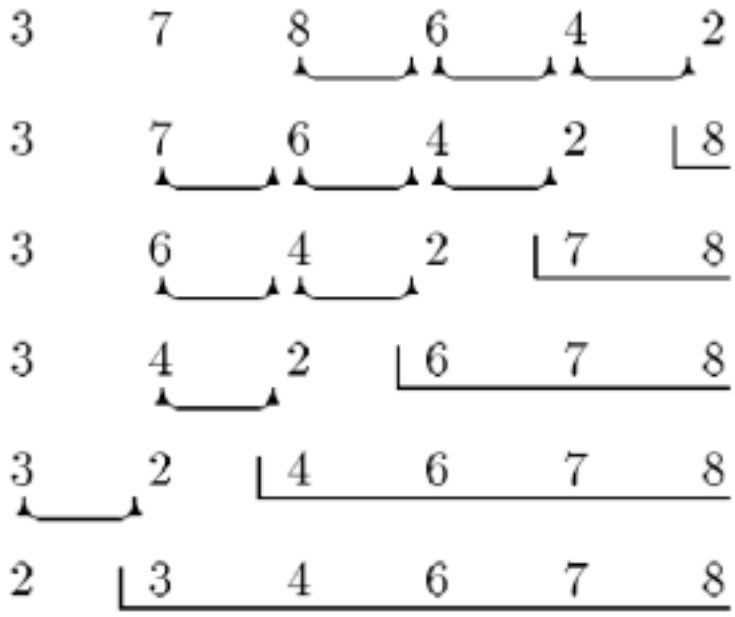
- *Best Case* – Bei vollständig vorsortierten Folgen $2(N-1)$ Bewegungen
- *Worst Case* – Bei umgekehrt sortierten Folgen $N^2/2$ Bewegungen
- *Average Case* – $\sim N^2/4$ Bewegungen

Für „fast sortierte“ Folgen verhält sich InsertionSort nahezu linear. Im Unterschied zu SelectionSort vermag InsertionSort somit eine in der zu sortierenden Datei bereits vorhandene Ordnung besser auszunutzen.

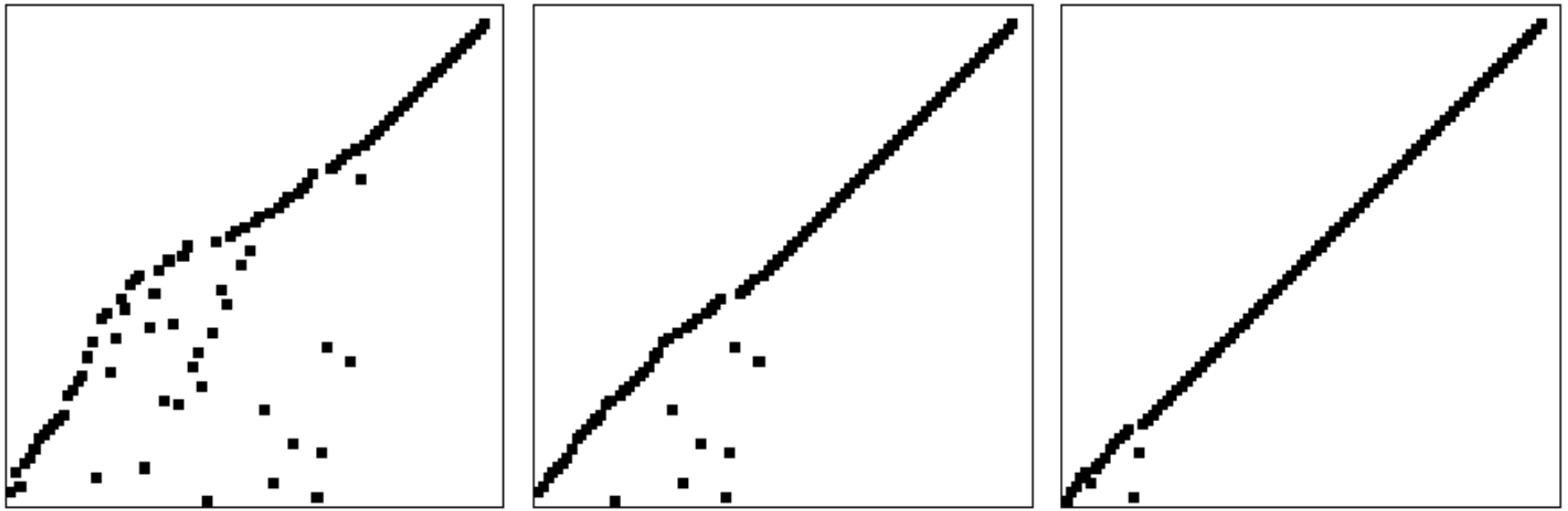
Bubblesort

- function bubble-sort (a : array [1..n] of N_0) : array [1..n] of N_0

```
begin
  var i,j : N0;
  for i := n to 1 by -1 do
    for j := 2 to i do
      if a[j-1]> a[j]
        then a[j-1], a[j] := a[j], a[j-1]
      end
    end
  end ;
  a
end
```



Eine Beispiellauf



Komplexitätsanalyse (1)

Vergleiche: Die Anzahl der Vergleiche ist unabhängig vom Vorsortierungsgrad der Folge. Daher sind der *worst case*, *average case* und *best case* identisch, denn es werden stets alle Elemente der noch nicht sortierten Teilfolge miteinander verglichen. Im i-ten Schleifendurchgang ($i = N, N-1, \ldots, 2$) enthält die noch unsortierte Anfangsfolge $N - i + 1$ Elemente, für die $N - i$ Vergleiche benötigt werden.

Um die ganze Folge zu sortieren, sind $N - 1$ Schritte erforderlich. Die Gesamtzahl der Vergleiche wächst damit quadratisch in der Anzahl der Schlüsselelemente:

$$\sum_{i=1}^{N-1}(N-i) = \sum_{i=1}^{N-1} i$$

$$= \frac{N(N-1)}{2}$$

Komplexitätsanalyse (2)

Bewegungen: Aus der Analyse der Bewegungen für den gesamten Durchlauf ergeben sich:

- im *Best Case*: 0 Bewegungen
- im *Worst Case*: $\sim \frac{3N^2}{2}$ Bewegungen
- im *Average Case*: $\sim \frac{3N^2}{4}$ Bewegungen.

Vergleich elementarer Sortierverfahren

- Anzahl der Vergleiche:

Verfahren	Best Case	Average Case	Worst Case
SelectionSort	$N^2/2$	$N^2/2$	$N^2/2$
InsertionSort	N	$N^2/4$	$N^2/2$
BubbleSort	$N^2/2$	$N^2/2$	$N^2/2$

- Anzahl der Bewegungen:

Verfahren	Best Case	Average Case	Worst Case
SelectionSort	$3(N-1)$	$3(N-1)$	$3(N-1)$
InsertionSort	$2(N-1)$	$N^2/4$	$N^2/2$
BubbleSort	0	$3N^2/4$	$3N^2/2$

Folgerungen

BubbleSort: ineffizient, da immer $N^2/2$ Vergleiche

InsertionSort: gut für fast sortierte Folgen

SelectionSort: gut für große Datensätze aufgrund konstanter Zahl der Bewegungen, jedoch stets $N^2/2$ Vergleiche

Fazit: InsertionSort und SelectionSort sollten nur für $N \leq 50$ eingesetzt werden.

Höhere Sortierverfahren: Quicksort

QuickSort wurde 1962 von C.A.R. Hoare entwickelt.

Prinzip: Das Prinzip folgt dem Divide-and-Conquer-Ansatz:

Gegeben sei eine Folge F von Schlüsselelementen.

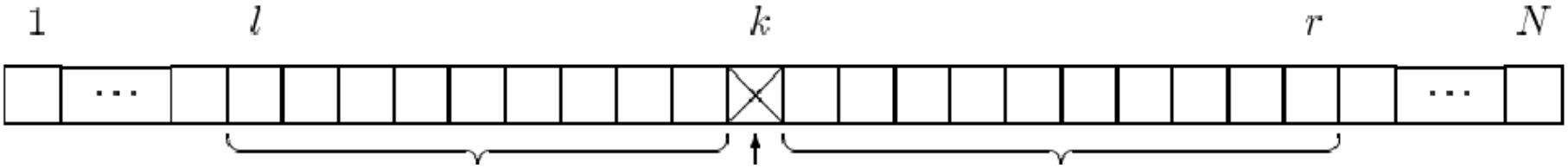
1. Zerlege F bzgl. eines partitionierenden Elementes (engl.: *pivot* = Drehpunkt) $p \in F$ in zwei Teilfolgen F_1 und F_2, so daß gilt:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq p & \forall\, x_1 \in F_1 \\ p &\leq x_2 & \forall\, x_2 \in F_2 \end{aligned}$$

2. Wende dasselbe Schema auf jede der so erzeugten Teilfolgen F_1 und F_2 an, bis diese nur noch höchstens ein Element enthalten.

Quicksort: Kernidee

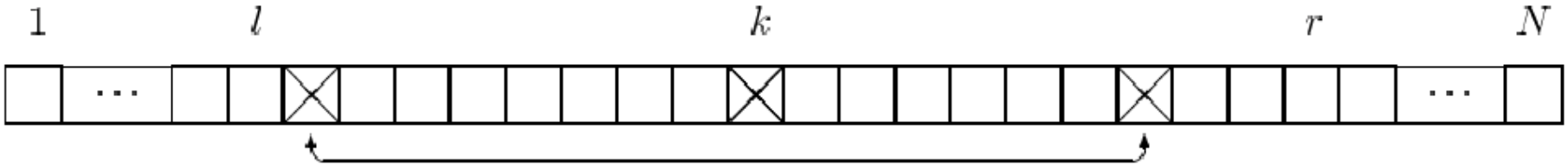
- **Ziel:** Zerlegung (Partitionierung) des Arrays $a[l..r]$ bzgl. eines Pivot-Elementes $a[k]$ in zwei Teilarrays $a[l..k-1]$ und $a[k+1..r]$



so daß gilt:

$$\forall\, i \in \{l, \ldots, k-1\} : \quad a[i] \leq a[k]$$
$$\forall\, j \in \{k+1, \ldots, r\} : \quad a[k] \leq a[j]$$

- **Methode:** Austausch von Schlüsseln zwischen beiden Teilarrays



- **Rekursion:** linkes Teilarray $a[l..k-1]$ und rechtes Teilarray $a[k+1..r]$ bearbeiten

Quicksort

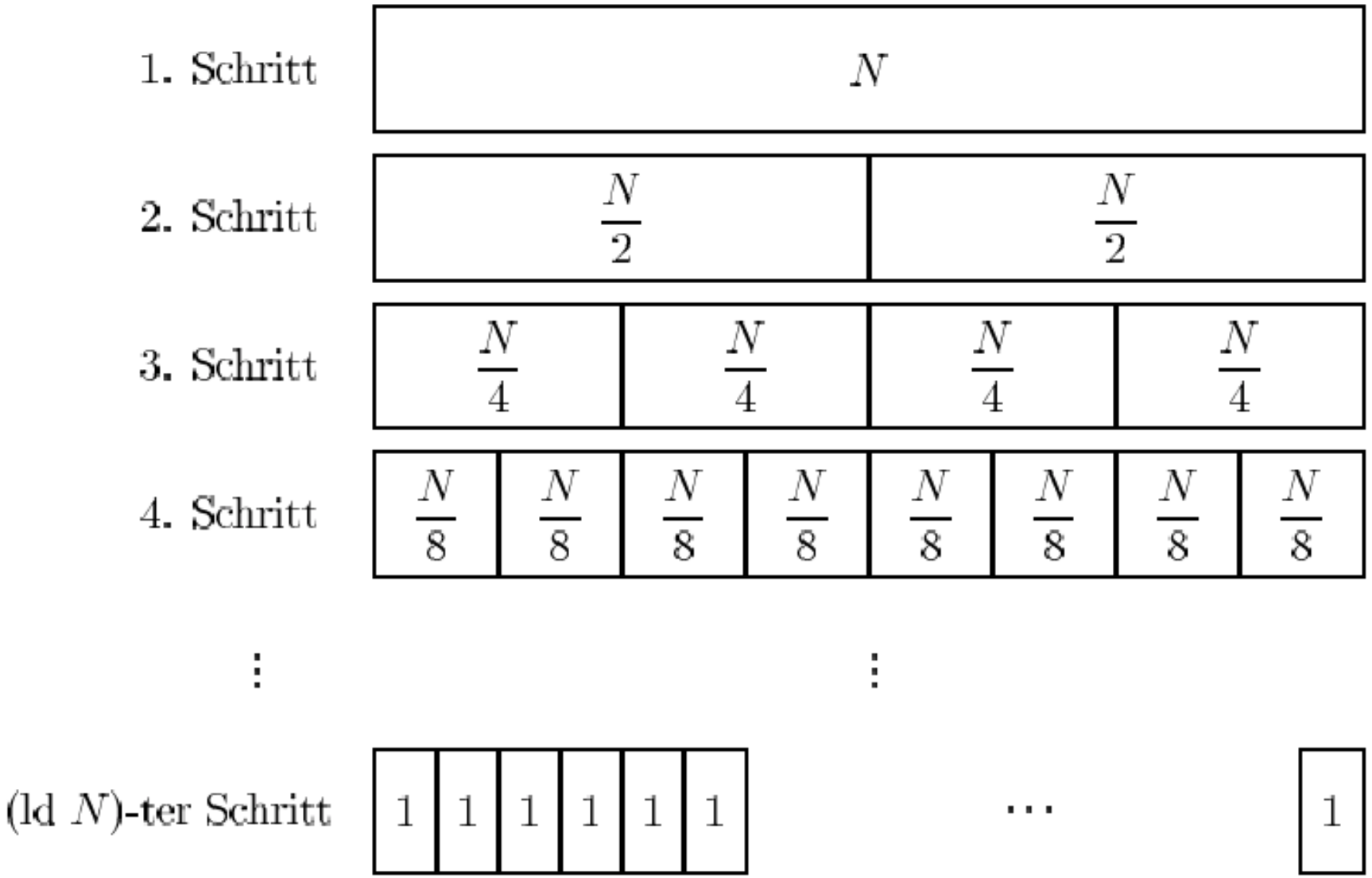
- quicksort(a : array [1..n] of N_0) : array [1..n] of N_0
  quicksort'(a, 1, n)
- quicksort'(a : array [1..n] of N_0; p, r : N_0) :
  array [1..n] of N_0

```
begin
  var q : N0;
  if p < r
     then q := partition(a, p, r);
          quicksort'(quicksort'(a, p, q), q+1, r)
  end if;
  a
end
```

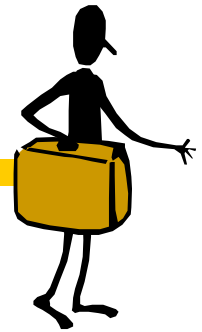
Partition

```
partition(a : array [1..n] of N0; p, r : N0) : N0
begin
   var x, i, j, result : N0;
   x, i, j, result := a[p], p -1, r + 1, -1;
   while result < 0 do
      repeat j := j - 1 until a[j] <= x end repeat;
      repeat i := i + 1 until a[i] >= x end repeat;
      if i < j
         then a[i], a[j] := a[j], a[i]
         else result := j
      end if
   end while;
   result
end
```

Komplexitätsabschätzung



Zusammenfassung, Kernpunkte



- Einfache Sortierverfahren
  - Sortieren durch Auswahl
  - Sortieren durch Einfügen
  - Sortieren durch paarweises Vertauschen (Bubblesort)
- Höhere Sortierverfahren
  - Quicksort
- Komplexitätsabschätzung
  - n^2 vs. n log n
  - Teile-und-herrsche-Prinzip

Was kommt beim nächsten Mal?

- Abstrakte Maschinen für spezielle Aufgaben
- Automatentheorie und Formale Sprachen