

Grundlagen der Programmierung (Vorlesung 7)

Ralf Möller, FH-Wedel

- Vorige Vorlesung
 - Boole'sche Logik, Resolution
- Inhalt dieser Vorlesung
 - Prädikatenlogik erster Stufe
- Lernziele
 - Syntax, Semantik
 - Entscheidungsprobleme
 - Anwendungen

Über das was wir machen müssen!

- Computer science is no more about computers than astronomy is about telescopes.

E. W. Dijkstra

Motivation

- Aussagenlogik: Aussagen als unteilbares Ganzes (atomare Formeln)
- Beispiel:
 - Wenn es regnet, werde ich naß: $R \rightarrow N$
 - Es regnet: R
 - Also: werde ich naß: N
- Wenn...dann: Wahrheitstabelle der Implikation
 - Wenn die Vorbedingung falsch ist, soll der ganze Implikationsterm wahr sein!
- Aussagenlogik recht mächtig (wir konnten z.B. schließen, daß Superman nicht existiert)

Probleme (1)

■ Gegeben

- Alle Metalle leiten den Strom (A)
- Kupfer ist ein Metall (B)

■ Gewünschte Folgerung

- Kupfer leitet den Strom (C)

■ In Formeln (vielleicht):

- $A \wedge B \rightarrow C$

Probleme (2)

- Gegeben
 - Alle Metalle leiten den Strom (A)
 - Eisen ist ein Metall (D)
- Gewünschte Folgerung
 - Eisen leitet den Strom (E)
- In Formeln (vielleicht):
 - $A \wedge D \rightarrow E$
- Neue Formeln für alle möglichen Metalle erforderlich!
- Gemeinsamkeiten nicht repräsentiert

Motivation (2)

- In Anwendungen ergeben sich Aussagen z.B. durch Analyse natürlichspracher Sätze (siehe Supermann-Beispiel)
- Sätze haben eine grammatische Struktur
- Wir betrachten einfach Satzstrukturen:
 - Subjekt-Prädikat: Ich schlafe
 - Subjekt-Prädikat-Objekt: Ich verfolge die Vorlesung

Subjekt-Prädikat-Strukturen

- Beispiel: Energie ist wertvoll
- Nutzung: Beschreibung von Eigenschaften
- Eigenschaften heißen Prädikate: Wertvoll-sein
- Wir betrachten einstellige Prädikate, die Eigenschaften eines „Subjekts“ (auch Individuum genannt) beschreiben
- Formalisierung:
 - Prädikate mit Großbuchstaben: P, Q, R, \dots
 - Subjekte mit Kleinbuchstaben: x, y, z, \dots

Einstellige Prädikate

- Notation: Wertvoll(x), P(x), ...
- Subjekte wie x bezeichnet man auch als Variablen
- Belegung der Variable: Übergang zur Aussage:
 - Wertvoll(blaue-Mauritius)
 - Die blaue Mauritius ist wertvoll
- Mögliche Belegungen für x aus vorgegebener Grundmenge

Subjekt-Prädikat-Objekt-Strukturen

- Beispiel: Edelgard ist mit Wolfgang verheiratet
- Variablen für Subjekt (Edelgard) und Objekt (Wolfgang) benötigt
- Prädikat beschreibt Beziehung (oder Relation) zwischen Subjekt und Objekt

Zweistellige Prädikate

- $\text{Verheiratet-mit}(x, y), P(x, y)$
- $\text{Verheiratet-mit}(\text{Edelgard}, \text{Wolfgang})$

Verallgemeinerung: n-stellige Prädikate

- Blankenese liegt zwischen Wedel und Altona.
- Prädikat: Zwischen
- Dreistellig
- Im allgemeinen: $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Notation

- Manchmal ist die Notation $P(x,y)$ ungewohnt
- Beispiel: Prädikat Kleiner-als ($<$)
- Infix-Notation: $x < y$

Verknüpfung von Aussagen

- Beispiel: 2 und 3 sind Teiler von 6
- Steht für
 - 2 ist Teiler von 6
 - 3 ist Teiler von 6
- In Prädikatenschreibweise
 - $\text{Teiler-von}(2, 6) \wedge \text{Teiler-von}(3, 6)$
- Beispiel: 4 ist nicht Teiler von 6
 - $\neg \text{Teiler-von}(4, 6)$

Namen für Funktionen

- Bei vielen Anwendungen bequem:
Einführung von **Namen** für Funktionen
 - f, g, h, \dots (rein syntaktische Namen, Funktorvariablen)
 - f_1, f_2, f_3, \dots
- Funktoren haben eine festgelegte Stelligkeit und werden auf Variablen angewendet
- Terme: $f(x, y)$
 - Manchmal auch Infix-Schreibweise

Anwendung von Namen für Funktionen

- Beschreibung eines Objekts, das sich aus der Verknüpfung von x und y ergibt
- Beispiel:
 - Wenn y größer als 0 , dann ist $x+y$ größer als x
 - $(y > 0) \rightarrow ((x + y) > x)$
 - Oder: $\succ(y, 0) \rightarrow \succ(+ (x, y), x)$

Quantifizieren von Aussagen

- Eingangsbeispiel „Alle Metalle leiten den Strom“ nicht von Subjekt-Prädikat-Struktur erfaßt
- Einstelliges Prädikat Leitet-den-Strom bezieht sich nicht auf einen einzelnen Gegenstand
- Vielmehr wird ausgesagt, daß *alle* Subjekte, die Metalle sind, diese Eigenschaft besitzen
- Formalisierung durch **Allquantor** (auch: Universalquantor, Generalisator)
- Für *alle* x gilt: wenn x ein Metall ist, dann leitet x den Strom

Quantifizieren von Aussagen (2)

- Für alle x gilt: $\text{Metall}(x) \rightarrow \text{Leitet-Strom}(x)$
- Notation: $\forall x (\text{Metall}(x) \rightarrow \text{Leitet-Strom}(x))$
- Man beachte: Es muß nicht notwendigerweise überhaupt Metalle geben! Die Für-alle-Aussage ist ja dann nicht falsch
- Manchmal möchte man die **Existenz** aber fordern
- *Es gibt ein x :* $\text{Metall}(x)$, oder genauer aber synonym:
- *Es gibt mindestens ein x :* $\text{Metall}(x)$
- Notation: $\exists x (\text{Metall}(x))$ **Existenzquantor**

Syntax der Prädikatenlogik

Danksagung

- Die Folien zur Prädikatenlogik nach dem Buch "Logik für Informatiker" von Uwe Schöning wurden übernommen von **Javier Esparza** (<http://www.brauer.in.tum.de/lehre/logik/SS99/>)

Variablen, Symbole, Terme

Eine *Variable* hat die Form x_i mit $i = 1, 2, 3, \dots$

Ein *Prädikatensymbol* hat die Form P_i^k und ein *Funktionssymbol* hat die Form f_i^k mit $i = 1, 2, 3, \dots$ und $k = 0, 1, 2, \dots$. Hierbei heißt i jeweils der *Unterscheidungsindex* und k die *Stellenzahl* (oder Stelligkeit). Wir definieren nun die *Terme* durch einen induktiven Prozeß:

1. Jede Variable ist ein Term.
2. Falls f ein Funktionssymbol mit der Stellenzahl k , und falls t_1, \dots, t_k Terme sind, so ist auch $f(t_1, \dots, t_k)$ ein Term.

Hierbei sollen auch Funktionssymbole der Stellenzahl 0 eingeschlossen sein, und in diesem Fall sollen die Klammern wegfallen. Nullstellige Funktionssymbole heißen auch *Konstanten*.

Formeln

Nun können wir (wiederum induktiv) definieren, was *Formeln* (der Prädikatenlogik) sind.

1. Falls P ein Prädikatsymbol der Stelligkeit k ist, und falls t_1, \dots, t_k Terme sind, dann ist $P(t_1, \dots, t_k)$ eine Formel.
2. Für jede Formel F ist auch $\neg F$ eine Formel.
3. Für alle Formeln F und G sind auch $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln.
4. Falls x eine Variable ist und F eine Formel, so sind auch $\exists xF$ und $\forall xF$ Formeln. Das Symbol \exists wird *Existenzquantor* und \forall *Allquantor* genannt.

Atomare Formeln nennen wir genau die, die gemäß 1. aufgebaut sind. Falls F eine Formel ist und F als Teil einer Formel G auftritt, so heißt F *Teilformel* von G .

Freie und gebundene Variablen, Aussagen

Alle Vorkommen von Variablen in einer Formel werden in *freie* und *gebundene* Vorkommen unterteilt. Dabei heißt ein Vorkommen der Variablen x in der Formel F gebunden, falls x in einer Teilformel von F der Form $\exists xG$ oder $\forall xG$ vorkommt. Andernfalls heißt dieses Vorkommen von x frei.

Eine Formel ohne Vorkommen einer freien Variablen heißt *geschlossen* oder eine *Aussage*.

Die *Matrix* einer Formel F ist diejenige Formel, die man aus F erhält, indem jedes Vorkommen von \exists bzw. \forall , samt der dahinterstehenden Variablen gestrichen wird. Symbolisch bezeichnen wir die Matrix der Formel F mit F^* .

Aufgabe

NF: Nicht-Formel F: Formel, aber nicht Aussage A: Aussage

	NF	F	A
$\forall xP(a)$			
$\forall x\exists y(Q(x,y) \vee R(x,y))$			
$\forall xQ(x,x) \rightarrow \exists xQ(x,y)$			
$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x,x)$			
$\forall P(x)$			
$P(x) \rightarrow \exists x$			
$\forall\exists P(x)$			
$\forall x\neg\forall yQ(x,y) \wedge R(x,y)$			
$\exists z(Q(z,x) \vee R(y,z)) \rightarrow \exists y(R(x,y) \wedge Q(x,z))$			
$\exists x(\neg P(x) \vee P(a))$			
$P(x) \rightarrow \exists xP(x)$			
$\exists x\forall y((P(y) \rightarrow Q(x,y)) \vee \neg P(x))$			

Semantik der Prädikatenlogik

Struktur, passende Strukturen

Eine *Struktur* ist ein Paar $A = (U_A, I_A)$ wobei U_A eine beliebige aber **nicht leere** Menge ist, die die *Grundmenge* von A (oder der *Grundbereich*, der *Individuenbereich*, das *Universum*) genannt wird. Ferner ist I_A eine Abbildung, die

- jedem k -stelligen Prädikatensymbol P (das im Definitionsbereich von I_A liegt) ein k -stelliges Prädikat über U_A zuordnet,
- jedem k -stelligen Funktionssymbol f (das im Definitionsbereich von I_A liegt) eine k -stellige Funktion auf U_A zuordnet,
- jeder Variablen x (sofern I_A auf x definiert ist) ein Element der Grundmenge U_A zuordnet.

Sei F eine Formel und $A = (U_A, I_A)$ eine Struktur. A heißt zu F *passend*, falls I_A für alle in F vorkommenden Prädikatsymbole, Funktionssymbole und freien Variablen definiert ist.

Mit anderen Worten, der Definitionsbereich von I_A ist eine Teilmenge von $\{P_i^k, f_i^k, x_i \mid i = 1, 2, 3, \dots \text{ und } k = 0, 1, 2, \dots\}$, und der Wertebereich von I_A ist eine Teilmenge aller Prädikate und Funktionen auf U_A , sowie der Elemente von U_A . Wir schreiben abkürzend statt $I_A(P)$ einfach P^A , statt $I_A(f)$ einfach f^A und statt $I_A(x)$ einfach x^A .

Zusammenfassung, Kernpunkte



■ Prädikatenlogik

- Syntax, Formeln
- Semantik, Belegung, Modell
- Entscheidungsprobleme
- Äquivalente Transformation von Formeln
- Normalformen

■ Anwendungsmotivation:

- Bedingungen in Algorithmen

■ Beweistechniken

Was kommt beim nächsten Mal?



- Spezifikationen
- Algorithmen
- Anweisungen
 - Syntax
 - Semantik