

Grundlagen der Programmierung

Ralf Möller, FH-Wedel

- Vorige Vorlesung: Einführung, Algorithmusbegriff
- Inhalt dieser Vorlesung
 - Aussagenlogik (Boole'sche Logik)
- Lernziele:
 - Syntax von Ausdrücken (Formeln der Aussagenlogik)
 - Semantik von Formeln
 - Entscheidungsprobleme über aussagenlogischen Formeln
 - Anwendungen

Motivation

- Eine zentrale Frage in der Informatik:
- Wie beschreibt man, was ein Algorithmus tun soll?
- Man macht Aussagen darüber, wie bestimmte Eingaben in entsprechende Ausgaben transformiert werden (Algorithmus als Funktion).
- Aussagen können verknüpft werden. Beispiele sind:
 - Konjunktion (UND-Verknüpfung)
 - Disjunktion (ODER-Verknüpfung)
 - Negation (Verneinung)
 - ...

Aussagenlogik

- Kernidee
- Aus gegebenen Aussagen und ihren Verknüpfungen neue Aussagen ableiten

Aussagen

- Der Begriff "Aussage" entzieht sich einer Definition (ebenso wie "Punkt", "natürliche Zahl")
- Daher: Beschreibung des Begriffs
 - Eine Aussage ist jeder sprachliche Satz, der seiner inhaltlichen Bedeutung nach entweder wahr oder falsch ist
- "Zweiwertige" Logik
 - {wahr, falsch} oder {true, false} oder {w, f} oder {1, 0}
- Aussagen werden nicht (sprachlich) zerlegt sofern sie nicht aus Verknüpfungen aufgebaut sind.

Aussagen: Beispiele aus dem täglichen Leben

- Holz ist brennbar (W)
- Jede Aussage ist wahr (F)
- Kiel liegt an der Nordsee (F)
- Kein Mensch ist unsterblich (W)

Aussagen: wissenschaftlicher Art

- Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne (W)
- Die maligne Lymphogranulomatose ist derzeit medizinisch unheilbar (W)
- Jede Zahl der Gestalt $2^{(2^n)} + 1$ ist eine Primzahl, wenn n eine natürliche Zahl einschließlich 0 ist (F)
- Jedes lösbare Problem ist auch algorithmisch lösbar (F)

Aussagen: gesetzliche Regelungen

- Ostersonntag fällt auf einen Sonntag, der auf den ersten Vollmond nach Frühlingsanfang folgt (W)
- Die gesetzliche Einheit der Wärmemenge ist die Kilokalorie (F) (richtig ist Joule)
- Parken gegenüber einer Grundstücksein- oder -ausfahrt auf schmaler Fahrbahn ist verboten (W)

Aussagen: Wahrheitswert nach Situation

- Klaus studiert Nachrichtentechnik (?W)
- Am Donnerstag schien die Sonne (?F)
- Das Heizöl wird wieder teurer (?W)

Aussagen mit derzeit unbekanntem Wahrheitwert

- Kein Planet außer der Erde ist bewohnt
- In zwanzig Jahren wird die Medizin die Krebskrankheit besiegt haben

Die Zuordnung von Wahrheitswerten zu Aussagen ist frei wählbar!

Aussagenverknüpfungen

- Negation: $\neg W = F, \neg F = W$
 - Wie sieht die negierte sprachliche Aussagenform aus?
 - Beispiel: Alle Lösungen von $f(x) = 0$ sind reell
 - Negiert: Wenigstens eine Lösung von $f(x) = 0$ ist komplex
- Konjunktion (UND-Verknüpfung)
 - Die Sinusfunktion ist stetig **und** beschränkt
- Disjunktion (ODER-Verknüpfung)
 - In der Bibliothek kann man Zeitschriften **oder** Bücher ausleihen (inklusive ODER)

Aussagenverknüpfungen (Wahrheitstabellen)

■ Konjunktion

- $W \wedge W = W$

- $W \wedge F = F$

- $F \wedge W = F$

- $F \wedge F = F$

■ Disjunktion

- $W \vee W = W$

- $W \vee F = W$

- $F \vee W = W$

- $F \vee F = F$

Verknüpfungsooperatoren für
Aussagen heißen auch "Junktoren"

Aussagenverknüpfungen Wahrheitstabellen (2)

■ Implikation

- $W \rightarrow W = W$

- $W \rightarrow F = F$

- $F \rightarrow W = W$

- $F \rightarrow F = W$

Lies: \rightarrow "wenn - dann"

■ Biimplikation

- $W \leftrightarrow W = W$

- $W \leftrightarrow F = F$

- $F \leftrightarrow W = F$

- $F \leftrightarrow F = W$

Lies: \leftrightarrow als "genau dann - wenn"

Motivation für Implikation

- Wir wollen (später) mehrere Aussagen betrachten
 - Wenn die Sonne scheint, gehe ich schwimmen
 - Die Sonne scheint
- Wir wollen annehmen, daß die betrachteten Aussagen wahr sein sollen
- Intuitiv möchten wir erreichen, daß bei den betrachteten (wahren) Aussagen die Aussage „Ich gehe schwimmen“ eine Folgerung ist. Das kommt später.
- Unter Implikation wird ein syntaktischer Verknüpfungsoperator für Aussagen verstanden
- Folgerung bezieht sich auf die Bedeutung von Aussagen

Motivation für Implikation (2)

■ Wenn wir drei Aussagen betrachten

- Wenn die Sonne scheint, gehe ich schwimmen
- Die Sonne scheint NICHT
- Ich gehe schwimmen

soll sich kein Widerspruch ergeben, d.h. alle Aussagen sollen wahr sein, denn ich kann (wie in diesem speziellen Fall) auch schwimmen gehen, wenn die Sonne nicht scheint.

■ Die Wahrheitstabelle der Implikation erlaubt genau dieses

■ Die Implikation drückt folgendes aus:

- Wenn die Sonne scheint, gehe ich auf jeden Fall schwimmen. Andernfalls erfolgt in dem Beispiel keine Einschränkung: Ich kann schwimmen gehen oder auch nicht.

Variable und Ausdrücke

- Wir haben gesehen: Aussagen können sehr lang sein. Das ist unübersichtlich. Die Verknüpfungsoperatoren sind schlecht sichtbar.
- Wir wissen: Elementare Aussagen, seien sie sprachlich noch so komplex, werden nicht zerlegt.
- Also vergessen wir die (natürliche) Sprache und führen Bezeichner für Aussagen ein: Variable
- Mit Variablen und Junktoren lassen sich aussagenlogische Ausdrücke aufbauen

Wir müssen akurater, d.h. formaler arbeiten ...

- Nach welchen Regeln werden aussagenlogische Ausdrücke aufgebaut?
- Wie werden Wahrheitswerte von zusammengesetzten Ausdrücken bestimmt?
- Nach welchen Regeln lassen sich aus gegebenen Aussagen neue Aussagen ableiten?
- Die natürliche Sprache hilft uns nicht weiter
- Im folgenden verwenden wir daher 1 statt W, 0 statt F, um dieses zu verdeutlichen

Danksagung

- Die Folien zur Aussagenlogik nach dem Buch "Logik für Informatiker" von Uwe Schöning wurden übernommen von **Javier Esparza** (<http://www.brauer.in.tum.de/lehre/logik/SS99/>)

Syntax der Aussagenlogik

Eine *atomare Formel* hat die Form A_i (wobei $i = 1, 2, 3, \dots$).

Formeln werden durch folgende induktive **Definition festgelegt**:

1. Alle atomaren Formeln sind Formeln
2. Für alle Formeln F und G sind $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln.
3. Für jede Formel F ist $\neg F$ eine Formel.

Abkürzungen:

A, B, C oder P, Q, R oder ... statt $A_1, A_2, A_3 \dots$

$(F_1 \rightarrow F_2)$ statt $(\neg F_1 \vee F_2)$

$(F_1 \leftrightarrow F_2)$ statt $((F_1 \wedge F_2) \vee (\neg F_1 \wedge \neg F_2))$

$(\bigvee_{i=1}^n F_i)$ statt $(\dots((F_1 \vee F_2) \vee F_3) \vee \dots \vee F_n)$

$(\bigwedge_{i=1}^n F_i)$ statt $(\dots((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \wedge \dots \wedge F_n)$

Semantik der Aussagenlogik

Die Elemente der Menge $\{0, 1\}$ heißen *Wahrheitswerte*.

Eine *Belegung* ist eine Funktion $A: D \rightarrow \{0, 1\}$, wobei D eine Teilmenge der atomaren Formeln ist. Wir erweitern A zu einer Funktion $\bar{A}: E \rightarrow \{0, 1\}$, wobei $E \supseteq D$ die Menge aller Formeln ist, die nur aus den atomaren Formeln in D aufgebaut sind.

$$\bar{A}((F \wedge G)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \bar{A}(F) = 1 \text{ und } \bar{A}(G) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\bar{A}((F \vee G)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \bar{A}(F) = 1 \text{ oder } \bar{A}(G) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\bar{A}((\neg F)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \bar{A}(F) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir schreiben A statt \bar{A} .

Modelle

Sei F eine Formel und A eine Belegung.

Falls A für alle in F vorkommenden atomaren Formeln definiert ist, so heißt A zu F *passend*.

Sei A passend zu F :

Falls $A(F) = 1$ so schreiben wir $A \models F$
und sagen F *gilt unter* A
oder A *ist ein Modell für* F

Falls $A(F) = 0$ so schreiben wir $A \not\models F$

etc.

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Eine Formel F heißt *erfüllbar*, falls F mindestens ein Modell besitzt, andernfalls heißt F *unerfüllbar*.

Eine (endliche oder unendliche!) Menge von Formeln M heißt *erfüllbar*, falls es eine Belegung gibt, die für jede Formel in M ein Modell ist.

Eine Formel F heißt *gültig* (oder *allgemeingültig* oder *Tautologie*) falls jede zu F passende Belegung ein Modell für F ist. Wir schreiben $\models F$, falls F eine Tautologie ist, und $\not\models F$ sonst.

Aufgabe

	Gültig	Erfüllbar	Unerfüllbar
A			
$A \vee B$			
$A \vee \neg A$			
$A \wedge \neg A$			
$A \rightarrow \neg A$			
$\neg A \rightarrow A$			
$A \rightarrow B$			
$A \rightarrow (B \rightarrow A)$			
$A \rightarrow (A \rightarrow B)$			
$A \leftrightarrow \neg A$			
$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$			

Aufgabe

Gelten die folgenden Aussagen?

	J/N	Gegenb.
Wenn F gültig dann F erfüllbar		
Wenn F erfüllbar dann $\neg F$ unerfüllbar		
Wenn F gültig dann $\neg F$ unerfüllbar		
Wenn F unerfüllbar dann $\neg F$ gültig		

Aufgabe

Gelten die folgenden Aussagen?

	J/N	Gegenb.
Wenn $(F \rightarrow G)$ gültig und F gültig dann G gültig		
Wenn $(F \rightarrow G)$ erfüllbar und F erfüllbar dann G erfüllbar		
Wenn $(F \rightarrow G)$ gültig und F erfüllbar dann G erfüllbar		

Zusammenfassung, Kernpunkte



- Aussagenlogik
 - Syntax
 - Semantik
 - Entscheidungsprobleme

Was kommt beim nächsten Mal?



- Transformation von aussagenlogischen Formeln
- Boole'sche Algebra