

Automaten und Formale Sprachen

ε -Automaten und ihre Transformation in NFAs

Ralf Möller

Hamburg Univ. of Technology

Endlicher Automat mit ε -Übergängen

- Ein **endlicher ε -Automat** (ε FA) ist ein Quintupel $A = (S, \Sigma, \delta, S_0, F)$;
- Dabei sind S, Σ, S_0 und F wie bei NFA definiert, und δ ist die **Zustandsübergangsrelation**, die auch ε -Transitionen zulässt:
$$\delta \subseteq S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times S$$
- Konfigurationen $k = (s, w)$ sind wie bei NFA definiert
- Für Konfigurationsübergänge gilt:
$$(s, aw) \vdash (t, w) \text{ gdw. } (s, a, t) \in \delta, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, w \in \Sigma^*$$
- Die von einem ε FA A **akzeptierte Sprache** ist dann wieder
$$L(A) = \{w \in \Sigma^*; (s_0, w) \vdash^* (s, \varepsilon), s_0 \in S_0, s \in F\}$$

Äquivalenz von ϵ -Automaten und NFA

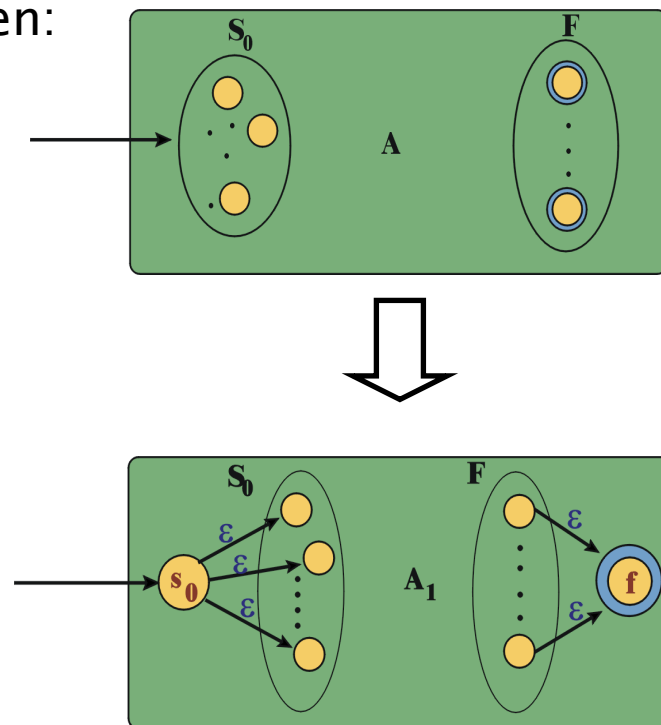
Satz: Die Klasse der jeweils von ϵ -Automaten und NFA akzeptierbaren Sprachen sind gleich.

Beweis:

1. Jeder NFA ist ein spezieller ϵ FA (ohne ϵ -Übergänge)
2. Wir konstruieren zu einem beliebig gegebenen ϵ FA $A = (S, \Sigma, \delta, S_0, F)$ in vier Schritten einen NFA A' , der dieselbe Sprache akzeptiert, für den also $L(A) = L(A')$ ist.

Transformation von ϵ FA in NFA, 1. Schritt

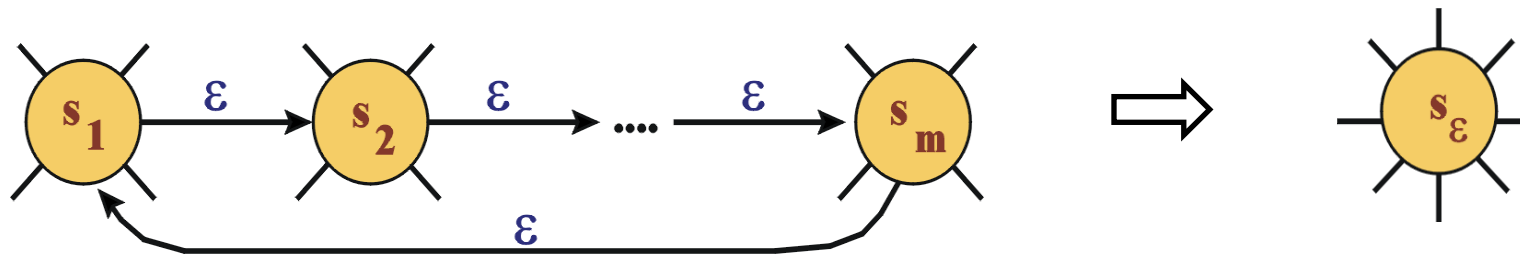
A erhält einen neuen Startzustand s_0 und einen neuen Endzustand f , die mit den bisherigen Start- bzw. Endzuständen über ϵ -Transitionen verbunden werden:



(Falls A nur einen Start- oder Endzustand hat, kann auf das Schaffen neuer Zustände verzichtet werden.)

Transformation von ϵ FA in NFA, 2. Schritt

Entferne alle ϵ -Zykel, Zustandsfolgen s_1, s_2, \dots, s_m , die zyklisch über ϵ -Transitionen durchlaufen werden können, ersetze sie durch neuen Zustand s_ϵ . Zu und von s_ϵ führen alle Transitionen der ersetzten Zustände.

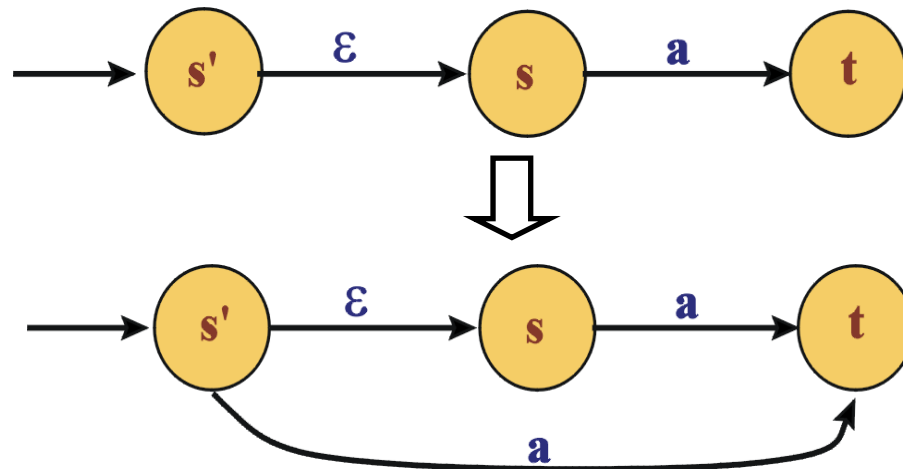


Anschließend werden alle Transitionen der Art (s, ϵ, s) entfernt.

Transformation von ϵ FA in NFA, 3. Schritt

Jetzt noch enthaltene ϵ -Transitionen werden durch alternative Übergänge ergänzt, die Zeichen aus Σ benötigen. (Ziel ist es, die ϵ -Transitionen überflüssig zu machen.)

Kommt man mit (erst ϵ dann a) von s' nach t , dann auch mit (nur a).



Diese Operation wird so oft angewandt, bis sich keine Änderungen mehr ergeben.

Transformation von ϵ FA in NFA, 4. Schritt

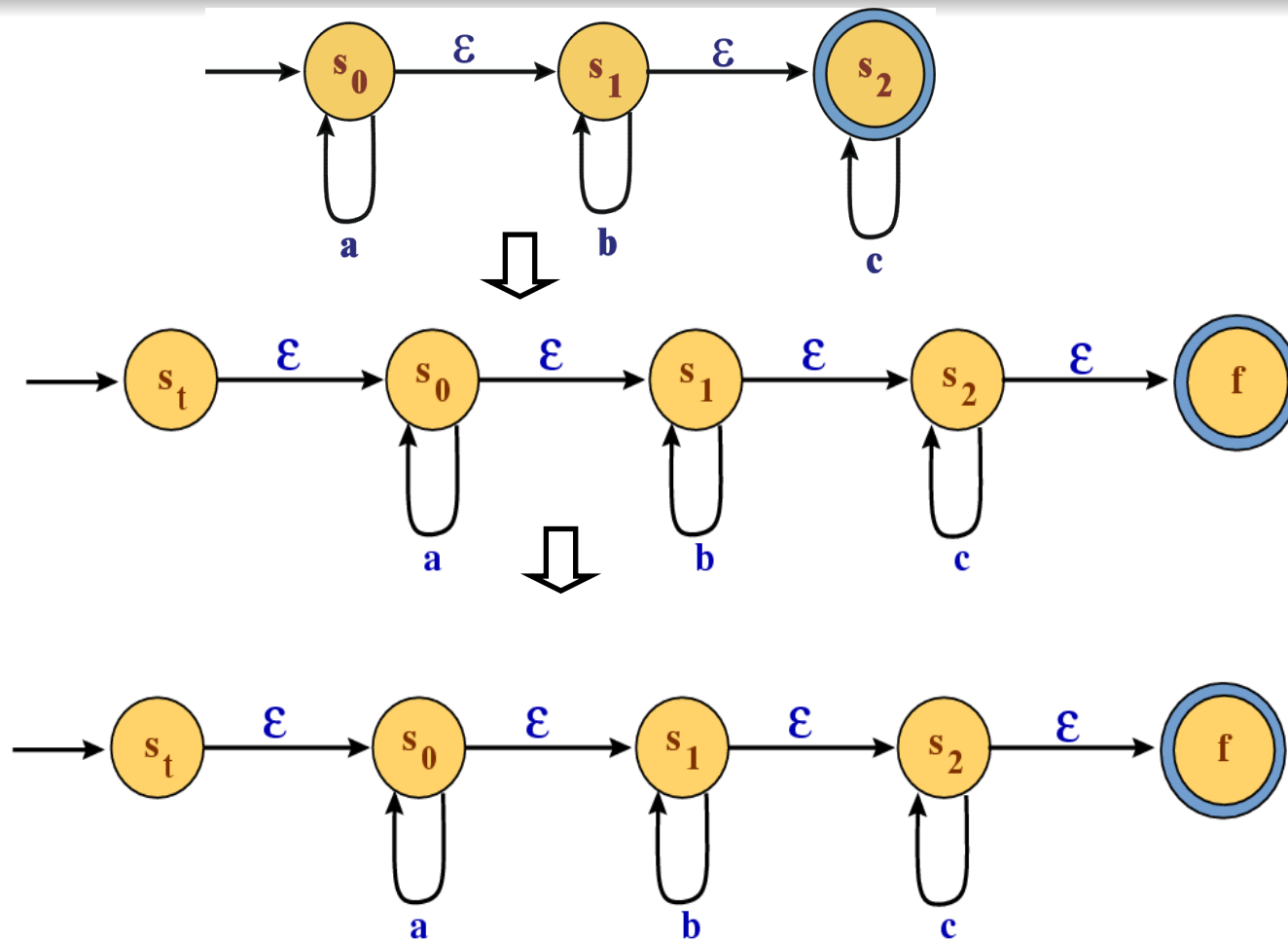
Ein neu eingefügter Endzustand f (der nur das Ziel von ϵ -Transitionen ist) wird wieder entfernt und in die Endzustandsmenge F' werden alle die Zustände aufgenommen, von denen aus f per ϵ -Transitionen erreichbar war.

$$F' = \{t \in S; (t, \epsilon) \vdash^* (f, \epsilon)\}$$

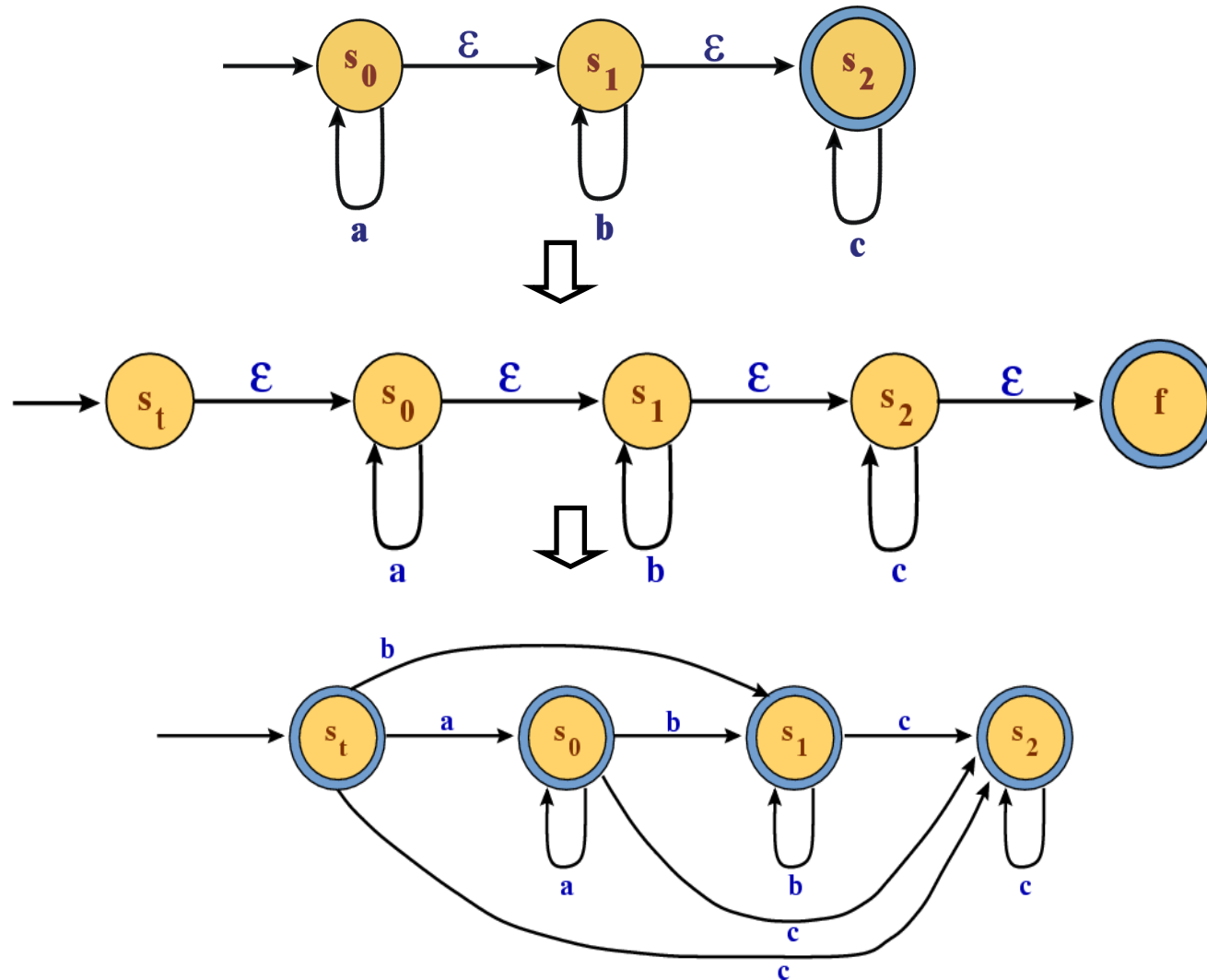
Anschließend können alle ϵ -Transitionen entfernt werden.

Da alle Transformationsschritte äquivalenzerhaltend waren, akzeptiert der so konstruierte Automat dieselbe Sprache wie der gegebene ϵ FA A .

Beispiel: Transformation von $A_{\epsilon abc}$ in einen NFA



Beispiel: Transformation von $A_{\epsilon abc}$ in einen NFA



Transformation in DFA

- Es entsteht ein Automat mit einem Startzustand
- Der Automat ist i.a. ein NFA, der aber automatisch in einen DFA transformiert werden kann (Potenzmengenautomat)
- Häufig werden nicht alle Zustände des Potenzmengenautomaten gebraucht
- Entferne unerreichbare Zustände
- → weitere Minimierung möglich!