Grundlagen der Programmierung (Vorlesung 8)

Ralf Möller, FH-Wedel

- Vorige Vorlesung
  - Motivation der Prädikatenlogik
  - Syntax der Prädikatenlogik
- Inhalt dieser Vorlesung
  - Semantik der Prädikatenlogik
  - Prädikatenlogische Entscheidungsprobleme

Struktur, passende Strukturen

Eine *Struktur* ist ein Paar $A = (U_A, I_A)$ wobei U_A eine beliebige aber nicht leere Menge ist, die die *Grundmenge* von A (oder der *Grundbereich*, der *Individuenbereich*, das *Universum*) genannt wird. Ferner ist I_A eine Abbildung, die

- jedem k–stelligen Prädikatensymbol P (das im Definitionsbereich von I_A liegt) ein k–stelliges Prädikat über U_A zuordnet,
- jedem k–stelligen Funktionssymbol f (das im Definitionsbereich von I_A liegt) eine k–stellige Funktion auf U_A zuordnet,
- jeder Variablen x (sofern I_A auf x definiert ist) ein Element der Grundmenge U_A zuordnet.

Sei F eine Formel und $A = (U_A, I_A)$ eine Struktur. A heißt zu F *passend*, falls I_A für alle in F vorkommenden Prädikatsymbole, Funktionssymbole und freien Variablen definiert ist.

Mit anderen Worten, der Definitionsbereich von I_A ist eine Teilmenge von $\{P_i^k, f_i^k, x_i | i = 1, 2, 3, \ldots \textit{ und } k = 0, 1, 2., \ldots\}$, und der Wertebereich von I_A ist eine Teilmenge aller Prädikate und Funktionen auf U_A, sowie der Elemente von U_A. Wir schreiben abkürzend statt $I_A(P)$ einfach P^A, statt $I_A(f)$ einfach f^A und statt $I_A(x)$ einfach x^A.

Werte von Termen und Formeln in einer Struktur

Sei F eine Formel und $\mathcal{A}$ eine zu F passende Struktur. Für jeden Term t, den man aus den Bestandteilen von F bilden kann (also aus den Variablen und Funktionssymbolen), definieren wir nun den *Wert* von t in der Struktur $\mathcal{A}$, den wir mit $\mathcal{A}(t)$ bezeichnen. Die Definition ist wieder induktiv.

1. Falls t eine Variable ist (also $t = x$), so ist $\mathcal{A}(t) = x^{\mathcal{A}}$.

2. Falls t die Form hat $t = f(t_1, \ldots, t_k)$ wobei $t_1, \ldots, t_k$ Terme und f ein k–stelliges Funktionssymbol ist, so ist $\mathcal{A}(t) = f^{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k))$.

Der Fall 2 schließt auch die Möglichkeit ein, daß f nullstellig ist, als t die Form hat $t = a$. In diesem Fall ist also $\mathcal{A}(t) = a^{\mathcal{A}}$.

Auf analoge Weise definieren wir (induktiv) den *(Wahrheits–) Wert* der Formeln F unter der Struktur $\mathcal{A}$, wobei wir ebenfalls die Bezeichnung $\mathcal{A}(F)$ verwenden.

- Falls F die Form hat $F = P(t_1, \ldots, t_k)$ mit den Termen $t_1, \ldots, t_k$ und k–stelligem Prädikatsymbol P, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & falls\ (\mathcal{A}(t_1), \ldots, \mathcal{A}(t_k)) \in P^{\mathcal{A}} \\ 0, & sonst \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = \neg G$ hat, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & falls\ \mathcal{A}(G) = 0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = (G \wedge H)$ hat, so ist

$$\mathcal{A}(F) = \begin{cases} 1, & falls\ \mathcal{A}(G) = 1\ und\ \mathcal{A}(H) = 1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = (G \vee H)$ hat, so ist

$$A(F) = \begin{cases} 1, & falls\, A(G) = 1\ oder\ A(H) = 1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = \forall x G$ hat, so ist

$$A(F) = \begin{cases} 1, & falls\ für\ alle\ d \in U_A\ gilt:\ A_{[x/d]}(G) = 1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

- Falls F die Form $F = \exists x G$ hat, so ist

$$A(F) = \begin{cases} 1, & falls\ es\ ein\ d \in U_A\ gibt\ mit:\ A_{[x/d]}(G) = 1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Hierbei bedeutet $A_{[x/d]}$ diejenige Struktur $A^{'}$, die überall mit A identisch ist, bis auf die Definition von $x^{A^{'}}$. Es sei nämlich $x^{A^{'}} = d$, wobei $d \in U_A = U_{A'}$ — unabhängig davon, ob I_A auf x definiert ist oder nicht.

Beispiel

Es sei P ein zweistelliges Prädikatensymbol, Q ein einstelliges Prädikatensymbol, a eine Konstante, f ein einstelliges Funktionssymbol, und es seien x, y, z Variablen. Eine Struktur, die diesen Symbolen Werte zuordnet, ist gegeben durch $A = (U_A, I_A)$ mit $U_A = \{7, 8, 9\}$. Die Interpretationsfunktion I_A ist wie folgt definiert:

$a^A = 7$

$x^A = 8$

$y^A = 9$

$Q^A = \{7, 9\}$

$P^A = \{(7, 8), (7, 9), (8, 9)\}$

$f^A = \{(7, 8), (8, 9), (9, 7)\}$

Beispiel (2)

- Zu bestimmen ist der Wahrheitswert der folgenden Formeln bezüglich *A*:
  1. $(Q(a) \; \square \; P(a, x)) \; \square \; (Q(f(a)) \quad P(a, y))$
  2. $P(a, y) \; \square \; \square z \; P(z, a)$
  3. $\square z \; (Q(z) \quad \square P(a, z))$

Modell, Gültigkeit, Erfüllbarkeit

Falls für eine Formel F und eine zu F passende Struktur $\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A}(F) = 1$, so schreiben wir wieder $\mathcal{A} \models F$.

Sprechweise: F *gilt* in $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{A}$ ist *Modell* für F.

Falls jede zu F passende Struktur ein Modell für F ist, so schreiben wir $\models F$, andernfalls $\not\models F$.

Sprechweise: F ist *(allgemein–)gültig*.

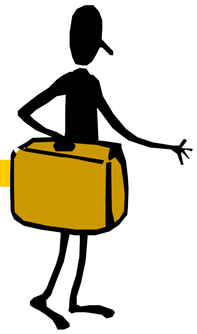
Falls es mindestens ein Modell für die Formel F gibt, so heißt F *erfüllbar*, andernfalls *unerfüllbar*.

Aufgabe

G: Gültig E: Erfüllbar, aber nicht gültig U: Unerfüllbar

	G	E	U
$\forall x P(a)$			
$\exists x(\neg P(x) \vee P(a))$			
$P(a) \rightarrow \exists x P(x)$			
$P(x) \rightarrow \exists x P(x)$			
$\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$			
$\forall x P(x) \wedge \neg \forall y P(y)$			
$\forall x(P(x,x) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y))$			
$\forall x \forall y(x = y \rightarrow f(x) = f(y))$			
$\forall x \forall y(f(x) = f(y) \rightarrow x = y$			
$\exists x \exists y \exists z(f(x) = y \wedge f(x) = z \wedge y \neq z)$			

Zusammenfassung, Kernpunkte



- Prädikatenlogik
  - Syntax, Formeln
  - Semantik, Belegung, Modell
  - Entscheidungsprobleme
  - Äquivalente Transformation von Formeln

Was kommt beim nächsten Mal?

- Logik und die systematische Entwicklung von Programmen
- Spezifikation und Programmverifikation